

基于有向网络的智能群体群集运动控制

俞 辉^{1,2}, 王永骥¹, 程 磊¹

(1. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074; 2. 三峡大学 非线性与复杂系统研究所, 湖北 宜昌 443002)

摘要: 对具有二次积分动态的智能群体 (flock/swarm), 在有向网络取得群集运动 (flocking/swarming) 进行了研究. 提出了一个分散控制方法对智能群体进行分散控制. 用有向图模型表示智能体之间的相互作用及通信关系. 对固定的网络拓扑, 控制互连拓扑是固定的, 时不变的, 运用传统的LaSalle不变集原理, 代数图论的有关技巧进行了稳定性分析, 并得到以下主要结论: i) 智能群体速度方向渐进收敛, 并保持方向一致; ii) 智能群体速度大小渐进收敛, 并保持大小相等; iii) 有邻接关系的智能体 (Agent) 之间没有碰撞发生; iv) 智能群体的势场函数被最小化. 理论分析显示, 有向图的弱连通性及一种称为平衡图的有向图在系统的稳定性分析中扮演着关键角色. 最后, 给出了一个仿真例子对理论结果进行了验证.

关键词: 智能群体; 群集运动; 有向图; 平衡图; 代数图论

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Flocking motion control of flock in directed networks

YU Hui^{1,2}, WANG Yong-ji¹, CHENG Lei¹

(1. Department of Control Science & Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan Hubei 430074, China;

2. Institute of Nonlinear and Complex Systems, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China)

Abstract: Flock with double integrator dynamics to achieve flocking motion formation in directed networks is studied in this paper. A class of decentralized control laws for a flock of mobile agents is proposed. The interaction and/or communication relationship between agents is modeled by directed graph. In fixed network topology, the topology of control interconnection is fixed and time invariant. The stability analysis is achieved by using classical LaSalle's invariant principle and the analytical techniques of algebraic graph theory, which results in: i) global alignment of their velocity vectors, ii) convergence of their speeds to a common speed, iii) collisions between interconnected agents avoidance, and iv) minimization of the potential function of flock. Theoretical analysis show that the weak connectedness of directed graph and a class of directed graphs, called balanced graphs, play a crucial role in stability analysis. Finally, a simulation example is given to validate the theoretical results.

Key words: flock/swarm; flocking/swarming; directed graph; balance graph; algebraic graph theory

1 引言(Introduction)

近几十年来,智能群体 (flock/swarm) 的协调控制问题引起了研究人员的极大关注. 最近在通信, 计算技术, 以及相关问题在生物学, 社会行为学, 统计物理, 计算机图形学方面的进展, 大大推动了此领域的研究. 研究人员试图弄明白, 自主运动的生物, 比如鸟群、鱼群、人群^[1,2]或者是人造自主运动的智能体 (Agent), 怎样能够在没有集中协调的情况下保持群集运动 (flocking/swarming) 编队.

智能群体群集运动的工程运用包括多小车环境探测, 运输以及执行军事任务, 比如侦查, 监视以及用无人机 (UAVs) 参与作战任务. 群集运动是智能群体通过自组织网络完成协调任务的来自自然界的一

个例子.

1986年, Reynolds^[3]提出了一个模仿动物集结的计算机模型, Reynolds 的模型基于如下3条启发式规则:

- 1) 分离(separation): 避免与邻近的群成员发生碰撞.
- 2) 调整(alignment): 试图与邻近的群成员保持速度匹配.
- 3) 聚合(cohesion): 试图与邻近的群成员保持接近.

至于如何解释如上的3条规则可以参考Reynolds最近的论文^[4,5].

最初几个从理论分析的观点研究群集运动的物

理学家是 Viscek^[6], Toner & Tu^[7] 和 Shimoyama^[8]. Viscek 的工作主要集中在粒子系统的 alignment(非 flocking), Toner & Tu 使用了连续体力学方法. Shimoyama 提出了一个基于粒子的模型,通过使用完全的互连网络(集中式的算法),可以描述各种形式的群集行为. 其他的几个连续体模型^[9,10]考虑了信息感知问题.

