文章编号：1000−8152(2007)01−0025−07

一类退化系统目标跟踪学习控制的吸引流形方法

田森平[1]，谢胜利[2]，何 刚[1]

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640)

摘要: 针对一类退化系统目标跟踪的迭代学习控制问题进行了探讨. 这类系统不满足目前对迭代学习控制通常所要求的收敛性条件, 从而使得学习控制方法在这类系统上的应用遇到困难. 为了解决这类问题, 提出了一种新的设计方案—–吸引流形方法. 通过构造一个相应于所给系统稳定而吸引的流形, 且在构造的过程中同时设计出学习控制函数序列, 以使完成对所给期望目标的跟踪. 同时也讨论了这种方法的可实现问题. 另外, 该方法可无本质困难地应用到相应的非线性系统上.

关键词: 退化系统; 目标跟踪; 迭代学习控制; 吸引流形

中图分类号: TP273.2 **文献标识码**: A

Attractive manifold method for target tracking learning control of a class of degenerate systems

TIAN Sen-ping[1], XIE Sheng-li[2], HE Gang[1]

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;
2. Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The target tracking iterative learning control problem is discussed for a class of degenerate systems which do not satisfy the convergence condition. In this case, general learning control methods will suffer more or less difficulties when applying to this kind of systems. To solve this problem, we present a new method—attractive manifold method in which a stable and attractive manifold corresponding to the given system is constructed, and the learning control function sequence is designed simultaneously so as to realize the tracking of the expected target. We also study the feasibility of this newly presented method. In addition, the new method can also be applied to relevant nonlinear systems without any essential difficulties.

Key words: degenerate systems; target tracking; iterative learning control; attractive manifold

1 引言(Introduction)

迭代学习控制方法在一类具有较强的非线性耦合和较高的位置重复精度的动力学系统(例如工业机器人、数控机床等) 的控制中有着很好地应用[1~4]. 这种控制方法, 只是利用控制系统先前的控制经验, 根据测量系统的实际输出信号和期望信号, 来寻找一个理想的输入特征曲线, 使被控对象产生期望的运动. "寻找"的过程就是学习控制的过程. 而且在该学习过程中, 只需要测量实际输出信号和期望信号, 对被控对象的动力学描述和参数估计的复杂计算均可简化和省略. 因此, 这一控制方法已在控制理论领域引起了广泛的关注, 其应用不仅限制于机器人控制领域[5~7], 而且在非线性系统的鲁棒控制上也有了较大的发展[8~11]. 此外, 在离散系统、分布参数系统上有了相应的应用[12~15]. 这一控制方法正在逐步形成控制理论领域中的一个新方向.

目前, 在关于迭代学习控制算法的研究中, 一般都需要寻求"学习矩阵"使其满足一个一般性的收敛条件. 例如对线性连续系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \tag{1}$$

所寻求的迭代学习控制为

$$u_{k+1} = u_k + Le_k, k = 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

其中: $e_k = y_{\rm d} - y_k$, $y_{\rm d}$是期望输出, y_k是系统相应于第k次输入u_k的实际输出. L为要寻求的学习矩阵, 一般要求它满足

$$\|I - DL\| < 1或者\rho\,(I - DL) < 1. \tag{3}$$

其中$\rho(Q)$为矩阵Q的谱半径. 从条件(3)知, 所寻求

收稿日期: 2005−05−30; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674034).

的学习矩阵L应使得矩阵DL没有零特征值. 事实上, 设λ是矩阵$I-DL$的任一特征值, 由$\|I-DL\|<1$知, $|\lambda|<1$. 再设α是相应于λ的特征向量, 则有

$$(I-DL)\alpha=\lambda\alpha \text{或者} DL\alpha=(1-\lambda)\alpha, \tag{4}$$

这意味着$\bar{\lambda}=1-\lambda$是矩阵DL的一个特征值, 即$\bar{\lambda}=\lambda_{DL}$. 由于$\left|\bar{\lambda}-1\right|=|\lambda|<1$, 故$\bar{\lambda}\neq 0$.

若给定的矩阵D具有如下特殊形式

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

则无论怎样的L, 都不能使得矩阵DL没有零特征值. 因为

$$DL=\begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} D_{11}L_{11} & D_{11}L_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

必有零特征值.

此时, 在(1)中相应于(5)的输出为

$$\begin{cases} y_1=C_{11}x_1+C_{12}x_2+D_{11}u_1, \\ y_2=C_{21}x_1+C_{22}x_2. \end{cases} \tag{6}$$

对应的系统为部分非正则系统, 已有的一些研究成果[16~18]要么是给出含有输出误差导数的D-型学习律, 要么是在一定条件下给出的P-型学习律. 本文针对形如(1)的线性连续系统, 提出了一种新的设计方法—吸引流形方法. 通过构造一个相应于所给系统稳定而吸引的流形S, 且在构造的过程中同时设计出学习控制函数序列$\{u_k(t)\}$, 以使完成对所给期望目标的跟踪. 同时也讨论了这种方法的可实现问题. 另外, 该方法可无本质困难的应用到相应的非线性系统上. 限于篇幅, 对此将另文讨论.

