文章编号: 1000−8150(2006)06−0981−05

基于鲁棒可靠性的不确定时滞系统最优H_∞控制器设计

郭书祥[1,2], 张　陵[2]

(1. 空军工程大学 理学院 数理系, 陕西 西安 710051; 2. 西安交通大学 航天航空学院, 陕西 西安 710049)

摘要: 用区间变量描述控制系统参数的不确定性, 提出了不确定时滞系统鲁棒H_∞控制的鲁棒可靠性方法, 基于鲁棒可靠性的不确定时滞系统最优状态反馈H_∞控制器设计方法, 将系统的最优控制器设计归结为基于线性矩阵不等式(LMI)的优化问题. 所设计的控制器可以在满足对所有不确定性鲁棒可靠的前提条件下, 具有最优的H_∞鲁棒性能, 并能在控制系统的设计中综合考虑控制性能、控制代价和鲁棒可靠性. 数值算例说明了所提方法的有效性和可行性.

关键词: 鲁棒控制; 不确定系统; 时滞; 鲁棒可靠性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Robust reliability-based optimal design of robust H-infinity controller for time-delay systems with parametric uncertainty

GUO Shu-xiang[1,2], ZHANG Ling[2]

(1. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710051, China;
2. School of Astronautics and Aeronautics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: A new robust reliability method is presented for the robust H-infinity control of linear time-delay systems with uncertainties represented by interval variables. Robust reliability based approaches for optimal controller design of time-delay systems with uncertain parameters are proposed. The optimal robust controller design is carried out by optimization formulations, which is within the framework of linear matrix inequality (LMI) approach and is convenient to be implemented. The optimal robust controller satisfying required robust reliability and control performance is then obtained, and the maximum robustness bounds of uncertain parameters are also provided. Furthermore, the control performance, the control cost and the robust reliability are taken into account reasonably in controller design. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness and feasibility of the presented method.

Key words: robust control; uncertain system; delay; robust reliability; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

实际的工程控制系统需要满足稳定性和一定的性能要求. 不确定性和时滞是影响控制系统稳定性和性能的两个主要因素. 能考虑不确定性影响的鲁棒控制理论在控制系统的分析和设计中发挥了重要作用. 许多学者对此做过大量研究[1~10], 取得了许多重要研究成果. 目前的鲁棒控制方法得到的结果常常偏于保守. 其保守性在很大程度上源于对不确定性处理的保守性. 本文将鲁棒可靠性思想[9,10]用于不确定时滞系统的H_∞鲁棒控制, 提出了不确定时滞系统H_∞控制的鲁棒可靠性方法. 旨在尽可能地减小因不确定性处理所引入的保守性, 并使控制系统的设计能综合考虑控制性能、控制代价和鲁棒可靠性. 实例分析表明了所提方法的有效性和可行性.

2 预备知识和问题描述(Preliminary knowledge and problem statement)

当系统的不确定参量ρ在某确定区间内变化时, 可将其作为区间变量, 并表示为如下标准化形式[9,10]:

$$\rho = \rho_0 + \rho_d \delta. \tag{1}$$

其中: ρ_0, ρ_d分别为变量ρ的均值和离差(或名义值和摄动), $\delta \in [-1, 1]$为标准化区间变量.

假设系统的所有不确定参数 $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m\}$均可由区间限界, 且可表示为式(1)所示形式, 进而可将系统矩阵表示为相应的依赖于$\boldsymbol{\delta}$ =

收稿日期: 2004−09−08; 收修改稿日期: 2006−05−08.
基金项目: 中国博士后科学基金资助项目(2003034410); 空军工程大学理学院科学基金资助项目(2005zk12).

$\{\delta_1, \delta_2 \cdots, \delta_m\}$的函数形式. 则系统的控制问题常可归结为求解如下形式的矩阵不等式问题

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) < 0. \tag{2}$$

其中$\boldsymbol{P}$代表待求的可行矩阵. 由针对控制系统问题的鲁棒可靠性方法[9,10], 使式(2)成立的鲁棒可靠度可由如下优化问题求解:

$$\min\ ||\boldsymbol{\delta}||_\infty,\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) = 0. \tag{3}$$

这里$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) = 0$表示对称矩阵$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P})$的最大特征值为零. 相应的鲁棒可靠度定义为

$$\eta_r = \min(||\boldsymbol{\delta}||_\infty) - 1. \tag{4}$$

其中$||\boldsymbol{\delta}||_\infty$表示向量$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \delta_2 \cdots, \delta_m]$的无穷范数. 值得说明的是, 在该算法中, 标准化区间变量$\boldsymbol{\delta} =$仅作为构造无限拓扑空间的基, 以在该拓扑空间内研究相应的可靠性问题. 换句话说, 在鲁棒可靠性分析中, 这里的基本变量$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m]$ 空间已释放为无限拓扑空间, 即认为$\boldsymbol{\delta} \in \boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Delta}$代表任意有界区间的集合. 因此这种方法并不严格依赖于不确定参量的界限.