最近,群集运动及一致性问题 (consensus problem/agreement problem) 的研究引起了许多控制科学家的极大兴趣,包括 Jadbabaie^[11], Olfati-Saber & Murray^[12] 就一致性问题在切换网络的有关结果. 文献^[11]的结果被 Moreau^[13], Ren & Beard^[14] 推广到有向网络. Liu^[15] 在智能群体 (swarm) 聚集 (aggregation) 的意义下,研究了一维异步智能群体在存在感知信息延迟情形下的稳定性 (cohesiveness),并且在聚集过程中避免碰撞. 文献^[16]将^[15]的结果推广到M-维空间,但仅仅局限于固定的通信拓扑. Tanner^[17,18]利用势场法和力学分析技巧,考虑了具有固定和动态拓扑的无向网络的智能群体群集运动控制,并利用代数图论和非平滑分析工具给出了算法的稳定性分析. Olfati-Saber & Murray^[19] 基于结构能量函数和一致性协议提出了无向切换网络的群集运动控制算法,并讨论了避障和跟踪问题. 俞辉,王永骥等^[20,21]分别在固定,动态的网络拓扑,考虑了有领航者的情形.

以上所述文献关于智能群体群集运动 (同时考虑Reynolds模型的3条规则) 控制算法大多是基于无向网络的^[17~21] (有向网络的特殊情形),即智能体之间的通信或相互作用是相互的,双向的. 基于有向网络对一致性问题的研究^[11~14],只考虑了 Reynolds 模型的第2条规则,即速度匹配 (alignment) 规则. 而在实际运用中,由于各智能体所装配的传感器特性可能不尽相同,使得智能体 A 能“看见” B 但 B 不一定能“看见” A,从而导致一个更具有一般性的有向互连 (通信或相互作用) 拓扑. 所以,研究基于有向网络的智能群体的群集运动是十分必要的. 本文基于有向网络,考虑了智能群体群集运动 (同时考虑了 Reynolds 模型的3条规则) 控制问题. 基于有向信息流,智能体之间的通信或相互作用是有向的 (单向,双向并存),智能群体所构成的网络拓扑可以用有向图 (directed graph) 来表示. 通过引入势场函数 (potential function),提出了一个分散控制算法,使得多智能体在协调运动中同时保持分离 (separation),聚合 (cohesion) 及速度匹配 (alignment). 利用代数图论以及 LaSalle 不变集原理,对算法进行了稳定性分析,给出了多智能体在有向网络取得群集运动的充分条件,推广了现有文献的结果.

2 代数图论介绍(Introduction to algebraic graph theory)

在这一部分,介绍一下代数图论 (algebraic graph theory) 的有关概念和记法,更详尽的内容请参考文^[22].

设 $G = (V, E, A)$ 是 n 个结点的权重有向图, $A = [a_{ij}]$ 为权重邻接矩阵,其中对于 $\forall i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\} : i \neq j, a_{ij} \geq 0$; 对 $\forall i \in I, a_{ii} = 0$. 结点 v_i 的邻接集合用 N_i 表示,定义为 $N_i = \{j \in I : a_{ij} \geq 0\}$. 结点 v_i 的入度和出度分别定义如下:

$$\deg_{\text{in}}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}, \deg_{\text{out}}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (1)$$

对于一般的图,如果图 G 的邻接矩阵为0-1矩阵,则 $\deg_{\text{out}}(v_i) = |N_i|$. 图 G 的度矩阵 (degree matrix) 是一个对角矩阵,表示为 $\Delta = \Delta[ij]$,其中 $\Delta_{ij} = 0, \forall i \neq j; \Delta_{ii} = \deg_{\text{out}}(v_i)$. 图 G 的(权重) Laplacian 矩阵定义为

$$L = L(G) = \Delta - A. \quad (2)$$

由定义可知, Laplacian 矩阵有一个属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的右特征向量 $\omega_r = (1, 1, \dots, 1)^T$. 进一步, n 个结点的强连通 (strongly connected) 有向图的 Laplacian 矩阵满足下面的秩条件:

$$\text{rank } L = n - 1. \quad (3)$$

一个有向图 G 称为是强连通的,当且仅当图 G 的任意两个不同的结点之间有一条有向道路. 一个有向图 G 称为是弱连通的 (weakly connected),如果对于图 G 任意两个不同的结点 $i, j, i \neq j$, 存在一个结点集合 $\{i_1 = i, i_2, \dots, i_m = j\}$ 定义了一条从 i 到 j 的道路 $\pi_{i,j} = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{m-1}, i_m)\}$ 使得对所有的 $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}, (i_k, i_{k+1}) \in E(G)$ 或 $(i_{k+1}, i_k) \in E(G)$.

注 本文假定所有的图至少有两个结点且没有长度为1的环.