2 解决问题的基本思路(Basic idea on solving the problem)

在系统(1)中, 若输入矩阵B是列满秩的, 则存在非奇异变换$Z=Tx$, 将系统(1)的状态方程转化为如下形式

$$\begin{cases} \dot{Z}_1=A_{11}Z_1+A_{12}Z_2, \\ \dot{Z}_2=A_{21}Z_1+A_{22}Z_2+B_1u. \end{cases} \tag{7}$$

其中B_1是可逆的.

为了简便起见, 不妨设系统(1)具有如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}=A_{11}x^{(1)}+A_{12}x^{(2)}, \\ \dot{x}^{(2)}=A_{21}x^{(1)}+A_{22}x^{(2)}+Bu^{(2)}, \\ y^{(1)}=C_{11}x^{(1)}+C_{12}x^{(2)}+Du^{(1)}, \\ y^{(2)}=C_{21}x^{(1)}+C_{22}x^{(2)}. \end{cases} \tag{8}$$

其中: $x=\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix}$, 且$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$是不确定的有界矩阵.

现在的问题归结为, 对给定的期望输出$y_{\rm d}(t)=\begin{pmatrix} y_{\rm d}^{(1)}(t) \\ y_{\rm d}^{(2)}(t) \end{pmatrix}$, 要寻求学习控制$u_k(t)=\begin{pmatrix} u_k^{(1)}(t) \\ u_k^{(2)}(t) \end{pmatrix}$, 使得

1) $u_k^{(1)}(t), u_k^{(2)}(t)$在$t\in[0,T]$上收敛;

2) 对$t\in[0,T]$, 当$k\to\infty$时有,

$$e_k(t)=\begin{pmatrix} e_k^{(1)}(t) \\ e_k^{(2)}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{\rm d}^{(1)}(t)-y_k^{(1)}(t) \\ y_{\rm d}^{(2)}(t)-y_k^{(2)}(t) \end{pmatrix}\to 0.$$

其中$y_k(t)=\begin{pmatrix} y_k^{(1)}(t) \\ y_k^{(2)}(t) \end{pmatrix}$是相应于第$k$次输入$u_k(t)=\begin{pmatrix} u_k^{(1)}(t) \\ u_k^{(2)}(t) \end{pmatrix}$的实际输出.

前面已经分析形如(8)的系统不满足"一般性收敛条件", 故目前的已有方法对此遇到困难. 采用"吸引流形"方法, 其大致思路如下:

设计一个低维流形S:

$$S=\{(y_1,y_2)\,|C_1y_1+C_2y_2=0\}. \tag{9}$$

使得当$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))$限制在流形$S$上时, 即

$$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S \text{或者} C_1e_k^{(1)}(t)+C_2e_k^{(2)}(t)=0. \tag{10}$$

有

$$\lim_{k\to\infty}e_k^{(1)}(t)=\lim_{k\to\infty}e_k^{(2)}(t)=0. \tag{11}$$

而当$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))$在流形$S$之外时, 都存在流形$S$的r-流形域$S_r$:

$$S_r=\{(y_1,y_2)\,|\,\|C_1y_1+C_2y_2\|<r\}. \tag{12}$$

使得对某个正数K, 当$k\geqslant K$时, 有

$$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S_r,\quad t\in[0,T]. \tag{13}$$

其中: $\|\cdot\|$为向量范数, r为域宽, $K=K(r)$随r的减小而增大, 且$r\to 0$时, $K\to\infty$.

由于在流形S上, 有式(11)成立, 故称流形S是相应于系统(8)的稳定流形. 而不在流形S上的$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))$, 对任意的$r>0$, 存在$K>0$, 当$k>K$时, 有$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S_r$, 故流形$S$相应于系统(8)是吸引的.

从而称S是相应于系统(8)的一个稳定吸引流形.

这样问题1) 2)归结为: 对系统(8)寻求收敛的学习控制序列$u_k^{(1)}(t), u_k^{(2)}(t)$和稳定的吸引流形$S$.

在具体的寻求过程中, 是选择$u_k^{(1)}(t)$, $u_k^{(2)}(t)$使得流形S是稳定的和吸引的; 当然, 在选择$u_k^{(1)}(t)$, $u_k^{(2)}(t)$满足上述要求的同时, 要调整流形S的"形态", 即调整C_1, C_2使之适应要求. 也就是说, 在寻求的过程中, $u_k^{(1)}(t)$, $u_k^{(2)}(t)$和S是同时进行、相互适应以达到目标的.

3 稳定流形的设计(Design of the stable manifold)

在这一节里, 要设计一个稳定流形S, 且同时要确定出学习控制序列$\{u_k^{(1)}(t)\}$.