若用于鲁棒可靠性分析的功能函数(矩阵函数)定义为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}), \tag{5}$$

且定义: $\Omega_r = \{\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) < 0\}$表示可靠区域($<0$表示矩阵负定), $\Omega_f = \{\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) \not< 0\}$表示失效区域($\not< 0$表示矩阵非负定), 则不难理解, 式(4)定义的$\eta_r$是标准化区间变量构造的拓扑空间中, 不确定参量的实际波动区域和失效区域的最短距离(用无穷范数度量). 若$\eta_r > 0$, 则系统性能的实际波动区域与失效区域不相交, 系统是可靠的. 且η_r的值越大, 系统性能的实际波动区域距离失效区域越远, 从而对不确定参量的鲁棒性越好, 其可靠程度越高. 故称为不确定系统的鲁棒可靠度.

在实际求解时, 式(3)可转化为等价形式

$$\max\ ||\boldsymbol{\delta}||_\infty, \text{s.t.}\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{P}) < 0. \tag{6}$$

当$\eta_r \geqslant 0$时, 系统可靠.

考虑如下不确定时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{u}(t), \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{w}(t) + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{u}(t). \tag{7b}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$为系统的状态向量, $\boldsymbol{w}(t) \in \mathbb{R}^q$为能量有限的外部扰动输入, $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^p$为感兴趣的系统被调输出, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^r$为系统的控制输入; $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_d, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$和$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}_d, \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$为适当维数的已知矩阵, $d > 0$为滞后时间, $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m\}$为所有不确定参数的集合.

若采用如下无记忆状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \tag{8}$$

则控制器应用于系统所构成的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_d(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{w}(t), \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{w}(t). \tag{9b}$$

其中: $\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{K}, \boldsymbol{C}_c = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{K}$.

定义 1[1] 对给定的常数$\gamma > 0$, 如果系统(7)具有性质: ① 系统渐近稳定; ② 在零初始条件$\boldsymbol{x}(t) = 0\ (t \in [-d, 0]\ )$下, $||\boldsymbol{z}||_2 \leqslant \gamma||\boldsymbol{w}||_2\ (\forall \boldsymbol{w} \in L_2[0, \infty))$, 则称系统(9)具有$\mathrm{H}_\infty$性能$\gamma$.

由文献[1]可知如下结论成立.

定理 1 对系统(9)和给定的常数$\gamma > 0$, 如果对所有允许的不确定性, 均存在对称正定矩阵$\boldsymbol{P} > 0$和$\boldsymbol{S} > 0$, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_c^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_c(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{S} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{C}_c^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d(\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{P} & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_c & \boldsymbol{D}_1 & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}_d \\ \boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{S} \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

则闭环系统(9)具有H_∞性能γ.

本文旨在建立适用于不确定时滞系统的鲁棒可靠性方法, 并将其用于不确定时滞系统的H_∞鲁棒性能分析和控制设计.

3 主要结果(Main results)

定理 2 对系统(7)和给定的常数$\gamma > 0$, 如果对所有允许的不确定性, 均存在适当维数的对称正定矩阵$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Q}$和矩阵$\boldsymbol{Y}$, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_1 & * & * & * \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho}) & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{D}_1 & -\gamma\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

其中:

$$\boldsymbol{\Xi}_1 = (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{Q},$$

"$*$"表示对称位置矩阵块的转置. 则系统(7)存在无记忆的γ-次优状态反馈H_∞ 控制律(8), 且反馈增益矩阵可取为$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}$.

证 根据定理1, 如果存在对称正定矩阵$\boldsymbol{P} > 0, \boldsymbol{S} > 0$和矩阵$\boldsymbol{K}$, 使式(10)成立, 则系统存在$\gamma$-次优状态反馈$\mathrm{H}_\infty$控制律. 式(10)两边分别左乘和右乘

以矩阵$\mathrm{diag}(\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{P}^{-1})$, 并令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}P^{-1},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}P^{-1}$, 则得式(11).

