文章编号：1000−8152(2006)05−0833−05

商空间下模糊系统性能一致性(鲁棒性)分析

张持健[1,2]，李　旸[2]，陈万里[2]，张　铃[2]

(1. 安徽师范大学 物理电子信息学院, 安徽 芜湖 241000;

2. 安徽大学 智能计算与信号处理教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

摘要: 通过模糊商空间(粒度计算)理论和模糊集的结构性定义, 讨论了模糊控制系统模糊隶属度函数的变化对系统结构的影响, 给出了模糊系统同构的充要条件. 由模糊等价关系出发, 证明了模糊控制器的鲁棒性问题, 从而对于这个人们多年来一直争论的问题, 在一定意义上给予了解决.通过MATLAB对实际控制系统的仿真, 证实以上观点正确.

关键词: 模糊控制; 隶属度函数; 模糊粒度分析; 鲁棒性

中图分类号: TP273A　　　**文献标识码**: A

Analysis of robustness of FCS structure based on quotient space theory

ZHANG Chi-jian, LI Yang, CHEN Wan-li, ZHANG Ling

(1. College of Physics and Electronical Information, Anhui Normal University, Wuhu Anhui 241000, China;
2. Key Laboratory of Intelligence Computing & Signal Processing of Ministry of Education,
Anhui University, Hefei Anhui 230039, China)

Abstract: By means of fuzzy quotient space theory(granular computing theory)and the structural definition of fuzzy set, we studied the variation of the membership functions (MFs) of the fuzzy control system, and its effect on the system structure. The sufficient and necessary condition of the isomorphism of fuzzy system is obtained. The robustness of FCS is also proved by using the fuzzy equivalence relationship. In some sense, we solved the problem of robustness that has confused people for a long time. Finally, simulation for an actual control system is performed to demonstrate the conclusions.

Key words: fuzzy control system(FCS); membership functions(MFs); fuzzy granule computing; robustness

1 引言 (Introduction)

Zadeh于1965年提出了模糊集理论[1], 1972年提出模糊控制技术. 几十年间模糊逻辑得到了迅速发展, 并获得了巨大成功.但是在模糊逻辑、模糊控制理论中, 隶属度函数人为定义, 对于同一控制系统, 不同的人可以取不同的模糊隶属度函数值来加以控制, 但却可以获得一致或相同的控制结果.所以模糊逻辑、模糊控制从一开始就被认为具有浓厚的主观色彩, 而这与科学的本质是相违背的. 本文提出在模糊逻辑和模糊控制系统中, 模糊系统的分层递阶结构才是最根本的, 人们可以取不同的模糊隶属度函数, 但是只要它们的结构相同, 就可以决定相同的系统属性(结构鲁棒性).文中给出模糊逻辑的“同构性”原理及“同构性”判据. MATLAB仿真结果表明以上观点正确.

2 模糊商空间理论 (Theory of fuzzy quotient space)

首先引用文[2, 3]中有关商空间的定义如下:

定义 2.1　设X为一非空集合, 若$T(X)$表X上一切模糊子集的集合, 即是由$\mu_{\mathrm{A}}: X \rightarrow [0,1]$这个函数组成的一个函数空间.当$R \in T(X \times X)$时, 若$\forall x, y, z \in X$满足:

1) $\forall x \in X, R(x,x) = 1$;

2) $\forall x, y \in X, R(x,y) = R(y,x)$;

3) $\forall x, y, z \in X$, 有$R(x,z) \geqslant \sup\limits_y(\min(R(x,y), R(y,z)))$,

则称R是X上的一个模糊等价关系.对于等价关系R, 通常将xRy记为$x \sim y$.若R只取$0, 1$值时, 上面的定义就是一般的等价关系.

收稿日期: 2004−11−26; 收修改稿日期: 2005−11−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60475017); 国家重点基础研究 (973)基金资助项目 (2004CB318108); 省教委自然科学基金和安师大博士启动基金资助项目.

定义 2.2 设$\forall x \in X$, 令$[x] = \{y|x \sim y\}$称为x的等价类, 令$[X] = \{[x]|x \in X\}$称$[X]$为X关于R的商空间.

