文章编号：1000−8152(2006)05−0830−03

摄动离散矩阵Lyapunov方程解的估计

陈东彦, 侯 玲

(哈尔滨理工大学 应用数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 研究摄动离散矩阵Lyapunov方程解的估计问题, 利用矩阵运算性质及Lyapunov稳定性理论, 给出在结构不确定性假设下方程解的存在条件及解的上下界估计, 估计结果由一个线性矩阵不等式(LMI)和两个矩阵代数Riccati方程确定. 针对几种不确定性假设, 进一步给出矩阵代数Riccati方程的具体形式. 最后通过一个算例说明了所得结果的有效性.

关键词: 离散矩阵Lyapunov方程; 不确定性; 矩阵代数Riccati方程; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

On the estimation of solutions to perturbed discrete matrix Lyapunov equations

CHEN Dong-yan, HOU Ling

(Department of Application Mathematic, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China)

Abstract: The estimation of the solution to the perturbed discrete matrix Lyapunov equation is studied. The existence condition and upper and lower bounds estimation of the solution to the equation under the structured uncertainty assumption are presented by applying the operational property of matrix and Lyapunov stability theory, the estimation is then determined by a linear matrix inequality (LMI) and two matrix algebra Riccati equations. The concrete form of matrix algebra Riccati equations are also given for some uncertainty assumptions. Finally, the effectiveness of above results is shown by an example.

Key words: discrete matrix Lyapunov equation; uncertainty; matrix algebra Riccati equation; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

离散Lyapunov方程在确定性离散系统和随机离散系统研究中均具有重要作用. 由于在实际问题中不可避免地存在着不确定性因素,使得离散Lyapunov方程中常常带有不确定参数, 因此研究摄动离散Lyapunov方程解的问题就变得十分重要. 文献[1,2]对此进行了研究, 特别是文献[2]通过求解两个代数Riccati方程, 给出了范数有界不确定性假设条件下摄动离散Lyapunov方程解的存在条件及其上下界估计, 其结果较文献[1]更为简洁有效

本文在文献[2]的基础上继续讨论了摄动离散Lyapunov方程, 给出不确定性为一般情形时方程解的存在条件及其上下界估计, 并针对几种常见的不确定性假设进行了具体讨论, 获得了相应的解的存在条件与解的估计结果, 最后通过算例对部分结果进行了验证.

收稿日期: 2005−05−08; 收修改稿日期: 2005−11−29.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471031).

2 主要结果(Main results)

考虑如下含有结构不确定性的摄动离散矩阵Lyapunov方程

$$P = (A + \Delta A)^{\mathrm{T}} P (A + \Delta A) + Q. \tag{1}$$

其中: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$渐近稳定,$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$半正定,即$Q \geqslant 0, \Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 表示不确定性, 但一般可设其具有一定的不确定性结构,如假设

$$\begin{aligned}\Delta A \in \boldsymbol{\Omega} = &\{\Delta A : \Delta A^{\mathrm{T}} \Delta A \leqslant \boldsymbol{\Omega}(\Delta A), \\ &\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) \geqslant 0\}.\end{aligned} \tag{2}$$

进一步, 对方程(1)假设矩阵对$(A + \Delta A, Q^{\frac{1}{2}})$可稳

本文的目的是: 寻求摄动离散矩阵Lyapunov方程(1)正定解的存在条件, 并确定其解P 的上下界P_1和P_2, 即$P_2 \leqslant P \leqslant P_1$. 其中, $P_2 \leqslant P \leqslant P_1$当且仅当$P - P_2 \geqslant 0, P_1 - P \geqslant 0$.

引理 1[3]　设矩阵$P \geqslant 0, Q \geqslant 0$, 矩阵对$(A, Q^{\frac{1}{2}})$可稳, 且$P = A^{\mathrm{T}}PA + Q$, 则$A$ 渐近稳定.

定理 1　设矩阵对$(A+\Delta A, Q^{1/2})$可稳. 如果存在常数$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 和对称正定矩阵$P_1, P_2 > 0$, 满足

$$\varepsilon_1 P_1 < I, \tag{3}$$

$$P_1 = A^{\mathrm{T}}P_1A + A^{\mathrm{T}}P_1(\varepsilon_1^{-1}I - P_1)^{-1}P_1A + \varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) + Q, \tag{4}$$

和

$$P_2 = A^{\mathrm{T}}P_2A - A^{\mathrm{T}}P_2(\varepsilon_2^{-1}I + P_2)^{-1}P_2A - \varepsilon_2^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) + Q. \tag{5}$$

则

1) 对所有允许不确定性ΔA, $A + \Delta A$渐近稳定;

2) 方程(1)的正定解P存在, 且

$$P_2 \leqslant P \leqslant P_1. \tag{6}$$

证　1) 设ε_1, P_1 满足式(3)和(4), 构造矩阵

$$S_1 = (\frac{1}{\varepsilon_1}I - P_1)^{-1/2}P_1A - (\frac{1}{\varepsilon_1}I - P_1)^{1/2}\Delta A.$$

