第 24 卷第 3 期
2007 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 3
Jun. 2007

文章编号：1000−8152(2007)03−0361−05

基于对称多项式理论及吴方法求解逆变器选择性消谐多项式

郑春芳[1]，张　波[2]，丘东元[2]

(1. 华南理工大学 电力学院 雅达实验室, 广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

摘要: 提出了一种利用对称多项式简化求解逆变器选择性消谐多项式的方法. 基于余式理论求解逆变器选择性消谐多项式方程组, 会出现当要求解多个开关角时, 多项式方程的次数较高、计算工作量大的问题. 为此, 本文首先利用对称多项式理论降低该多项式方程组的次数, 然后利用吴方法及置换法求解多项式方程组, 结果表明, 最后只需计算一些代数表达式就可得到选择性消谐多项式方程组的所有解, 大大减少了计算量, 提高了在线计算的速度.

关键词: 对称多项式; 吴方法; SHE; 置换法

中图分类号: TP64　　**文献标识码**: A

Solving selective harmonic elimination polynomials of inverters using the theory of symmetric polynomials and Wu method

ZHENG Chun-fang[1]，ZHANG Bo[2]，QIU Dong-yuan[2]

(1. ASTEC Lab, College of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;
2. College of Electric Power, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: A method is presented to simplify solving the selective harmonic elimination (SHE) polynomials by using the theory of symmetric polynomials in this paper. A difficulty with the method of resultant theory is that the degrees of polynomials are quite high when there are several angles to be solved, which aggravates the computational burden of their resultant polynomials. The theory of symmetric polynomials is applied to reduce the degrees of polynomial equations and solve the polynomial equations by Wu method and permutation method. The results show that all possible solutions of SHE equations can be obtained by only solving some algebraic expressions, which reduces the computational burden greatly and improves the calculation speed on-line.

Key words: symmetric polynomials; Wu method; SHE; permutation method

1　引言(Introduction)

逆变器选择性消谐技术(SHE技术)应用的最大障碍在于消谐模型的求解困难[1]. 由于消谐模型为非线性方程组, 且为超越方程, 通常都是采用牛顿法来求解, 但由于牛顿法具有局部收敛的性质, 需要先找到与准确值较为接近的初值, 否则迭代将不收敛, 这往往是非常困难和费时的, 而且不利于在线计算、实时控制.

文献[2]利用余式理论将选择性消谐方程组转换为多项式方程组, 然后利用余式定理解出多项式方程组的全部解. 但是, 多项式方程组的次数随着开关角个数的增加而增加, 受现有的计算机代数工具计算能力的限制, 多项式方程组用余式定理很难求解. 本文提出了一种利用对称多项式理论和吴方法相结合求解选择性消谐方程组的算法. 该算法首先利用对称多项式理论将多项式方程组的次数降低, 即将多项式方程组转化为以初等对称多项式为变元的多项式方程组, 再利用吴方法及置换法求解多项式方程组, 最后只需计算一些代数表达式就可以求出消谐模型的所有解.

2　选择性消谐多项式方程组(Polynomial equations of SHE technique)

SHE技术为了减小谐波和便于求解, 总是使设计的逆变器输出波形对称, 即使其以π为半波奇对称, 以$\pi/2$为偶对称, 则可根据傅里叶分析求出谐波幅值与输出波形开关角的函数关系, 此就为SHE消谐模型. 本文以常用的全桥电压型逆变器(图1)为研究对象, 根据逆变器输出波形要求, 计算出对应逆变器的控制开关角, 控制开关S_1,S_4,S_2,S_3轮流工作, 达到逆变器的输出波形中不含拟消除次数谐波的目的.

收稿日期: 2005−09−15; 收修改稿日期: 2006−06−12.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474066); 广东省自然科学基金重点资助项目(05103540).

对应于单极性控制, 图1全桥式逆变器的输出电压波形如图2所示, 利用傅立叶分析可得输出电压表达式为

$$V(\omega t)=\sum_{k=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{4V_{\rm dc}}{k\pi}[\sum_{j=1}^{M}(-1)^j\cos(k\theta_j)]\sin(k\omega t),\quad(1)$$

其中: $0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_M<\pi/2$, a_k为k次谐波的幅值.