在系统(7)中, 假设: $\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{D}_2$为常矩阵, 且$\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2>0,\boldsymbol{C}_d=0,\boldsymbol{D}_1=0$. 记

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho})-\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C},\\
&\hat{\boldsymbol{B}}=-\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}},\\
&\hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C},\\
&\hat{\boldsymbol{D}}=-\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

则由定理2, 可直接得到如下结论:

推论 1　对系统(7)和给定的常数$\gamma>0$, 在上述假设下, 如果对所有允许的不确定性, 存在适当维数的对称正定矩阵X和Q, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix}(\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}+(\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{B}})+\boldsymbol{Q} & * & * & *\\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho}) & -\gamma\boldsymbol{I} & * & *\\ \hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{D}} & 0 & -\gamma\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\rho}) & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}<0, \tag{12}$$

则系统(7)存在无记忆的γ-次优状态反馈控制律(8), 且反馈增益矩阵可取为

$$\boldsymbol{K}=-(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}).$$

根据基本变量$\boldsymbol{\rho}=\{\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m\}$的标准化表达式, 将系统矩阵表示为如下相应形式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{A}_0+\sum\limits_{i=1}^{p1}\boldsymbol{A}_i\delta_i,\\ \boldsymbol{A}_d(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{A}_{d0}+\sum\limits_{j=1}^{p2}\boldsymbol{A}_{dj}\delta_j,\\ \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{B}_{10}+\sum\limits_{k=1}^{p3}\boldsymbol{B}_{1k}\delta_k,\\ \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{B}_{20}+\sum\limits_{l=1}^{p4}\boldsymbol{B}_{2l}\delta_l.\end{cases} \tag{13}$$

其中: $\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_{d0},\boldsymbol{B}_{10},\boldsymbol{B}_{20}$和$\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_{dj},\boldsymbol{B}_{1k},\boldsymbol{B}_{2l}$为由基本变量的均值和离差确定的矩阵. 式(13)代入式(11), 并由定理1可得

推论 2　对系统(7)和给定的常数$\gamma>0$, 如果对所有允许的不确定性, 存在适当维数的对称正定矩阵$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q}$和矩阵$\boldsymbol{Y}$, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_2 & * & * & *\\ (\boldsymbol{B}_{10}+\sum\limits_{k=1}^{p3}\boldsymbol{B}_{1k}\delta_k)^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & *\\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{D}_1 & -\gamma\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_{d0}+\sum\limits_{j=1}^{p2}\boldsymbol{A}_{dj}\delta_j)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}<0. \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Xi}_2=\\ &(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_{20}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_{20}\boldsymbol{Y})+\\ &\sum_{i=1}^{p1}[(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}]\delta_i+\\ &\sum_{l=1}^{p2}[(\boldsymbol{B}_{2l}\boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{B}_{2l}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}]\delta_l+\boldsymbol{Q},\end{aligned}$$

则系统(7)存在无记忆的γ-次优状态反馈控制律(8), 且其反馈增益矩阵可取为$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}$.

式(13)代入式(11), 由推论1可得

推论 3　对系统(7)和给定的常数$\gamma>0$, 在推论1的假设下, 如果对所有允许的不确定性, 存在适当维数的对称正定矩阵$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Q}$, 使下式成立:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_3 & * & * & *\\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}) & -\gamma\boldsymbol{I} & * & *\\ \hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{D}} & \boldsymbol{0} & -\gamma\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\delta}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}<0. \tag{15}$$

其中:

$$\boldsymbol{\Xi}_3=(\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}+(\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{B}})+\boldsymbol{Q},$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\delta})=(\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})+\sum_{i=1}^{p1}\boldsymbol{A}_i\delta_i,$$

则系统(7)存在无记忆的γ-次优状态反馈控制律(8), 其反馈增益矩阵可取为

$$\boldsymbol{K}=-(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}).$$

当对所有允许的不确定性, 存在适当维数的对称正定矩阵X,Q和矩阵Y, 使式(14)成立, 或在推论1的假设下, 存在对称正定矩阵X和Q使式(15)成立时, 分别存在状态反馈控制律$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$和$\boldsymbol{u}(t)=-(\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2)^{-1}(\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}+\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t)$, 使闭环系统(9)可靠地具有$\mathrm{H}_\infty$鲁棒性能$\gamma$. 不满足性能要求, 作为一种失效形式, 受所有不确定性和时滞的影响. 从鲁棒可靠性角度讲, 当式(14)或式(15)成立时, 系统可靠. 从而, 可以将对不确定时滞系统(7)进行H_∞性能可靠性分析的功能函数定义为

$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_2 & * & * & *\\ (\boldsymbol{B}_{10}+\sum\limits_{1=1}^{p3}\boldsymbol{B}_{1k}\delta_k)^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & *\\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{Y} & \boldsymbol{D}_1 & -\gamma\boldsymbol{I} & *\\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_{d0}+\sum\limits_{j=1}^{p2}\boldsymbol{A}_{dj}\delta_j) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_d^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}, \tag{16}$$