3 智能群体群集运动控制(Flocking motion control of flock)

3.1 问题描述(Problem statement)

基于有向网络拓扑 $G = (V, E, A)$, 考虑 n 个智能体构成的智能群体,其动态方程如下描述:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i, \\ \dot{p}_i = u_i, \end{cases} \quad i \in I, q_i, p_i, u_i \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

其中: $q_i = (x_i, y_i)^T$ 是智能体 i 的位置向量, $p_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T$ 是速度向量, $u_i = (u_{x_i}, u_{y_i})^T$ 是控制 (加速度) 输入.

控制目标是设计分散控制规则使智能群体取得群集运动. 智能体 i 的控制输入设计为两个控制项之和:

$$u_i = a_i + \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

第1项 a_i 由依赖于智能体 i 与其他智能体的相对距离的势场函数 U_i 确定, 用于智能体之间的分离 (separation) 和聚集 (cohesion); 第2项 α_i 用于调整 (alignment) 智能体 i 的速度向量以使智能群体达到速度匹配.

定义 1 如果智能群体 (渐近地) 取得相同的速度向量, 智能体两两之间的距离保持稳定并且没有碰撞发生, 就称智能群体 (渐近地) 取得了群集运动.

控制目标就是设计控制输入式(5)以使智能群体取得定义1意义下的群集运动.

定义 2 势场函数 U_{ij} 是一个关于智能体 i 和智能体 j 之间相对距离 $\|q_j - q_i\|$ 可微、非负、无界的函数, 且满足:

- 1) $U_{ij}(\|q_j - q_i\|) \rightarrow \infty$, 当 $\|q_j - q_i\| \rightarrow 0$;
- 2) U_{ij} 在某一合乎要求的距离处取得唯一的最小值.

一个势场函数的例子如下:

$$U_{ij}(\|q_j - q_i\|) = c \left[\frac{d^2}{\|q_j - q_i\|^2} + \ln(\|q_j - q_i\|^2) \right],$$

其中 $c > 0, d > 0$.

令 $\psi(z) = c \left[\frac{d^2}{z^2} + \ln(z^2) \right]$, $\phi(z) = \frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{2c(z^2 - d^2)}{z^3}$. 可见, 势场函数在 $\|q_j - q_i\| = d$ 处取得最小值 (见图1). 一个预先设定的值 d 称为智能体之间的平衡距离, 智能体之间的距离大于 d , 它们会相互吸引; 反之, 则会相互排斥.

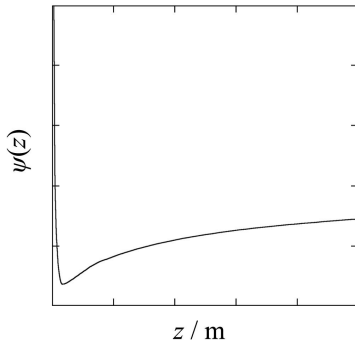


图 1 势场函数 $\psi(z)$

Fig. 1 Potential function $\psi(z)$

智能群体的聚集及分离行为通过如上定义的势场函数来进行调整, 智能体 i 的总势能可用下式表示:

$$U_i = \sum_{j \in N_i} \psi(\|q_j - q_i\|). \quad (6)$$

3.2 协调控制规则及稳定性分析 (Cooperative control law and stability analysis)

在固定的网络拓扑 $G = (V, E, A)$, 智能体之间的通信或相互作用是时不变的, 智能体 i 的控制输入 u_i 取为

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \phi(\|q_j - q_i\|) \vec{n}_{ij} + c_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (p_j - p_i), \quad i \in I. \quad (7)$$

其中 $c_1 > 0$, $\vec{n}_{ij} = \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|}$ 为单位向量.

定义 3 设 $G = (V, E, A)$ 是权重有向图, $\tilde{E}$ 是将边集 E 中所有边反向后得到的所有反向边的集合, 图 G 的镜像图 $\hat{G} = M(G)$ 是一个无向图 $\hat{G} = (V, \hat{E}, \hat{A})$, 其中 $\hat{E} = E \cup \tilde{E}$, 对称邻接矩阵 $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}]$, $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \geq 0$.

定义 4 如果图 $G = (V, E, A)$ 的结点 v_i 的入度和出度相等, 就称结点 v_i 是平衡的. 如果图 $G = (V, E, A)$ 的所有结点都是平衡的, 就称图 $G = (V, E, A)$ 是平衡的, 也称图 $G = (V, E, A)$ 为平衡图.