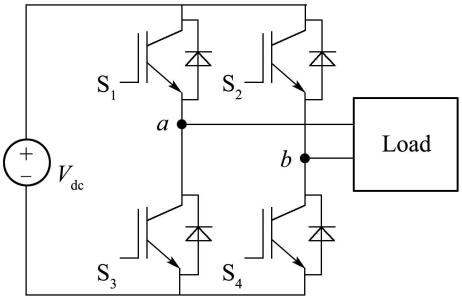

图 1 全桥式逆变器主电路

Fig. 1 Main circuit of full-bridge inverters

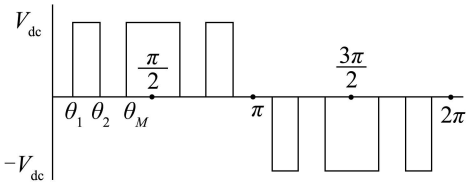

图 2 单极性逆变器输出电压波形

Fig. 2 Output voltage waveform of unipolar inverters

令基波幅值为V_1, 要消去的谐波的幅值为零, 求出满足$0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_M<\pi/2$的开关角组即可实现消除特定谐波.

各次谐波的幅值为

$$a_k=\frac{4}{k\pi}[\sum_{j=1}^{M}(-1)^j\cos(k\theta_j)],k=1,3,5,\cdots.\quad(2)$$

当 $M=3$时, 由式(2)有:

$$\begin{cases}\cos\ \theta_1-\cos\ \theta_2+\cos\ \theta_3=b,\\ \cos(5\theta_1)-\cos(5\theta_2)+\cos(5\theta_3)=0,\\ \cos(7\theta_1)-\cos(7\theta_2)+\cos(7\theta_3)=0,\end{cases}\quad(3)$$

其中 $b=V_1/(4V_{\rm dc}/\pi)$.

规定当 $\cos(k\theta_i)$的系数为+1时, 令 $\theta_i'=\theta_i$; 而当 $\cos(k\theta_i)$的系数为−1时, 令 $\theta_i'=\pi-\theta_i$. 令 $x_1=\cos\ \theta_1'$, $x_2=\cos\ \theta_2'$, $x_3=\cos\ \theta_3'$, 则消谐模型式(3)转换成多项式方程组为

$$\begin{cases}p_1(x)=x_1+x_2+x_3-b=0,\\ p_5(x)=\sum_{i=1}^{3}(5x_i-20x_i^3+16x_i^5)=0,\\ p_7(x)=\sum_{i=1}^{3}(-7x_i+56x_i^3-112x_i^5+64x_i^7)=0,\end{cases}\quad(4)$$

其中 $0\leqslant x_3\leqslant -x_2\leqslant x_1\leqslant 1$.

由式(4)可见, 消除5, 7次谐波, 其对应多项式的最高次数就达到7次, 分析表明, 多项式的最高次数与需消除的最高谐波次数相同, 因而求解十分困难.

3 对称多项式 (Symmetric polynomials)

3.1 对称多项式的概念[3](Concept of symmetric polynomials)

定义 1 若数域P上的n元多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$任意交换两个变量时均保持不变, 则称f为数域P上的n元对称多项式.

例 1

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2.$$

x_1, x_2, x_3中任意两个变量互换时, $f(x_1,x_2,x_3)$都不变, 故其是对称多项式.

例 2

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3.$$

将x_1和x_2互换时, 得

$$f(x_2,x_1,x_3)=x_1x_2-x_2x_3+x_1x_3\neq f(x_1,x_2,x_3),$$

故其不是对称多项式.

例 3

n个n元多项式:

$$\begin{cases}m_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ m_2=x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ \quad\vdots\\ m_{n-1}=x_1\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2\cdots x_n,\\ m_n=x_1\cdots x_n,\end{cases}\quad(5)$$

其中每个m_k $(k=1,2,\cdots,n)$是所有可能的k个不同的x_i的乘积之和, 是n元k次齐次多项式. 显然, $m_1,m_2,\cdots,m_n$都是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的对称多项式. 这n个对称多项式称为初等对称多项式.