定理 2.1 设R是X上的一个模糊等价关系, $[X]$是命题2.2中定义的商空间, 则

$$\forall a, b \in [X],\ d(a, b) = 1 - R(x, y),$$
$$\forall x \in a,\ y \in b.$$

则$d(\cdot, \cdot)$是$[X]$上的距离函数.

定义 2.3 在论域X中, 若$\forall \lambda \in [0, 1], S(\lambda) = \{x|\mu_{\mathrm{A}}(x) \geqslant \lambda\}$，则$S(\lambda)$构成$X$的一个截集, 它是一个经典集合.有关截集的偏序特性见文[4, 5], 即

命题 2.1 若$S(\lambda)$为X的一个截集, 则$\{S(\lambda)|\lambda \in [0, 1]\}$在$\subseteq$运算下构成$X$上的一个偏序集, 则:$0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1 \Leftrightarrow S(\lambda_1) \subseteq S(\lambda_2)$.

所以, $\{S(\lambda)|0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ 按照截集的包含关系构成一个有序链.按照系统隶属度函数值的关系构成了一个的层次结构.

证 其自反性, 反对称性及传递性显然.

即论域元素之间关系的密切程度, 恰可用空间元素x的不同包含关系来描述, 最大包含表示元素关系离得远关系小, 较小包含表示元素之间关系离得近关系密切.这是一个非常直观的结论. 该包含关系构成一个有序链, 称之为X上的一个分层递阶结构[6]或全序商空间结构[7].

定理 2.2 下面的断言是等价的:

1) 在X上给定一个模糊等价关系;

2) 在X的商空间上给定一个归一化的等腰距离;

3) 给定X的一个分层递阶结构.

定理的证明见文献[6].

3 模糊系统的结构鲁棒性分析 (Analysis of fuzzy system's robustness)

3.1 模糊隶属度函数的结构性定义 (Structural definition of MFs)

定义 3.1 在X上给定一模糊等价关系$R(x, y)$, 对X中任一集合A, 定义对应的模糊集$\underset{\sim}{A}$, 其对应的隶属度函数$\mu_{\mathrm{A}}(x)$:

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \sup\{R(x, y)|y \in A\}.$$

注 1 这个定义是合理的, 它是将普通集合A, 通过模糊等价关系R, 扩充成以A为核的模糊子集, 这个定义给出了普通集合与其相应的模糊集的关系, 它使人们对模糊集有更加明了、直观的理解.

给定不同的模糊隶属度函数或模糊等价关系, 可以对应于同一个分层递阶结构.

例 1 设$X = \{1, 2, 3\}$, 给定模糊关系如下:

$$R_1(1, 1) = R_1(2, 2) = R_1(3, 3) = 1,$$
$$R_1(1, 3) = 0.8, R_1(1, 2) = R_1(2, 3) = 0.5,$$
$$X_1(1) = \{1, 2, 3\}, X_1(0.8) = \{(1, 3), 2\},$$
$$X_1(0.5) = \{(1, 2, 3)\},$$
$$R_2(1, 1) = R_2(2, 2) = R_2(3, 3) = 1,$$
$$R_2(1, 3) = 0.9, R_2(1, 2) = R_2(2, 3) = 0.6,$$
$$X_2(1) = \{1, 2, 3\}, X_2(0.9) = \{(1, 3), 2\},$$
$$X_2(0.6) = \{(1, 2, 3)\}.$$

由例1可知, 尽管R_1, R_2的模糊等价关系是不同的, 但是它们对应的分层递阶结构均为$\{1, 2, 3\}, \{(1, 3), 2\}, \{(1, 2, 3)\}$.由此可以看出分层结构比模糊等价关系和距离函数更为本质, 模糊隶属度的差别不是主要的, 分层递阶结构的不同才是本质的.

3.2 模糊等价关系同构的分析(Analysis of the isomorphism of fuzzy equivalence relationship)

定义 3.2 模糊等价关系R_1, R_2若其对应的分层递阶结构是相同的, 则称R_1, R_2是同构的.

定义 3.3 给定模糊子集$A, \underset{\sim}{B}$若其对应的全序商空间相同, 则称$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$是同构的.