则

$$0 \leqslant S_1^{\mathrm{T}}S_1 =$$
$$A^{\mathrm{T}}P_1(\varepsilon_1^{-1}I - P_1)^{-1}P_1A - (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P_1(A+\Delta A) +$$
$$A^{\mathrm{T}}P_1A + \varepsilon_1^{-1}\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A \leqslant$$
$$A^{\mathrm{T}}P_1(\varepsilon_1^{-1}I - P_1)^{-1}P_1A - (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P_1(A+\Delta A) +$$
$$A^{\mathrm{T}}P_1A + \varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) \triangleq \varGamma.$$

将式(4)代入上式, 得

$$P_1 = (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P_1(A+\Delta A) + \varGamma + Q. \tag{7}$$

由于$(A+\Delta A, Q^{1/2})$可稳, 且$\varGamma \geqslant 0$, 所以由[3]知$(A+\Delta A, (\varGamma + Q)^{1/2})$也可稳. 又因$P_1 > 0$, 故由引理1知, 对所有允许不确定性$\Delta A$, $A+\Delta A$渐近稳定.

2) 由$A + \Delta A$渐近稳定, 且矩阵对$(A + \Delta A, Q^{1/2})$可稳, 知方程(1)的正定解P存在. 用式(7)减式(1), 得

$$P_1 - P = (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}(P_1 - P)(A+\Delta A) + \varGamma,$$

$$P_1 - P = \sum_{k=0}^{\infty}[(A+\Delta A)^k]^{\mathrm{T}}\varGamma(A+\Delta A)^k \geqslant 0.$$

故$P \leqslant P_1$.

再由ε_2, P_2满足式(5), 构造矩阵

$$S_2 = (\frac{1}{\varepsilon_2}I + P_2)^{-1/2}P_2A + (\frac{1}{\varepsilon_2}I + P_2)^{1/2}\Delta A,$$

则有

$$0 \leqslant S_2^{\mathrm{T}}S_2 \leqslant$$
$$A^{\mathrm{T}}P_2(\varepsilon_2^{-1}I + P_2)^{-1}P_2A + (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P_2(A+\Delta A) -$$
$$A^{\mathrm{T}}P_2A + \varepsilon_2^{-1}\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) \triangleq H.$$

将式(5)代入上式, 得

$$P_2 = (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P_2(A+\Delta A) - H + Q. \tag{8}$$

用式(1)减式(8), 得

$$P - P_2 = (A+\Delta A)^{\mathrm{T}}(P - P_2)(A+\Delta A) + H,$$

$$P - P_2 = \sum_{k=0}^{\infty}[(A+\Delta A)^k]^{\mathrm{T}}H(A+\Delta A)^k \geqslant 0,$$

故$P_2 \leqslant P$.　　证毕.

注 1　由定理1给出的解存在条件及其上下界需求解LMI(3)和矩阵Riccati方程(4)(5), 其中半正定矩阵$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A)$与$\Delta A$有关, 当$\Delta A$满足不同的不确定性结构时, 可以给出相应的$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A)$.下面进行分别讨论.

情形 1　假设ΔA满足非结构不确定性, 即

$$\sigma_1(\Delta A) \leqslant \delta, \delta > 0,$$

其中$\sigma_1(\cdot)$为矩阵$(\cdot)$的最大奇异值

引理 2　设$W \in \mathbb{R}^{n\times n}$是对称矩阵, 则

$$W \leqslant \sigma_1(W)I.$$

证　若$W - \sigma_1(W)I > 0$, 则存在正定阵Q满足方程

$$W - \sigma_1(W) - Q = 0, \text{即}$$

$$2^{-1}(\sigma_1(W)I - W)^{\mathrm{T}} + 2^{-1}(\sigma_1(W)I - W) + Q = 0.$$

因此矩阵$\sigma_1(W)I - W$渐近稳定, 其特征值均具有负实部. 而由W 的对称性, 知

$$\sigma_1(W) = \sqrt{\lambda_1(W^{\mathrm{T}}W)} = \lambda_1(W),$$
$$\lambda(\sigma_1(W)I - W) = \sigma_1(W) - \lambda(W).$$

其中$\lambda(\cdot)$是矩阵的特征值,$\lambda_1(\cdot)$是矩阵的最大特征值.所以$\sigma_1(W)I - W$ 的特征值均具有非负实部,矛盾.

推论 1　若ΔA满足非结构不确定性, 则在定理1中可取

$$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) = \delta^2 I.$$

情形 2　假设ΔA满足强结构不确定性, 即

$$|\Delta A| \leqslant D = (d_{ij})_{n\times n}.$$

其中: $\Delta A = (\Delta a_{ij}), |\Delta A| = (|\Delta a_{ij}|)$,且$|\Delta A| \leqslant D$当且仅当$|\Delta a_{ij}| \leqslant d_{ij}$.