对系统(8), 设其初值条件为

$$x(0)=\begin{pmatrix}x^{(1)}(0)\\ x^{(2)}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0^{(1)}\\ x_0^{(2)}\end{pmatrix}=x_0. \tag{14}$$

与通常一样, 假设系统每次输入的状态$x_k(t)$都通过系统给定的初始点, 即

$$x_k(0)=\begin{pmatrix}x_k^{(1)}(0)\\ x_k^{(2)}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0^{(1)}\\ x_0^{(2)}\end{pmatrix}=x_0,\ k=1,2,\cdots \tag{15}$$

或者更宽一些的条件

$$\|x_{k+1}(0)-x_k(0)\|\leqslant lh^k, h\in[0,1). \tag{16}$$

当$h=0$时, 条件(16)就是条件(15).

设

$$S=\{(y_1,y_2)\,|C_1y_1+C_2y_2=0\}. \tag{17}$$

是待定的流形, 即C_1, C_2是待定的.

从而当

$$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S,\forall t\in[0,T] \tag{18}$$

时, 有

$$C_1e_k^{(1)}(t)+C_2e_k^{(2)}(t)=0,\forall t\in[0,T]. \tag{19}$$

若选择

$$u_{k+1}^{(1)}(t)=u_k^{(1)}(t)+L_1e_k^{(1)}(t),k=1,2,\cdots \tag{20}$$

则有

$$\begin{aligned}&e_{k+1}^{(1)}(t)=\\&e_k^{(1)}(t)-(y_{k+1}^{(1)}(t)-y_k^{(1)}(t))=\\&(I-DL_1)e_k^{(1)}(t)-C_{11}(x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t))-\\&C_{12}(x_{k+1}^{(2)}(t)-x_k^{(2)}(t)),\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&e_{k+1}^{(2)}(t)=\\&e_k^{(2)}(t)-(y_{k+1}^{(2)}(t)-y_k^{(2)}(t))=\\&e_k^{(2)}(t)-C_{21}(x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t))-\\&C_{22}(x_{k+1}^{(2)}(t)-x_k^{(2)}(t)).\end{aligned} \tag{22}$$

于是有

定理 1　若$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S$, 则有如下关系式成立

$$e_{k+1}^{(1)}(t)=G_ie_k^{(1)}(t)+F_i(x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)),i=1,2. \tag{23}$$

其中:

$$\begin{aligned}&G_1=I-(I-C_{12}\hat C_2^{-1}C_1)DL_1,\\&G_2=I-(I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)^{-1}DL_1,\\&F_1=-C_{11}+C_{12}\hat C_2^{-1}\hat C_1,\\&F_2=(I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)^{-1}(-C_{11}+C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}),\\&\hat C_1=C_1C_{11}+C_2C_{21},\\&\hat C_2=C_1C_{12}+C_2C_{22}.\end{aligned}$$

证　因为$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S$, 即式(19)成立, 从而

$$C_1(e_{k+1}^{(1)}(t)-e_k^{(1)}(t))+C_2(e_{k+1}^{(2)}(t)-e_k^{(2)}(t))=0. \tag{24}$$

将式(21)和式(22)代入式(24)不难推导

$$\begin{aligned}&-C_1DL_1e_k^{(1)}=\\&(C_1C_{11}+C_2C_{21})(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})+\\&(C_1C_{12}+C_2C_{22})(x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)})=\\&\hat C_1(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})+\hat C_2(x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}).\end{aligned} \tag{25}$$

故有

$$x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}=-\hat C_2^{-1}\hat C_1(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})-\hat C_2^{-1}C_1DL_1e_k^{(1)}. \tag{26}$$

将式(26)代入式(21)有

$$\begin{aligned}e_{k+1}^{(1)}=&(I-DL_1+C_{12}\hat C_2^{-1}C_1DL_1)e_k^{(1)}+\\&(-C_{11}-C_{12}\hat C_2^{-1}\hat C_1)(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})=\\&G_1e_k^{(1)}+F_1(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}).\end{aligned} \tag{27}$$

从而$i=1$时, 结论得证.

当C_{22}可逆时, 由式(22)及式(24)有

$$\begin{aligned}&x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}=\\&-C_{22}^{-1}(e_{k+1}^{(2)}-e_{\rm k}^{(2)})-C_{22}^{-1}C_{21}(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})=\\&C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1(e_{k+1}^{(1)}-e_k^{(1)})-C_{22}^{-1}C_{21}(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}).\end{aligned} \tag{28}$$

将式(28)代入式(21)有

$$\begin{aligned}&e_{k+1}^{(1)}=\\&(I-DL_1)e_k^{(1)}-C_{11}(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})-C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1\\&(e_{k+1}^{(1)}-e_k^{(1)})+C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}).\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&(I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)e_{k+1}^{(1)}=\\&(I-DL_1+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)e_{\rm k}^{(1)}+\end{aligned}$$

$$(-C_{11}+C_{12}C_{22}^{-1}C_{21})(x_{k+1}^{(1)}-x_{\rm k}^{(1)}). \quad (29)$$

从而

$$\begin{aligned}&e_{k+1}^{(1)}=\\&[I-(I-C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)^{-1}DL_1]e_k^{(1)}+\\&F_2(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)})=\\&G_2e_k^{(1)}+F_2(x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}),\end{aligned} \quad (30)$$

即$i=2$时, 结论成立. 证毕.