命题 3.4 设两模糊等价关系R_1, R_2是同构的, 则任给A, 由R_1, R_2按结构性定义的模糊子集$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2$是同构的.

命题 3.5 设R_1, R_2是X上的两个同构的模糊等价关系, A, B是X上任给的两个普通集合, 由R_1, R_2按定义3.1定义模糊子集$\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2$; $\underset{\sim}{B}_1, \underset{\sim}{B}_2$, 则$\underset{\sim}{A}_1 \cup \underset{\sim}{B}_1$与$\underset{\sim}{A}_2 \cup \underset{\sim}{B}_2$;$\underset{\sim}{A}_1 \cap \underset{\sim}{B}_1$与$\underset{\sim}{A}_2 \cap \underset{\sim}{B}_2$;$\underset{\sim}{A}_1^-$与$\underset{\sim}{A}_2^-$是同构的.

证明见文[8].

推论 3.1 设R_1, R_2是X上的两个同构的模糊等价关系, 分别用R_1, R_2定义一组模糊子集:$A = \{\underset{\sim}{A}_1, \cdots, \underset{\sim}{A}_n\}, B = \{\underset{\sim}{B}_1, \cdots, \underset{\sim}{B}_n\}$, 对它进行有限次模糊集运算(并,交,非)后,分别得到模糊子集组$C = \{\underset{\sim}{C}_1, \cdots, \underset{\sim}{C}_m\}, D = \{\underset{\sim}{D}_1, \cdots, \underset{\sim}{D}_m\}$, 则$C$与$D$也是同构的.

定理说明了, 在模糊控制系统中通过商空间粒度变换, 在粗粒度商空间上可以抽象出系统更为本质的结构特征, 并进一步论述了具有序关系结构的模糊集合, 在经过模糊逻辑的交, 并, 补运算后, 获得的模糊集合之间仍然保持同构, 模糊子集的全序商空间结构是它最本质的特征.

模糊控制为基于规则的控制, 模糊规则以模糊语

言的形式来描述人类的经验和知识、规则是否正确反映了人类专家的经验和知识、是否反映了对象的特性, 直接决定了模糊控制系统的性能.上述结果反映了控制专家在设计模糊控制系统时, 只要对模糊系统本质的认识相同, 选择了结构相同的模糊子集, 即使它们的模糊隶属度函数有所不同, 但经推演计算后的模糊子集的结构仍然相同, 从而可以获得一致的控制策略和控制结果.对于一个稳定的模糊控制系统, 当其隶属度函数在同构的条件下变化时, 运算结果之间的的同构性, 保证了模糊控制系统的控制规则和控制策略的一致, 从而使得闭环的模糊控制系统可以获得相应的鲁棒稳定性和性能鲁棒性.

3.3　模糊等价关系同构性的判据 (Criterion of the isomorphism of fuzzy equivalence relationship)

定理 3.1　给定两模糊等价关系R_1, R_2是同构的$\Leftrightarrow$任给$x, y, u, v \in X$,

$$R_1(u,v) < R_1(x,y) \leftrightarrow R_2(u,v) < R_2(x,y)\text{及}$$

$$R_2(u,v) = R_2(x,y) \leftrightarrow R_1(u,v) = R_1(x,y)$$

证　见文[9].

4　应用举例 (Examples)

例 2　在例1中取集合A={1,2},B={3}, 分别用R_1, R_2根据定义3.1定义模糊子集$\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$,其隶属度函数为:

$$A_1(x): \{A_1(1)=1, A_1(2)=1, A_1(3)=0.5\},$$

$$B_1(x): \{B_1(1)=0.8, B_1(2)=0.5, B_1(3)=1\},$$

$$A_2(x): \{A_2(1)=1, A_2(2)=1, A_2(3)=0.6\},$$

$$B_2(x): \{B_2(1)=0.9, B_2(2)=0.6, B_2(3)=1\},$$

$$(A_1\cap B_1)(x) = (A_1\cap B_1)(1) = 0.8,$$

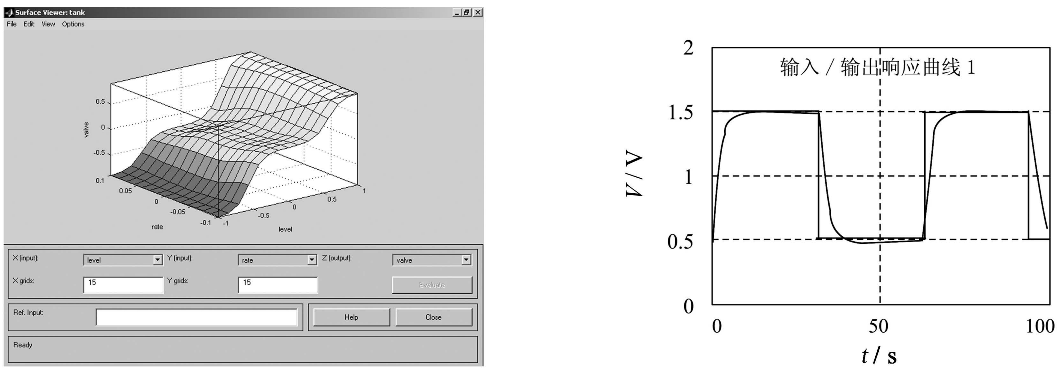
$$\{(A_1\cap B_1)(2) = 0.5, (A_1\cap B_1)(3) = 0.5\},$$

$$(A_2\cap B_2)(x) = (A_2\cap B_2)(1) = 0.9,$$

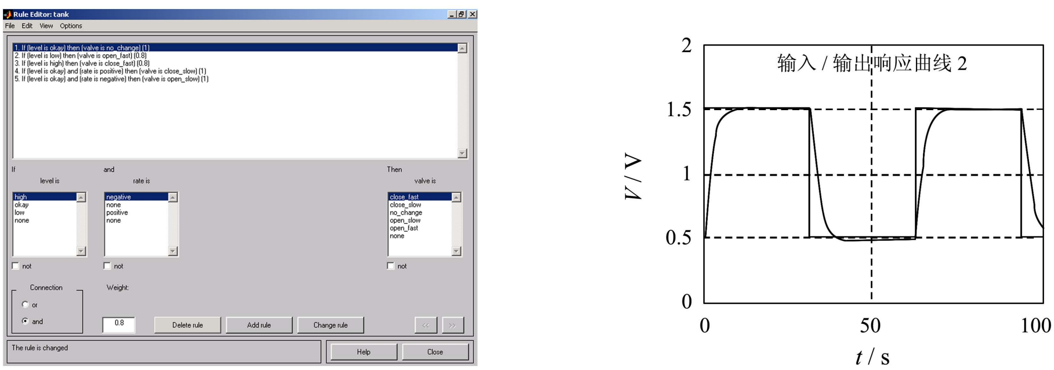
$$\{(A_2\cap B_2)(2) = 0.6, (A_2\cap B_2)(3) = 0.6\}.$$

模糊子集$\underset{\sim}{A}_1$与$\underset{\sim}{A}_2$其隶属度函数虽然不同, 但是由定义可知它们是同构的, 它们的全序商空间结构均为{(1,2),3}, 同样它们的交集运算结果的隶属度虽然不同, 但是它们对应的全序商空间均为{1,(2,3)}. 换句话说, 模糊子集$\underset{\sim}{B}_1$与$\underset{\sim}{B}_2$都说明了点3属于模糊集的核, 1比2更接近A的核, 接近程度的描述, 不同人的理解可能不同, 但是点之间的相对关系应该是相同的, 这个相对的关系就是笔者定义的结构关系.它是模糊集最本质的属性.