与式(15)对应的可靠性功能函数定义为

$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_3 & * & * & * \\ \boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\delta}) & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * \\ \hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{X}+\hat{\boldsymbol{D}} & \boldsymbol{0} & -\gamma\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\delta}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix} \quad (17)$$

从而, 由鲁棒可靠性方法, 与式(16)(17)相应的、系统满足鲁棒H_∞性能γ的鲁棒可靠度可分别由如下优化问题求解:

$$\min\ ||\boldsymbol{\delta}||_\infty \quad (18a)$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\delta}^*,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q})<0\,(\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{Q}>0),$$
$$\boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{Q}^*)=0. \quad (18b)$$

或

$$\text{s.t. } \boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\delta}^*,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q})<0\,(\boldsymbol{X}>0,\boldsymbol{Q}>0),$$
$$\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Q}^*)=0. \quad (18c)$$

其中: 式(18b)的第1式表示对确定的$\boldsymbol{\delta}^*$, 可行矩阵$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Y}$应满足的约束, 为一线性矩阵不等式(LMI); 第2式表示对确定的可行矩阵$\boldsymbol{X}^*,\boldsymbol{Q}^*,\boldsymbol{Y}^*,\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\delta})=0$为由标准化区间变量构造的拓扑空间中的失效面. 式(18c)情况类似. 从而可利用LMI 方法和鲁棒可靠度求解方法求得系统的鲁棒可靠度. 进而, 使系统满足鲁棒性能要求的不确定参数ρ_i的最大鲁棒界限可由$\rho_i=\rho_{i0}+(\eta_r+1)\rho_{id}\delta\,(|\delta|\leqslant 1)$确定.

基于可靠性的使闭环系统具有最小性能指标γ的最优H_∞反馈控制律可由如下优化问题求解:

$$\min\ \gamma,\ \text{s.t. } \eta_r\geqslant\eta_{cr}. \quad (19)$$

其中: η_r为按功能函数(16)或(17)由式(18)求得的鲁棒可靠度, $\eta_{cr}\geq 0$为要求的最小鲁棒可靠度. 该优化问题可按两级优化进行: 在上一级优化鲁棒性能, 获取最优状态反馈控制律; 在低一级, 通过优化, 求解鲁棒可靠度.

同时考虑鲁棒可靠性和控制代价的最优反馈控制律可由如下优化问题求解:

$$\min\ \gamma+c\cdot\mathrm{tr}\,\boldsymbol{N}, \quad (20a)$$

$$\text{s.t. } \eta_r\geqslant\eta_{cr}, \quad (20b)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{X}\end{bmatrix}>0,\ \boldsymbol{N}>0. \quad (20c)$$

其中$c>0$为权系数. 或按下式求解:

$$\min\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{N}, \quad (21a)$$

$$\text{s.t. } \gamma\leqslant\gamma_0,\ \eta_r\geqslant\eta_{cr}, \quad (21b)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{X}\end{bmatrix}>0,\ \boldsymbol{N}>0. \quad (21c)$$

这里为求解方便所引入的矩阵$\boldsymbol{N}$为与$\boldsymbol{X}$同阶的对称正定矩阵.

4 数值算例(Example)

考虑形如式(7)所示动态系统, 其中[6]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta})=\begin{bmatrix}-2 & 1-\delta_1+\delta_2\\ 0 & 1+\delta_1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_\delta=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2+\delta_1\\ 0.1 & 0.2+\delta_1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1+\delta_2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=[-0.5\ \ -0.4],$$

$$\boldsymbol{C}_d=[0\ \ 0],\ \boldsymbol{D}_1=0,\ \boldsymbol{D}_2=1,\ \delta_i\in[-1,1].$$

依据推论3, 求解相应的优化问题(20), 其中的权系数$c=0.01$, 鲁棒可靠度约束为$\eta_r\geqslant 0.001$求得的最优反馈控制器增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}=[-1.3946\ \ -17.8738].$$

对应的最优H_∞性能指标为$\gamma=0.6853$.

在鲁棒可靠度约束$\eta_r\geqslant 0.001$下, 依据推论3, 求解相应的优化问题(21), 可得实现不同性能指标的鲁棒控制器增益矩阵如表1所示.