在G_1中, 要求待定的C_1, C_2使得$\hat{C}_2$可逆; 在G_2中要求C_{22}可逆, 且待定的C_1, C_2要使得$I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1$可逆.

由式(23)可知, 要获得$e_k^{(1)}(t)$的估计, 先要估计$\|x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)\|$. 为此, 有

定理 2 在$i=1,2$的情形下, $\|x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)\|$满足如下估计

$$\begin{aligned}&\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda\leqslant\\&\frac{1}{1-h_1(i)}\|x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)\|+\frac{h_2(i)}{1-h_1(i)}\|e_k^{(1)}\|_\lambda.\end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$\begin{aligned}&h_1(1)=(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}\hat{C}_1\|,\\&h_2(1)=(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}C_1DL_1\|,\\&h_1(2)=(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\|A_{12}M_1\|,\\&h_2(2)=(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\|A_{12}M_2\|,\\&M_1=-C_{22}^{-1}C_{21}+C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1F_2,\\&M_2=-C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1\left(I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1\right)^{-1}DL_1.\end{aligned}$$

证 由系统(8)有

$$\begin{aligned}&x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)=\\&(x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0))\mathrm{e}^{A_{11}t}+\\&\int_0^t e^{A_{11}(t-s)}A_{12}(x_{k+1}^{(2)}(s)-x_k^{(2)}(s))\mathrm{d}s.\end{aligned} \quad (32)$$

当$i=1$时, 由式(26)有

$$\begin{aligned}&x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)=\\&(x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0))\mathrm{e}^{A_{11}t}-\\&\int_0^t\mathrm{e}^{A_{11}(t-s)}A_{12}\hat{C}_2^{-1}[\hat{C}_1(x_{k+1}^{(1)}(s)-x_k^{(1)}(s))+\\&C_1DL_1\mathrm{e}_k^{(1)}(s)]\mathrm{d}s.\end{aligned} \quad (33)$$

从而

$$\begin{aligned}&\|x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\leqslant\\&\|x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)\|\mathrm{e}^{-(\lambda-\|A_{11}\|)t}+\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda-\|A_{11}\|)(t-s)}\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}\hat{C}_1\|\times\\&\|x_{k+1}^{(1)}(s)-x_k^{(1)}(s)\|\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s+\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda-\|A_{11}\|)(t-s)}\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}C_1DL_1\|\times\\&\|e_k^{(1)}(s)\|\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{d}s\leqslant\\&\|x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)\|+(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\times\\&\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}\hat{C}_1\|\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\\&(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}\|A_{12}\hat{C}_2^{-1}C_1DL_1\|\|e_k^{(1)}\|_\lambda.\end{aligned} \quad (34)$$

故有

$$\begin{aligned}&\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda\leqslant\\&\frac{1}{1-h_1(1)}\|x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)\|+\frac{h_2(1)}{1-h_1(1)}\|e_k^{(1)}\|_\lambda.\end{aligned} \quad (35)$$

从而在$i=1$时, 结论得证.

当$i=2$时, 由式(30)可得

$$\begin{aligned}&e_{k+1}^{(1)}(t)-e_k^{(1)}(t)=\\&-(I+C_{12}C_{22}^{-1}C_2^{-1}C_1)^{-1}DL_1e_k^{(1)}(t)+\\&F_2(x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)).\end{aligned} \quad (36)$$

将式(36)代入式(28)计算得

$$\begin{aligned}&x_{k+1}^{(2)}(t)-x_k^{(2)}(t)=\\&M_2e_k^{(1)}(t)+M_1(x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)).\end{aligned} \quad (37)$$

再将式(37)代入式(32)有

$$\begin{aligned}&x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)=\\&(x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0))\mathrm{e}^{A_{11}t}+\\&\int_0^t e^{A_{11}(t-s)}A_{12}[M_1(x_{k+1}^{(1)}(s)-x_k^{(1)}(s))+\\&M_2e_k^{(1)}(s)]\mathrm{d}s.\end{aligned} \quad (38)$$

类似于式(34)和式(35)的推导有

$$\begin{aligned}&\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda\leqslant\\&\frac{1}{1-h_1(2)}\|x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)\|+\\&\frac{h_2(2)}{1-h_1(2)}\|e_k^{(1)}\|_\lambda.\end{aligned} \quad (39)$$

证毕.

虽然矩阵A_{ij}是不确定的, 但它们一定是有界的. 从而一定能找到适当大的λ, 使得$h_1(i)<1$, 而$h_2(i)$适当小.