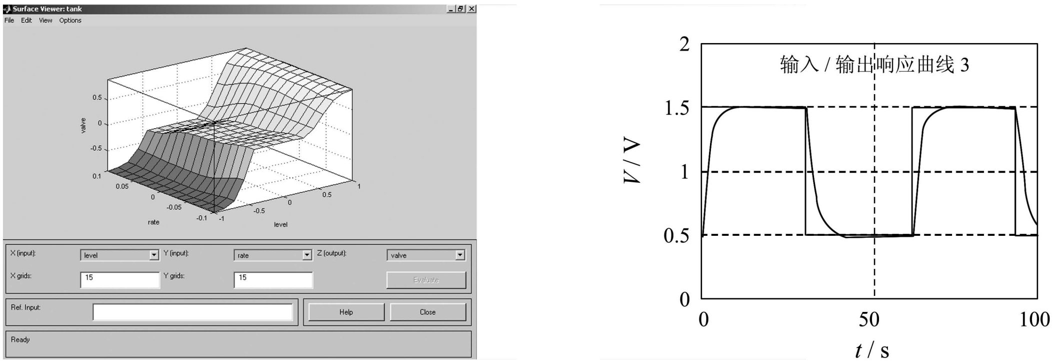
例 3　这里采用一个MATLAB中的水箱水位模糊控制系统的仿真实例, 通过修改模糊控制规则的隶属度函数的大小构造若干个同构的模糊控制系统, 比较系统的响应结果如图1(图中实线方波为给定信号, 曲线为系统仿真的实际输出信号).



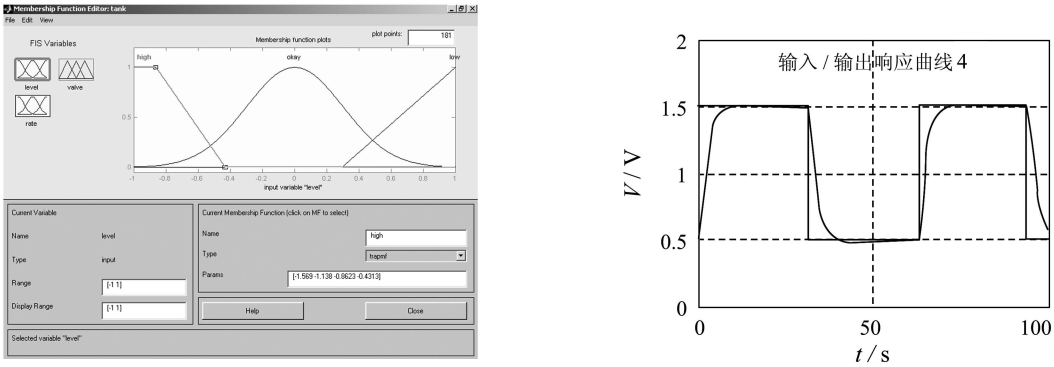
(a)　系统参数不变



(b)　模糊隶属度函数的权系数改变



(c) 模糊隶属度函数的形状改变



(d) 模糊隶属度函数的形状和权系数同时改变

图 1 同构隶属度函数下的试验结果

Fig. 1 Experiment result with the isomorphism of MFs

在以上的几个试验中, 通过改变控制系统的模糊隶属度函数的权系数(图1(b)中40%的权系数被修改), 模糊隶属度函数的形状(图1(c) 中模糊隶属度函数的形状分别为梯形, 高斯形, 三角形)以及同时改变模糊隶属度函数的权系数和形状(图1(d))来改变控制系统的隶属度函数的大小, 不同的隶属度函数与原来控制系统(图1(a)中采用系统的默认参数)形成了若干个同构的模糊控制系统.由图1(a)与图1(d)看, 两者的模糊输入/输出关系曲面已经相差甚远, 但是实验证明模糊控制系统获得了完全相同或一致的控制结果.对于上面的控制结果还可以用下面的图例给出一个简单的解释.当系统的输入在原来的推理系统中由A_i到B, 当系统的输入由X_1到X_2时, 系统的输出由Y_1到Y_2变化.那么当系统的隶属度函数变为同构的A_i', B'时, 系统的输入由X_1'变为X_2'时, 系统的输出一定由Y_1'变到Y_2'(见命题3.5及其推论, 定理3.1).这种不变的基于序关系的分层递阶结构保证了模糊控制系统控制策略的完全一致.当然如果要获得完全一致的控制结果, 原本还必须对系统的输出进行归一化处理(另文给出), 但是由于水位模糊控制系统为负反馈偏差控制, 闭环控制系统自动补偿了数值上的差异.所以系统获得了完全一致和相同的控制结果.换句话说当模糊控制系统的隶属度函数在同构的框架中变化时, 系统的分层递阶结构保持不变, 这种不变的鲁棒性结构使得模糊控制器自动具有了鲁棒稳定性和性能鲁棒性.