由于, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^{\mathrm{T}}\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta Ax = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i\Delta a_{ki}\Delta a_{kj}x_j \leqslant$$

$$2^{-1}\sum_{i,j,k=1}^{n}(x_i\Delta a_{ki}\Delta a_{ki}x_i + x_j\Delta a_{kj}\Delta a_{kj}x_j) =$$

$$n\sum_{i,k=1}^{n} x_i \Delta a_{ki}^2 x_i \leqslant n\sum_{i,k=1}^{n} x_i d_{ki}^2 x_i = nx^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{D_i^{\mathrm{T}}D_i\}x.$$

其中D_i记为D的第i个列向量. 于是得

推论 2 若ΔA满足强结构不确定性, 则在定理1中可取

$$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) = n\mathrm{diag}\{D_i^{\mathrm{T}}D_i\}.$$

情形 3 假设ΔA满足矩阵多胞型结构不确定性, 即

$$\Delta A = \sum_{k=1}^{m} r_k E_k,$$

其中: $E_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$为已知矩阵, r_k 为未知不确定参数, 但满足$|r_k| \leqslant \bar{r}_k$,, $\bar{r}_k$为非负常数.

引理 3[4] 设x, y为一定维数的向量, X, Y为相应维数的矩阵, 有如下不等式:

$$2x^{\mathrm{T}}XYy \leqslant x^{\mathrm{T}}XX^{\mathrm{T}}x + y^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}Yy.$$

由引理3, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^{\mathrm{T}}\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta Ax = x^{\mathrm{T}}(\sum_{k,j=1}^{m} r_k r_j E_k E_j)x \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}(x^{\mathrm{T}}r_k^2E_k^{\mathrm{T}}E_kx + x^{\mathrm{T}}r_j^2E_j^{\mathrm{T}}E_jx) \leqslant mx^{\mathrm{T}}(\sum_{k=1}^{m}\bar{r}_k^2E_k^{\mathrm{T}}E_k)x.$$

于是得

推论 3 若ΔA满足矩阵多胞型结构不确定性, 则在定理1中可取

$$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) = m\sum_{k=1}^{m}\bar{r}_k^2E_k^{\mathrm{T}}E_k.$$

情形 4 假设ΔA满足范数有界不确定性, 即

$$\Delta A = DFE,$$

其中: $D \in \mathbb{R}^{n\times s}, E \in \mathbb{R}^{l\times n}$为已知矩阵,$F \in \mathbb{R}^{s\times l}$为未知不确定矩阵, 但满足

$$F^{\mathrm{T}}F \leqslant I.$$

引理 4 设W, V为一定维数的矩阵, 则有

$$V^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}WV \leqslant \sigma_1^2(W)V^{\mathrm{T}}V.$$

证明略.

由引理4, 有

$$\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A = E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}DFE \leqslant \sigma_1^2(D)E^{\mathrm{T}}E,$$

于是得

推论 4 若ΔA满足范数有界不确定性, 则在定理1中可取

$$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) = \sigma_1^2(D)E^{\mathrm{T}}E.$$

3 数值算例(Numerical example)

例 设方程(1)中的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix},\ \Delta A = DF(t)E,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.049 & 0.014 \\ 0.014 & 0.038 \end{bmatrix},\ E = I_2,$$

$$F = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0.223 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

易见$F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$, 且$A$渐近稳定. 由推论4取$\boldsymbol{\Omega}(\Delta A) = 0.0796I_2$, 由[5]中的稳定性判据可验证$A + \Delta A$渐近稳定, 再按文献[2]中方法, 取$\varepsilon_1 = 0.5, \varepsilon_2 = 0.6$, 由定理1解得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.328 & 0.0264 \\ 0.0264 & 0.1371 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.2766 & 0.0141 \\ 0.0141 & 0.1148 \end{bmatrix},$$

比较可知$P_2 > X_2$. 其中

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.28054 & 0.00871 \\ 0.00871 & 0.12583 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0.0252 & 0.01 \\ 0.01 & 0.0055 \end{bmatrix},$$

分别为文[2]中方程(1)的解的上界和下界.

4 结论(Conclusion)

本文对离散摄动Lyapunov方程的解进行了估计, 在一般结构不确定性假设下得到了解的上下界, 且解的界由LMI和Riccati方程确定, 可以方便地计算. 对几种常用不确定性假设的讨论又使得研究结果更具体可行.

参考文献(References):

[1] XU J H, SKELTON R E , ZHU G. Upper and lower covariance bounds for perturbed linear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(8): 944 – 948.

[2] 王子栋, 郭治. 摄动离散Lyapunov方程解的上下界估计[J].自动化学报, 1999, 25(1): 117 – 121.
(WANG Zidong, GUO Zhi. On the estmation of upper and lower bounds for solutions to perturbed discrete Lyapunov equations[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(1): 117 – 121.)

[3] WONHAM W M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*[M]. New York: Springer- Verlag, 1979.

[4] PRTERSEN I R, HOLLOT C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(2): 397 – 411.

[5] ZHOU K, KHARGONEKAR. Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(7): 621 – 623.

作者简介:

陈东彦 (1964—), 女, 博士, 教授, 主要研究方向为时滞系统鲁棒控制, E-mail:dychen@hrbust.edu.cn;

侯 玲 (1978—), 女, 硕士研究生, 研究方向为时滞系统鲁棒控制.