3.2 对称多项式的基本定理(Basic theorem of symmetric polynomials)

定理 1 数域p上的每个对称多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$都可以表示成初等对称多项式$m_1,m_2,\cdots,m_n$的多项式: $f(x_1,\cdots,x_n)=g(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, 且$g$唯一.

文献[4]中已证明了任意n元对称多项式都可由n元初等对称多项式经加、减、乘运算得到. 这里不赘述.

3.3 消谐多项式方程组的转化(Transform of SHE polynomial equations)

根据上述对称多项式的定义和定理可知, 式(4)中的多项式$p_1(x), p_5(x), p_7(x)$为3元对称多项式, 可以表示成3元初等对称多项式m_1, m_2, m_3的多项式. 其中3元初等对称多项式为:

$$\begin{cases} m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ m_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ m_3 = x_1x_2x_3, \end{cases} \tag{6}$$

其中由$0 \leqslant x_3 \leqslant -x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1$得: $m_1 \geqslant 0, m_2 \leqslant 0, m_3 \leqslant 0$. 消谐多项式方程组(4)转化为初等对称多项式$m_1, m_2, m_3$的多项式(这可由Mathematica数学软件完成):

$$\begin{cases} p_1(m) = m_1 - b, \\ p_5(m) = 5m_1 - 20m_1^3 + 16m_1^5 + 60m_1m_2 - \\ \qquad 80m_1^3m_2 + 80m_1m_2^2 - 60m_3 + \\ \qquad 80m_1^2m_3 - 80m_2m_3, \\ p_7(m) = -7m_1 + 56m_1^3 - 112m_1^5 + 64m_1^7 - \\ \qquad 168m_1m_2 + 560m_1^3m_2 - 448m_1^3m_2 - \\ \qquad 560m_1m_2^2 + 896m_1^3m_2^2 - 448m_1m_2^3 + \\ \qquad 168m_3 - 560m_1^2m_3 + 448m_1^4m_3 + \\ \qquad 560m_2m_3 - 1344m_1^2m_2m_3 + \\ \qquad 448m_2^2m_3 + 448m_1m_3^2, \end{cases} \tag{7}$$

其中$m = (m_1, m_2, m_3)$.

4 消谐多项式方程组的求解(Solving the SHE polynomial equations)

4.1 消谐多项式方程组的吴方法求解(Solving the SHE polynomial equations by Wu method)

首先, 用吴方法[5]求解多项式方程组(7), 得到其三角化特征列为

$$\begin{cases} r_{q_5,q_7}(m_2) = \\ -b \times (-1575 + 9800b^2 - 24080b^4 + \\ 28160b^6 - 15360b^8 + 3072b^{10} - 10500m_2 + \\ 56000b^2m_2 - 103040b^4m_2 + 78080b^6m_2 - \\ 20480b^8m_2 - 19600m_2^2 + 89600b^2m_2^2 - \\ 116480b^4m_2^2 + 46080b^6m_2^2 - 11200m_2^3 + \\ 44800b^2m_2^3 - 35840b^4m_2^3), \\ q_5(m_2, m_3) = \\ 5b - 20b^3 + 16b^5 + 60bm_2 - 80b^3m_2 + \\ 80bm_2^2 - 60m_3 + 80b^2m_3 - 80m_2m_3, \\ p_1(m) = m_1 - b. \end{cases} \tag{8}$$

然后, 用吴方法求解式(6), 得到其三角化特征列为

$$\begin{cases} r(x_3) = m_3 - m_2m_3 + m_1m_3^2 - m_3^3, \\ r(x_2, x_3) = m_2 - m_1m_2 + x_2^2 - m_1x_3 + \\ \qquad x_2x_3 + x_3^2, \\ r(x_1, x_2, x_3) = m_1 - x_1 - x_2 - x_3. \end{cases} \tag{9}$$

依据3.3节消谐多项式方程组的转化结果可知, 求解消谐多项式方程组的步骤为:

1) 计算式(8)中m_1, m_2, m_3的所有解;

2) 计算式(9)中x_1, x_2, x_3的所有解.