定理 3 若对系统(8), 能选择C_1, C_2, L_1使得$\|G_i\|+h<1$(或$\rho(G_i)+h<1$), $i=1,2$; 则当$(e_k^{(1)}(t),e_k^{(2)}(t))\in S$时, 有

$$\lim_{k\to\infty}e_k^{(1)}(t)=\lim_{k\to\infty}e_k^{(2)}(t)=0,t\in[0,T].$$

即流形S是相应于系统(8)的稳定流形. 其中h是式

(16)中给定的.

证　由式(23)有

$$\|e_{k+1}^{(1)}(t)\| \leqslant \|G_i\|\|e_k^{(1)}(t)\| + \|F_i\|\|x_{k+1}^{(1)}(t) - x_k^{(1)}(t)\|, \quad i = 1,2. \tag{40}$$

又$\|G_i\| + h < 1$, 则对适当大的λ, 有

$$l_i = \|G_i\| + \frac{\|F_i\|h_2(i)}{1-h_1(i)} + h < 1. \tag{41}$$

其中$h_j(i)(i,j=1,2)$是由定理2中所给出的相应常数.

对如上选取的λ, 有

$$\|e_{k+1}^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant \|G_i\|\|e_k^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t} + \|F_i\|\|x_{k+1}^{(1)}(t) - x_k^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant \|G_i\|\|e_k^{(1)}\|_\lambda + \|F_i\|\|x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}\|_\lambda. \tag{42}$$

再将在定理2中对$\|x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}\|$的估计式(31)代入可得

$$\|e_{k+1}^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t} \leqslant (l_i - h)\|e_k^{(1)}\|_\lambda + \frac{\|F_i\|}{1-h_1(i)} lh^k. \tag{43}$$

从而

$$\|e_{k+1}^{(1)}\|_\lambda \leqslant (l_i - h)\|e_k^{(1)}\|_\lambda + \frac{\|F_i\|}{1-h_1(i)} lh^k. \tag{44}$$

故

$$\|e_k^{(1)}\|_\lambda \leqslant (l_i-h)^k\|e_1^{(1)}\|_\lambda + \sum_{j=1}^{k-1}(l_i-h)^{k-j-1}\frac{\|F_i\|}{1-h_2(i)}lh^j \leqslant (l_i-h)^k\|e_1^{(1)}\|_\lambda + \frac{\|F_i\|}{1-h_2(i)}lh^{-1}[(l_i-h)+h]^{k-1}. \tag{45}$$

由$l_i < 1$知, 存在$\xi > 1$使得$\xi l_i < 1$, 故由式(45)有

$$\|e_k^{(1)}\|_\lambda \xi^k \leqslant \|e_1^{(1)}\|_\lambda + \frac{\|F_i\|}{1-h_2(i)} lh^{-1}\xi. \tag{46}$$

因此

$$\|e_k^{(1)}\|_\lambda \leqslant (\|e_1^{(1)}\|_\lambda + \frac{\|F_i\|}{1-h_2(i)} lh^{-1}\xi)\xi^{-k}. \tag{47}$$

由于$\xi > 1$, 故有

$$\lim_{k\to\infty}\|e_k^{(1)}(t)\| = 0, t\in[0,T].$$

再由$(e_k^{(1)}(t), e_k^{(2)}(t)) \in S$, 知

$$e_k^{(2)}(t) = -C_2^{-1}C_1e_k^{(1)}(t), t\in[0,T], k=1,2,\cdots,$$

故有

$$\lim_{k\to\infty}\|e_k^{(2)}(t)\| = 0,\ t\in[0,T].$$

从而定理3证毕.

4　流形的吸引性(Attraction of the manifold)

在上一节, 设计了一个相应于系统(8)的稳定流形S, 剩下还要进一步的使得S相应于系统(8)是吸引的. 注意, 在稳定流形S的设计中, 只用到了$u_k^{(1)}(t)$, 现在要选择$u_k^{(2)}(t)$使得S是吸引的.

记

$$S_k(t) = C_1e_k^{(1)}(t) + C_2e_k^{(2)}(t), t\in[0,T], k=1,2,\cdots, \tag{48}$$

从而, 要去证明: 对任意的$r > 0$, 存在$K > 0$, 当$k > K$时有

$$\|S_k(t)\| \leqslant r,\ t\in[0,T]. \tag{49}$$

因为

$$\begin{aligned}&S_{k+1}(t) = \\&C_1e_{k+1}^{(1)}(t) + C_2e_{k+1}^{(2)}(t) = \\&S_k(t) - (C_1C_{11}+C_2C_{21})(x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}) - \\&(C_1C_{12}+C_2C_{22})(x_{k+1}^{(2)} - x_k^{(2)}) - \\&C_1DL_1e_k^{(1)}(t) = \\&S_k(t) - C_1DL_1e_k^{(1)}(t) - \hat{C}_1(x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}) - \\&\hat{C}_2[x_{k+1}^{(2)}(0) - x_k^{(2)}(0) + \\&\int_0^t A_{21}(x_{k+1}^{(1)}(s) - x_{\mathrm{k}}^{(1)}(s))\mathrm{d}s] - \\&\hat{C}_2[\int_0^t A_{22}(x_{k+1}^{(2)}(s) - x_k^{(2)}(s))\mathrm{d}s + \\&\int_0^t B(u_{k+1}^{(2)}(s) - u_{\mathrm{k}}^{(2)}(s))\mathrm{d}s].\end{aligned} \tag{50}$$

其中: $\hat{C}_1 = C_1C_{11} + C_2C_{21}, \hat{C}_2 = C_1C_{12} + C_2C_{22}$.