定理 1 设 G 是一个有向图, 其邻接矩阵为 $A = \text{adj } G$, Laplacian 矩阵为 $L = L(G)$, 则 $\hat{L} = \frac{L + L^T}{2}$ 是图 $\hat{G} = M(G)$ 的一个有效的 Laplacian 矩阵当且仅当 G 是平衡图.

证 因为图 G 的邻接矩阵 A 的第 j 列元素之和为结点 j 的入度, 第 i 行元素之和为结点 i 的出度, 所以有 $L\mathbf{1} = 0$; 由定义4有: 图 G 是平衡图, 当且仅当 $\mathbf{1}^T L = 0$. 由 $L\mathbf{1} = 0$, 有 $\mathbf{1}^T L = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(L + L^T)\mathbf{1} = 0$. 因此, G 是平衡图, 当且仅当 $\hat{L}$ 有一个属于特征值 $\lambda = 0$ 的右特征向量 $\mathbf{1}$, 即 $\hat{L}$ 是一个有效的 Laplacian 矩阵. 下证 $\hat{L}$ 是 $\hat{G} = M(G)$ 的 Laplacian 矩阵.

先计算出度矩阵 $\hat{\Delta}$ 的元素, 有

$$\hat{\Delta}_{ii} = \sum_j \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} = \frac{1}{2}(\deg_{\text{out}}(v_i) + \deg_{\text{in}}(v_i)) = \deg_{\text{out}}(v_i) = \Delta_{ii},$$

所以, $\hat{\Delta} = \Delta$. 另一方面, 有

$$\hat{L} = \frac{1}{2}(L + L^T) = \Delta - \frac{1}{2}(A + A^T) = \hat{\Delta} - \hat{A} = L(\hat{G}),$$

即 $\hat{L}$ 是 $\hat{G} = M(G)$ 的 Laplacian 矩阵. 证毕.

下面的定理是本文的主要结果.

定理 2 考虑有 n 个智能体的智能群体, 具有有向的网络拓扑 $G = (V, E, A)$, 每个智能体的动

态方程由式(4)表示, 且由控制规则式(7)驱动. 如果 $G = (V, E, A)$ 是弱连通的平衡图, 则所有智能体的速度向量渐近地取得一致, 智能体间的相对距离渐近地保持定常, 有邻接关系的智能体之间没有碰撞发生且闭环系统最终达到所有智能体势场函数被最小化的理想配置.

证 考虑如下的能量函数

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} \psi(\|q_j - q_i\|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^T p_i.$$

定义水平集 $\Omega_c = \{(\|q_j - q_i\|, p_i) | U \leq c, c > 0\}$ 为智能体间相对距离和速度空间上的紧集. 由连续性可知, Ω_c 为闭集. 因为 $U \leq c$, 所以 $\psi(\|q_j - q_i\|) \leq c, p_i^T p_i \leq 2c$. 由 $\psi(\|q_j - q_i\|) \leq c$ 且图 G 是弱连通的, 则存在着 $R > 0$, 使得 $\|q_j - q_i\| \leq R$. 又 $p_i^T p_i \leq 2c$, 有 $\|p_i\| \leq \sqrt{2c}$. 从而 Ω_c 为有界闭正向不变集.

求能量函数的时间导数, 有

$$\dot{U} = \sum_{i=1}^n [-\sum_{j \in N_i} a_{ij} p_i^T \phi(\|q_j - q_i\|) \vec{n}_{ij} + p_i^T u_i] =$$

$$c_1 \sum_{i=1}^n p_i^T \sum_{j \in N_i} a_{ij} (p_j - p_i) = -c_1 p^T (L \otimes I_2) p,$$

式中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积, $p = \dot{q}$, $q = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)^T$.

由定理1, 有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -c_1 p^T (L \otimes I_2) p = -c_1 p^T (\hat{L} \otimes I_2) p = \\ &= -c_1 \sum_{(i,j) \in \hat{E}} \hat{a}_{ij} \|p_j - p_i\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

由 LaSalle 不变集原理, 系统从水平集 Ω_c 出发的任意解将收敛到集合 $S = \{(\|q_j - q_i\|, p_i) \in \Omega_c | \dot{U} = 0\}$ 中的最大不变集, 从而得到如下结论:

1) 在集合 S 中, 由 $\dot{U} = 0$ 且图 G 为弱连通的, 则有 $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, 即智能群体速度向量渐近地取得一致.