4.2 三次方程的置换法求解(Solving the 3rd order equation by Permutation method)

根据上述求解消谐多项式方程组的步骤可知, 求解的关键是求出式(8)中三次方程式$r_{q_5,q_7}(m_2) = 0$的根$\{m_{2i}\}_{i=1,2,3}$ 以及式(9)中$r(x_3) = 0$的根$\{x_{3i}\}$. 对于一般的三次方程, 根的求解有一定的难度, 而用置换法[6]求解三次方程$x^3 + px^2 + qx + r = 0$, 得其根:

$$\begin{cases} x_1 = (-p + \varphi_1 + \varphi_2)/3, \\ x_2 = (-p + \omega^2\varphi_1 + \omega\varphi_2)/3, \\ x_3 = (-p + \omega\varphi_1 + \omega^2\varphi_2)/3, \end{cases} \tag{10}$$

其中:

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

$$\varphi_1, \varphi_2 = \{\frac{1}{2}[(-2p^3 + 9pq - 27r) \pm \sqrt{(-2p^3+9pq-27r)^2 - 4(p^2-3q)^3}]\}^{1/3},$$

(其中φ_1 相当于平方根取正号, φ_2相当于取负号).

因而, 将式(8)中的$r_{q_5,q_7}(m_2) = 0$化成三次方程$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的标准形式, 则:

$$\begin{cases} a = -11200 + 44800b^2 - 35840b^4, \\ p = (-19600 + 89600b^2 - 116480b^4 + \\ \qquad 46080b^6)/a, \\ q = (-10500 + 56000b^2 - 103040b^4 + \\ \qquad 78080b^6 - 20480b^8)/a, \\ r = (-1575 + 9800b^2 - 24080b^4 + \\ \qquad 28160b^6 - 15360b^8 + 3072b^{10})/a. \end{cases} \tag{11}$$

将式(9)中$r(x_3) = 0$化成三次方程$x^3 + px^2 + qx + r = 0$的标准形式, 则:

$$p = -m_1, q = m_2, r = -m_3. \tag{12}$$

4.3 消谐多项式方程组的求解流程(Procedure of solving SHE polynomial equations)

由吴方法和置换法的求解可知, 消谐多项式方程组的整个求解流程:

1) 将式(11)代入式(10)求$r_{q_5,q_7}(m_2) = 0$的全部根: $\{m_{2i}\}_{i=1,2,3}$;

2) 将$\{m_{2i}\}_{i=1,2,3}$代入式(8)求$q_5(m_2, m_3) = 0$的根m_{3i}; 则根据条件$m_1 \geqslant 0, m_2 \leqslant 0, m_3 \leqslant 0$得出式(8)的全部可行解: $(m_1, m_2, m_3) = (b, m_{2i}, m_{3i})_{i=1,2,3}$;

3) 由$(m_1, m_2, m_3) = (b, m_{2i}, m_{3i})_{i=1,2,3}$代入式(9)后, 将式(12)代入式(10)并求$r(x_3) = 0$的根为$\{x_{3i}\}_{i=1,2,3}$;

4) 将$\{x_{3i}\}_{i=1,2,3}$代入并求$r(x_2, x_3) = 0$的根为$\{x_{2j}\}_{j=1,2}$;

5) 将$\{x_{2j}, x_{3i}\}_{i=1,2,3;j=1,2}$代入并求$r(x_1, x_2, x_3) = 0$的根为$x_{1j}$.

因此, 只需计算一些代数表达式就得到式(4)的所有解: $(x_1, x_2, x_3) = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3i}), i = 1, 2, 3; j = 1, 2$, 再根据条件$0 \leqslant x_3 \leqslant -x_2 \leqslant x_1 \leqslant 1$得出式(4)的所有可行解.