若选取$u_k^{(2)}(t)$满足

$$\hat{C}_2B\int_0^t(u_{k+1}^{(2)}(s) - u_{\mathrm{k}}^{(2)}(s))\mathrm{d}s = HC_2e_k^{(2)}(t). \tag{51}$$

其中

$$H = \begin{cases}DL_1, & C_1DL_1 = DL_1C_1 \\ & (\text{即}C_1\text{与}DL_1\text{可交换}), \\ C_1DQC_1^{-1}, & C_1\text{可逆}.\end{cases}$$

则式(50)可化为

$$\begin{aligned}&S_{k+1}(t) = \\&(I-H)S_k(t) - \hat{C}_1(x_{k+1}^{(1)}(0) - x_{\mathrm{k}}^{(1)}(0))\mathrm{e}^{A_{11}t} - \\&\hat{C}_2(x_{k+1}^{(2)}(0) - x_k^{(2)}(0)) - \\&\hat{C}_1\int_0^t \mathrm{e}^{A_{11}(t-s)}A_{12}(x_{k+1}^{(2)}(s) - x_k^{(2)}(s))\mathrm{d}s - \\&\hat{C}_2\int_0^t A_{21}(x_{k+1}^{(1)}(s) - x_k^{(1}(s))\mathrm{d}s - \\&\hat{C}_2\int_0^t A_{22}(x_{k+1}^{(2)}(s) - x_k^{(2)}(s))\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{52}$$

故

$$\|S_{k+1}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\leqslant$$
$$\|I-H\|\|S_k\|_\lambda+m_1h^k+(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}m_2$$
$$(\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda). \tag{53}$$

其中:

$$m_1=(|\hat{C}_1|+|\hat{C}_2|)l,$$
$$m_2=\max\{\|\hat{C}_1\|\|A_{12}\|,\|\hat{C}_2\|\|A_{21}\|,\|\hat{C}_2\|\|A_{22}\|\}.$$

从而要估计$\|S_k(t)\|$, 就得先估计出

$$\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda.$$

对此有

定理 4 若C_1,C_2使得$\hat{C}_2=C_1C_{12}+C_2C_{22}$可逆, 则当选取$\{u_k^{(2)}(t)\}$满足式(51)时, 有

$$\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda\leqslant$$
$$2(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}lh^k+(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}\|\hat{C}_2^{-1}HC_2\|\|S_k\|_\lambda. \tag{54}$$

其中$m_3=\max\{\|A_{11}\|+\|A_{21}\|,\|A_{12}\|+\|A_{22}\|\}$.

证 由系统(8)有

$$x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)=$$
$$x_{k+1}^{(1)}(0)-x_k^{(1)}(0)+\int_0^t[A_{11}(x_{k+1}^{(1)}(s)-x_k^{(1)}(s))+$$
$$A_{12}(x_{k+1}^{(2)}(s)-x_k^{(2)}(s))]\mathrm{d}s \tag{55}$$

和

$$x_{k+1}^{(2)}(t)-x_k^{(2)}(t)=$$
$$x_{k+1}^{2}(0)-x_k^{(2)}(0)+\int_0^t[A_{21}(x_{k+1}^{(1)}(s)-x_k^{(1)}(s))+$$
$$A_{22}(x_{k+1}^{(2)}(s)-x_k^{(2)}(s))]\mathrm{d}s+\hat{C}_2^{-1}HC_2S_k(t). \tag{56}$$

从而由式(55)和式(56)分别可得

$$\|x_{k+1}^{(1)}(t)-x_k^{(1)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\leqslant$$
$$lh^k+\frac{1}{\lambda}\|A_{11}\|\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\frac{1}{\lambda}\|A_{12}\|\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda. \tag{57}$$

及

$$\|x_{k+1}^{(2)}(t)-x_k^{(2)}(t)\|\mathrm{e}^{-\lambda t}\leqslant$$
$$lh^k+\|\hat{C}_2^{-1}HC_2\|\|S_k\|_\lambda+\frac{1}{\lambda}\|A_{21}\|\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+$$
$$\frac{1}{\lambda}\|A_{22}\|\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(1)}\|_\lambda. \tag{58}$$

由式(57)和式(58)有

$$\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda\leqslant$$
$$2lh^k+\frac{1}{\lambda}m_3(\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda)+$$
$$\|\hat{C}_2^{-1}HC_2\|\|S_k\|_\lambda. \tag{59}$$

故有

$$\|x_{k+1}^{(1)}-x_k^{(1)}\|_\lambda+\|x_{k+1}^{(2)}-x_k^{(2)}\|_\lambda\leqslant$$
$$2(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}lh^k+(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}\|\hat{C}_2^{-1}HC_2\|\|S_k\|_\lambda. \tag{60}$$

这就是要证明的结论.