2) 所有智能体间相对速度为零, 从而相对距离保持定常.

3) 有邻接关系的智能体间没有碰撞发生. 如果有碰撞发生, 智能体之间相对距离为零, 势场函数的值将趋于无穷大, 与 Ω_c 为有界不变集相矛盾.

4) 所有智能体势场函数将被最小化. 因为在集合 S 里, 有 $u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \phi(\|q_j - q_i\|) \vec{n}_{ij}, i \in I$, 为智能体 i 势场函数的负梯度方向. 证毕.

4 示例(Example)

通过一个例子用计算机仿真来验证前面的结果. 考虑10个具有相同2阶动态的智能群体, 其互连拓扑如图2所示, 为弱连通的平衡图. 由图2可知, 其邻接矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0_{9 \times 1} & E_9 \\ 1 & 0_{1 \times 9} \end{bmatrix}$, 其中, E_9 为9阶单位阵,

$0_{9 \times 1}$ 和 $0_{1 \times 9}$ 分别为相应阶数的零矩阵. 势场函数选为 $U_{ij}(\|q_j - q_i\|) = c[\frac{d^2}{\|q_j - q_i\|^2} + \ln(\|q_j - q_i\|^2)]$, 其中 $c = 2, d = 3$. 智能体 i 的控制输入 u_i 中的参数 c_1 取为1.8. 智能群体中各智能体的初始位置随机地在 $[0, 10; 0, 10]$ 的正方形区域内产生, 初始速度也随机地选取任意的方向, 大小限制在 $[0, 1]$ 的范围, 用小箭头表示智能体速度的方向, 如图3所示. 图4是系统在80秒计算机仿真时间内的运动轨迹. 从图中可以看出, 智能群体从随机的初始位置出发, 聚积, 最终保持稳定的相对距离, 且速度趋于一致. 图5显示智能群体速度渐进收敛.

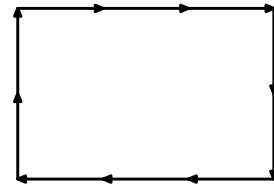


图2 10个智能体的互连拓扑

Fig. 2 Interconnected topology of 10 agents

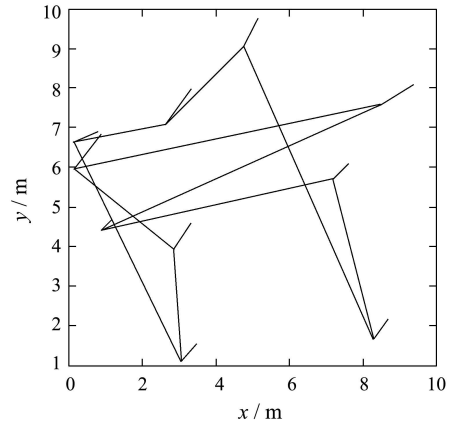


图3 初始状态

Fig. 3 Initial states

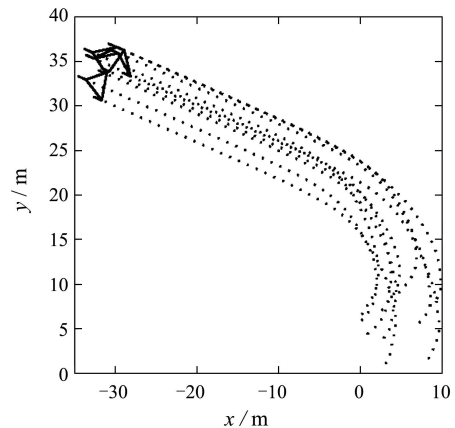


图4 智能体运动轨迹

Fig. 4 Motion trajectories of 10 agents

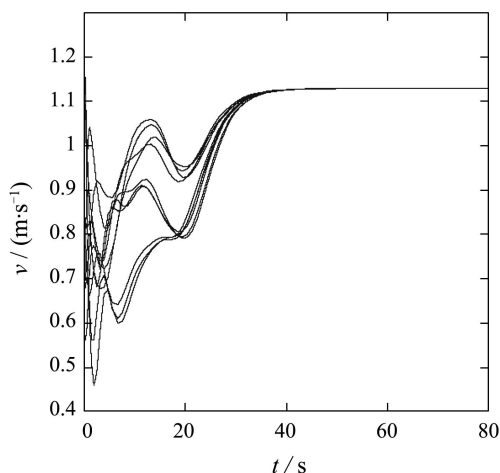


图 5 智能体速度收敛

Fig. 5 Agents' velocities converge

5 结论(Conclusions)