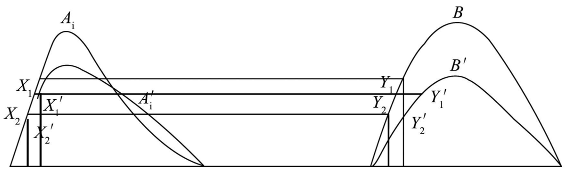


图 2 序关系作用示意图

Fig. 2 Diagram of acting with order relation

5 结论 (Conclusion)

不同的人设计模糊控制系统时, 隶属度函数值可以不同, 只要他们的模糊等价关系–这种序关系结构一致, 那么经过模糊逻辑各种交, 并、补运算后, 其结果的模糊等价关系–序关系结构仍然一致, 获得的结果或控制的策略一致或相同.模糊控制系统获得成功的本质特征就是基于模糊等价关系的有序分层递阶结构.这个结论不仅克服了人们在模糊控制系统隶属度函数定义上的主观性, 澄清人们对模糊集理论和模糊控制的疑虑, 使之建立在更为客观的理论基础上.

参考文献 (References):

[1] ZADEH L A. "Fuzzy sets"[J]. *Information and Control*, 1965, 3(8): 338 – 353.

[2] 张铃, 张钹. 模糊商空间理论(模糊粒度计算方法)[J]. 软件学报, 2003, 14(4) : 770 – 776.
(ZHANG Ling, ZHANG Ba. Theory of fuzzy quotient space (methods of fuzzy granular computing)[J]. *Journal of Software*, 2003, 14(4): 770 – 776.)

[3] ZHANG B, ZHANG L. *Theory and Application of Problem Solving*[M]. Holland: Elsevier Science Publishers, 1992.

[4] BRANIMIR S, ANDREJA T, et al. Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: an overview[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 136(2) : 1 – 19.

[5] BRANIMIR S, ANDREJA T, et al. Representing ordered structures by fuzzy sets: an overview[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 136(1): 21 – 39.

[6] 张钹, 张铃. 问题求解理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
(ZHANG Ba, ZHANG Ling. *Theory and Application of Problem Solving*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.)

[7] 张持健, 王伦文, 张铃. 模糊控制的序关系分析[J]. 模式识别与人工智能, 2005, 18(6) : 723 – 727.
(ZHANG Chijian, WANG Lunwen, ZHANG Ling. Analysis of order relation of fuzzy control[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2005, 18(6) : 723 – 727.)

[8] 张铃. 什么是模糊集的本质[C]//第十三届中国神经网络学术会议论文集(特邀报告). 青岛: 人民邮政出版社, 2003: 54 – 59.
(ZHANG Ling. What is the essence of Fuzzy Set[C]//*Proc of the 13th National Conference on Neural Networks(keynote)*. Qingdao: Posts & Telecom Press, 2003: 54 – 59)

[9] ZHANG L, ZHANG B. The structural analysis of fuzzy sets[J]. *J of Approximate Reasoning*, 2005, 40(1-2) : 92 – 108.

[10] ZADEH L A. Why the success of fuzzy logic is not paradoxical[J]. *IEEE Expert*, 1994, 9(4) : 43 – 45.

[11] ELKAN C. The paradoxical controversy over fuzzy logic[J]. *IEEE Expert*, 1994, 9(4) : 47 – 49.

作者简介:

张持健 (1964—), 男, 教授, 博士, 主要研究领域为人工智能理论及应用、模糊逻辑与控制、神经网络技术, E-mail: whzcj_cn@sina.com;

李 旸 (1962—), 安徽农业大学计算机系副教授, 研究方向: 人工智能, 计算机网络优化技术;

陈万里 (1971—), 博士, 安徽淮北人, 从事智能计算研究;

张 铃 (1937—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为人工智能理论、机器学习理论和方法、智能计算技术、神经网络理论.

下 期 要 目