表 1 不同性能指标时的控制器增益矩阵

Table 1 Gain matrices of controller with different disturbance attenuations

性能指标γ_0	控制器增益矩阵$\boldsymbol{K}$
0.53	[–89.0989 –864.2924]
0.55	[–9.9731 –100.5787]
0.60	[–3.0952 –34.2816]
0.70	[–1.2710 –16.6879]
0.80	[–0.7830 –11.9795]
0.90	[–0.5565 –9.7947]
1.0	[–0.4258 –8.5335]

在性能要求$\gamma_0=0.80$下, 依据推论3, 求解相应的优化问题(21), 可得不同鲁棒可靠性水平时的控制器增益矩阵如表2所示.

表 2 不同鲁棒可靠度时的控制器增益

Table 2 Gain matrices of controller with different robust reliabilities

鲁棒可靠度η_{cr}	控制器增益矩阵$\boldsymbol{K}$
0.001	[–0.7830 –11.9795]
1	[–0.9474 –18.4044]
2	[–1.0892 –25.0767]
3	[–1.3627 –33.3461]
3.6	[–3.1226 –60.5494]

若不考虑控制代价, 按式(19)优化求得的最优反

馈控制器增益矩阵为

$$K = 10^6 \times [-0.4009398 \quad -3.8797808].$$

相应的最优鲁棒H_∞性能指标为$\gamma = 0.52766$. 与性能指标约束为$\gamma_0 = 0.53$时的控制器增益矩阵相比较可看出, 这时的控制代价很大, 但对控制性能的改进已很小. 因此, 在控制器设计中, 控制性能、控制代价和鲁棒可靠性目标的同时实现有重要意义.

5 结论(Conclusion)

本文基于可靠性思想, 研究了参数化不确定时滞系统的H_∞鲁棒控制问题. 提出了不确定时滞系统H_∞控制的鲁棒可靠性方法. 利用LMI方法, 给出了基于鲁棒可靠性的不确定时滞系统的状态反馈最优H_∞控制器设计方法. 所设计的控制器可以在满足对所有不确定性鲁棒可靠的前提条件下具有最优的H_∞鲁棒性能, 或在满足鲁棒性能要求的前提下具有更高的鲁棒可靠性. 算例分析表明, 在控制器设计中, 控制性能、控制代价和鲁棒可靠性目标的同时实现有重要意义, 文中方法为其实现提供了可能.

参考文献(References):

[1] 俞立. 鲁棒控制—-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control – LMI Approaches*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[2] 史忠科, 吴方向, 王蓓, 等. 鲁棒控制理论[M]. 长沙: 国防工业出版社，2003.
(SHI Zhongke, WU Fangxiang, WANG Bei, et al. *Robust Control Theory* [M]. Changsha: National Defence Industry Press, 2003.)

[3] XIE L, FU M, SOUZA C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1253 – 1256.

[4] KOKAME H, KOBAYASHI H, MORI T. Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(2): 223 – 226.

[5] LEE Y S, MOON Y S, KWON W H, et al. Delay-dependent robust control for uncertain systems with a state-delay[J]. *Automatica*, 2004, 42(1): 65 – 72.

[6] 郑连伟, 刘晓平, 张庆灵. 具有时变不确定性的线性时滞系统的鲁棒H_∞控制[J]. 自动化学报，2001, 27(3): 377 – 380.
(ZHENG Lianwei, LIU Xiaoping, ZHANG Qingling. Robust H_∞ control for linear delay systems with time-varying uncertainties[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 377 – 380.)

[7] JEUNG E T, KIM J H, PARK H B. output feedback controllers for time delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(7): 971 – 974.

[8] MAHMOUD M S. New results on robust control design of discrete-time uncertain systems [J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(4): 453 – 459.

[9] GUO Shuxiang, LI Youxian. Robust reliability based H_∞ control of linear systems with uncertain parameters[C].// *Proc of 2005 Int Conf on Control and Automation*. Hungary, Budapest: Hungarian Academy of Science, 2005: 176 – 180.

[10] GUO Shuxiang, ZHANG Ling. Robust reliability method for quadratic stability analysis and stabilization of dynamic interval systems[C]//*Proc of 2005 Int Conf on Control and Automation*. Hungary, Budapest: Hungarian Academy of Science, 2005: 789 – 794.

作者简介:

郭书祥 (1964—), 男, 空军工程大学教授, 博士生导师, 曾在西安交通大学作博士后研究工作, 近期主要从事控制系统的可靠性及鲁棒控制等研究, E-mail: guoshuxiang66@163.com;

张 陵 (1957—), 男, 西安交通大学教授, 博士生导师, 重点建设与条件保障处处长, 近期主要从事复杂系统非线性动力学和振动控制等研究, E-mail: zhangl@mail.xjtu.edu.cn.