本文研究了智能群体基于有向的网络拓扑, 通过相互协调取得群集运动编队. 智能群体的群集运动要求所有智能体渐进地取得一致的速度向量, 并且在避免碰撞的前提下保持相对紧凑的编队. 通过设计分散控制器建立了一个稳定协调的群集运动. 这些分散控制器基于一个有向的通信网络, 智能体之间的信息传递可以用一个有向图来刻画. 群体运动的稳定性基于有向网络的平衡性及弱连通性. 本文中智能群体的群集运动基于固定的时不变的有向拓扑, 动态拓扑情形有待进一步研究.

参考文献(References):

- [1] LOW D J. Following the crowd[J]. *Nature*, 2000, 407(6803): 465 – 466.
- [2] VICSEK T. A question of scale[J]. *Nature*, 2001, 411(6836): 421.
- [3] REYNOLDS C W. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model[J]. *Computer Graphics*, 1987, 21(4): 25 – 34.
- [4] REYNOLDS C W. Steering behaviors for autonomous characters[C]// *Proc of Game Developers Conf.* San Francisco, CA: Miller Freeman Game Group, 1999: 763 – 782.
- [5] REYNOLDS C W. Interaction with a group of autonomous characters[C]// *Proc of Game Developers Conf.* San Francisco, CA: CMP Game Media Group, 2000: 449 – 460.
- [6] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [7] TONER J, TU Y. Flocks, herds, and schools: a quantitative theory of flocking[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(4): 4828 – 4858.
- [8] SHIMOYAMA N, SUGAWARA K, MIZUGUCHI T, et al. Collective motion in a system of motile elements[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(20): 3870 – 3873.
- [9] MOGILNER A, EDELSTEIN K L. Spatio-temporal order in populations of self-aligning objects: formation of oriented patches[J]. *Physica D*, 1996, 89: 346 – 367.

- [10] MOGILNER A, EDELSTEIN K L. A non-local model for a swarm [J]. *J of Mathematical Biology*, 1999, 38(6): 534 – 570.
- [11] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [12] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(9): 101 – 115.
- [13] MOREAU L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(2): 169 – 182.
- [14] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [15] LIU Y, PASSINO K M, POLYCARPOU M. Stability analysis of one-dimensional asynchronous swarms[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(10): 1848 – 1854.
- [16] LIU Y, PASSINO K M, POLYCARPOU M. Stability analysis of M-dimensional asynchronous swarms with a fixed communication topology[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 76 – 95.
- [17] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Stable flocking of mobile agents, Part I: fixed topology[C]// *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Maui Hawaii: IEEE Press, 2003: 2010 – 2015.
- [18] TANNER H G, JADBABAIE A, PAPPAS G J. Stable flocking of mobile agents, Part II: dynamic topology[C]// *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Maui Hawaii: IEEE Press, 2003: 2016 – 2021.
- [19] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Flocking with obstacle avoidance: cooperation with limited communication in mobile networks[C]// *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*. Maui, Hawaii USA: IEEE Press, 2003: 2022 – 2028.
- [20] 俞辉, 王永骥. 稳定的有领航者的多移动Agent群集运动控制[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2005, 33(8): 56 – 58. (YU Hui, WANG Yongji. Control of stable flocking motion of multi-Agent with a leader[J]. *J of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition)*, 2005, 33(8): 56 – 58.)
- [21] YU H, WANG Y J. Stable flocking motion of mobile agents following a leader in fixed and switching networks[J]. *Int J of Automation and Computing*, 2006, 3(1): 8 – 16.
- [22] GODSIL C, ROYLE G. *Algebraic Graph Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

作者简介:

俞 辉 (1967—), 男, 副教授, 华中科技大学博士研究生, 主要研究方向为自主多智能体协调控制及其在多机器人协调控制中的应用, E-mail: yuhui@ctgu.edu.cn;

王永骥 (1955—), 男, 教授, 华中科技大学博士生导师, 主要研究方向为神经网络、智能控制、预测控制、自适应控制、自主多智能体的协调控制及其在机器人控制中的应用, E-mail: wangyjch@hust.edu.cn;

程 磊 (1976—), 男, 华中科技大学博士, 主要研究方向为多机器人控制, E-mail: chenglei@hust.edu.cn.