将估计式(54)代入式(53)有

$$\|S_{k+1}\|_\lambda=$$
$$(\|I-H\|+m_4(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1})\|S_k\|_\lambda+m_5h^k. \tag{61}$$

其中:

$$m_4=m_2(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}\|\hat{C}_2^{-1}HC_2\|,$$
$$m_5=m_1+2m_2l(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}(1-\frac{m_3}{\lambda})^{-1}.$$

若所选取的矩阵H满足

$$\|I-H\|+h<1, \tag{62}$$

则对适当大的λ, 有$\rho+h<1$. 其中$\rho=\|I-H\|+m_4(\lambda-\|A_{11}\|)^{-1}$. 再由式(61)可得

$$\|S_k\|_\lambda\leqslant\rho^k\|S_1\|_\lambda+m_5\sum_{j=1}^{k-1}\rho^{k-j-1}h^j\leqslant$$
$$\rho^k\|S_1\|_\lambda+m_5h^{-1}(\rho+h)^{k-1}. \tag{63}$$

因$\rho+h<1$, 则存在$\xi>1$, 使得$\xi(\rho+h)<1$, 用此ξ乘式(63)的两边有

$$\|S_k\|_\lambda\xi^k\leqslant$$
$$(\rho\xi)^k\|S_1\|_\lambda+m_5(h\xi)^{-1}[\xi(\rho+h)]^{k-1}\leqslant$$
$$\|S_1\|_\lambda+m_5(h\xi)^{-1}. \tag{64}$$

故有

$$\|S_k\|_\lambda\leqslant[\|S_1\|_\lambda+m_5(h\xi)^{-1}]\xi^{-k}. \tag{65}$$

从而

$$\|S_k(t)\|\leqslant[(\|S_1\|_\lambda+m_5(h\xi)^{-1})\mathrm{e}^{\lambda T}]\xi^{-k},$$
$$\forall t\in[0,T]. \tag{66}$$

由$\xi>1$, 从式(66)便不难导出式(49), 即流形S是吸引的.

由此, 可得

定理 5 若C_1,C_2使得$\hat{C}_2=C_1C_{12}+C_2C_{22}$可逆, 且$H$使得$\|I-H\|+h<1$, 则当$\{u_k^{(2)}(t)\}$满足式(51), 即

$$u_{k+1}^{(2)}(t)=u_k^{(2)}(t)+(\hat{C}_2B)^{-1}HC_2\dot{e}_k^{(2)}(t) \tag{67}$$

时, 流形S对系统(8)是吸引的.

5 简单讨论(Brief remarks)

由定理3知, 对给定的C_{12}, C_{22}和D, 选取C_1, C_2和L_1使得$\hat{C}_2=C_1C_{12}+C_2C_{22}$可逆, 且$\|G_1\|+$

$h < 1$, 则流形$\boldsymbol{S}$对系统(8)是稳定的. 而由定理5知, 所选取的C_1, C_2和L_1还要满足$\|I-H\| + h < 1$及C_1与DL_1可交换或者C_1可逆. 这样$\boldsymbol{S}$才是系统(8)的稳定吸引流形. 自然要问, 定理3和定理5的条件是否兼容? 即对给定的矩阵C_{12}, C_{22}和D能否找到矩阵C_1, C_2和L_1使得所有要求都满足?

回答是肯定的, 例如当C_{22}与D可逆时, 就可具体找到.

不妨设$h = 0$, 若不然的话, 以$h^* = 1-h$代替1即可.

1) 因D可逆, 取$L_1 = aD^{-1}$, $0 < a < 2$是常数; 从而$DL_1 = aI$, 则C_1与DL_1可交换.

2) 取$C_2 = bI, b > 0$, 从而C_2可逆; $H = DL_1 = aI$, 故有$\|I-H\| = \|I-aI\| < 1$;

3) 取C_1使得$\|P\| < 1$或$\rho(P) < 1$. 其中$P = I - a(I - b^{-1}C_{12}C_{22}^{-1}C_1)^{-1}$. 则有$\|G_2\| < 1$或者$\rho(G_2) < 1$.

如上所选取的C_1, C_2和L_1满足定理3和定理5中的所有要求. 在这种情形下, 所提出的迭代学习控制算法为

$$u_{k+1}^{(1)}(t) = u_k^{(1)}(t) + aD^{-1}e_k^{(1)}(t), k = 1, 2, \cdots, \tag{68}$$

$$u_{k+1}^{(2)}(t) = u_k^{(2)}(t) + ab(\hat{C}_2B)^{-1}\dot{e}_k^{(2)}(t), k = 1, 2, \cdots. \tag{69}$$

其中: $0 < a < 2, b > 0$.

从前面的讨论中还知, $A_{ij}(i, j = 1, 2)$, C_{11}, C_{21}除了有界性的要求以外, 没有任何其它要求, 这说明迭代学习控制算法(68) (69)对它们有很强的鲁棒性能, 且很容易将这些结果推广到相应的非线性系统上.

6　结束语(Conclusion)

本文所讨论的系统, 不满足目前迭代学习控制研究中所要求的一般性条件, 从而通常的迭代学习控制方法遇到困难. 通过构造一个相应于所给系统稳定而吸引的流形S, 导出满足要求的迭代学习控制算法. 在讨论中, 可以看到, 流形S的构造和学习控制的设计是交错进行的, S的构造中需要$\{u_k(t)\}$的信息, 而$\{u_k(t)\}$的确定也要满足S的一些要求, 但最终的设计结果确是兼容的. 虽然本文讨论的只是线性系统, 但这一方法可毫无困难地应用于相应的非线性系统上.

参考文献(References):

[1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *J Robotic Syst*, 1984, 1(2): 123 – 140.

[2] PARK B H, KUC T Y, LEE J. Adaptive learning control of uncertain robotic systems[J]. *Int J Control*, 1996, 65(5): 725 – 744.

[3] 姚仲舒, 王宏飞, 杨成梧. 一种机器人轨迹跟踪的迭代学习控制方法[J]. 兵工学报, 2004, 25(3): 330 – 334.
(YAO Zhongsu, WANG Hongfei, YANG Chengwu. A sort of iterative learning control algorithm for tracking of robot trajectory[J]. *Acta Armamentarii*, 2004, 25(3): 330 – 334.)

[4] 孙明轩, 陈阳泉, 黄宝健. 非线性时滞系统的高阶迭代学习控制[J]. 自动化学报, 1994, 20(3): 360 – 365.
(SUN Mingxuan, CHEN Yangquan, HUANG Baojian. Robust higher order iterative learning control algorithm for tracking control of delayed repeated systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(3): 360 – 365.)

[5] WANG D. A simple iterative learning controller for manipulators with flexible joints[J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1341 – 1344.

[6] WANG D, SOH Y C, CHEAH C C. Robust motion and force control of constrained manipulators by learning[J]. *Automatica*, 1995, 31(2): 1257 – 262.

[7] 杨胜跃, 罗安, 樊晓平. 不确定性机器人系统自适应鲁棒迭代学习控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(5): 707 – 712.
(YANG Shengyue, LUO An, FAN Xiaoping. Adaptive robust iterative learning control for uncertain robotic systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 707 – 712.)

[8] TAYEBI A, ZAREMBA M B. Comments on 'Robust iterative learning control design is straightforward for uncertain LTI systems satisfying the robust performance condition'[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2303 – 2303.

[9] CHIEN C J, LIU J S. A P-type iterative learning controller for robust output tracking of nonlinear time-varying systems[J]. *Int J Control*, 1996, 64(2): 319 – 334.

[10] 孙明轩, 万伯任. 非线性系统高阶迭代学习算法[J]. 控制与决策, 1994, 9(3): 195 – 199.
(SUN Mingxuan, WAN Boren. High-order iterative learning algorithm for nonlinear dynamical systems[J]. *Control and Decision*, 1994, 9(3): 195 – 199.)

[11] 王建国, 阮小娥. 工业过程迭代学习算法的鲁棒性[J]. 工程数学学报, 2004, 21(1): 127 – 130.
(WANG Jianguo, RUAN Xiaoe. Robustness of iterative learning algorithm for industrial processes[J]. *J of Engineer Mathematics*, 2004, 21(1): 127 – 130.)

[12] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence[J]. *IEE Proc: Control Theory and Applications*, 1996, 143(2): 217 – 224.

[13] 谢振东, 谢胜利, 刘永清. 离散系统跟踪控制的学习算法及其收敛性[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(10): 45 – 48.
(XIE Zhendong, XIE Shengli, LIU Yongqing. Learning algorithm and convergence of tracking control for discrete systems[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1998, 20(10): 45 – 48.)

[14] 谢胜利, 谢振东, 韦岗. 非线性分布参数系统目标跟踪的学习控制算法[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 627 – 632.
(XIE Shengli, XIE Zhendong, WEI Gang. Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 627 – 632.)

[15] 孙丽丽, 徐进学. PID 型离散系统迭代学习控制参数的优化设计[J]. 沈阳工业大学学报, 2004, 26(4): 415 – 418.
(SUN Lili, XU Jinxue. Optimal parameter design for PID type discrete system iterative learning control[J]. *J of Shenyang University of Technology*, 2004, 26(4): 415 – 418.)

(下转第45页)