5 实际结果分析 (Analysis of illustration's results)

根据4.3节介绍的消谐多项式方程组(4)的求解流程, 可解出式(4)对于不同b时的全部可行解. 图3所示为计算得出的单极性逆变器时开关角与b的轨迹图, 由图可知: b在(0 0.52)之间时方程组(4)只有一组解; b在[0.52 0.91] 之间时方程组(4)有两组解; b在(0.91 0.93)之间时方程组(4)也只有一组解.

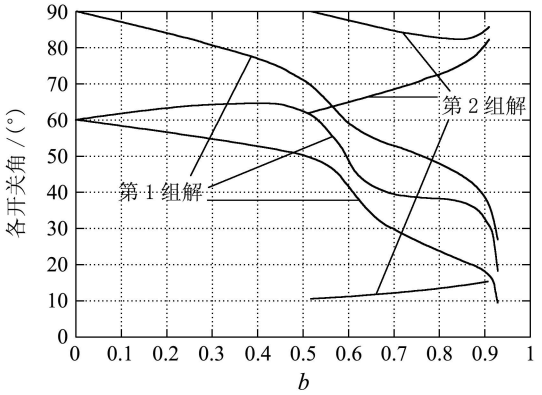

图 3 单极性逆变器$M = 3$时开关角与b的轨迹图

Fig. 3 Switching angles vs. b at $M = 3$ for unipolar inverters

选择哪组解更优取决于逆变器输出电压总的谐波畸变. 定义总谐波电压畸变率THD为

$$THD = \frac{1}{a_1}\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} a_k^2}, \tag{13}$$

式中a_k为各次谐波幅值系数; a_1为基波幅值. 由于所求解的多项式方程组是消除5, 7次谐波的, 因而主要考虑11, 13次谐波对总谐波的影响, 只计11, 13次谐波, 因此$THD = \sqrt{a_{11}^2 + a_{13}^2}/a_1$. 可得两组解的$THD$随着$b$的变化规律如图4所示. 由图4可知两组解的$THD$几乎相等.

以图1为控制对象, 以开关角的第一组解为控制策略, 图5所示为$V_{\rm dc} = 100$ V, $b = 0.8 \times \pi/4$, $f = 50$ Hz 即调制比为0.8时S_1的开关信号和输出电压$v_{\rm ab}$的仿真波形. 输出电压$v_{\rm ab}$的傅立叶频谱分析如图6所示.

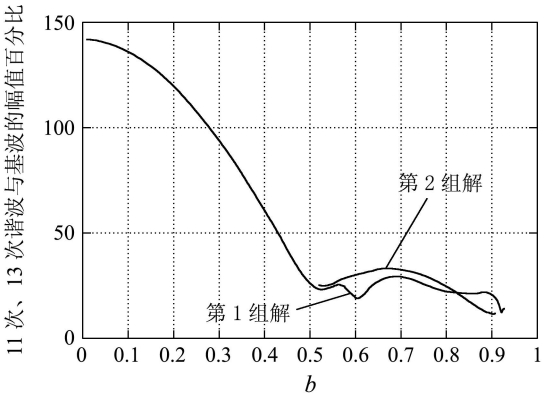

图 4 $\sqrt{a_{11}^2 + a_{13}^2}/a_1$随$b$的变化规律

Fig. 4 $\sqrt{a_{11}^2 + a_{13}^2}/a_1$vs. b of each set of solutions

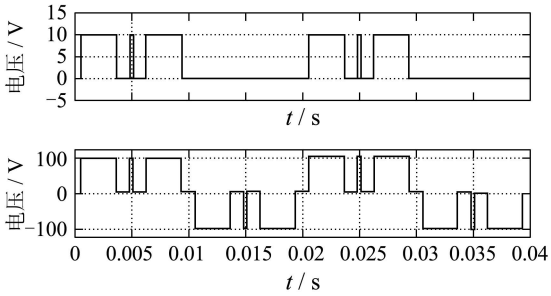

图 5 $b = 0.8\pi/4, f = 50$ Hz时S_1的信号和$v_{\rm ab}$的仿真波形

Fig. 5 Simulation waveforms of S_1 and $v_{\rm ab}$ at $b = 0.8\pi/4, f = 50$ Hz

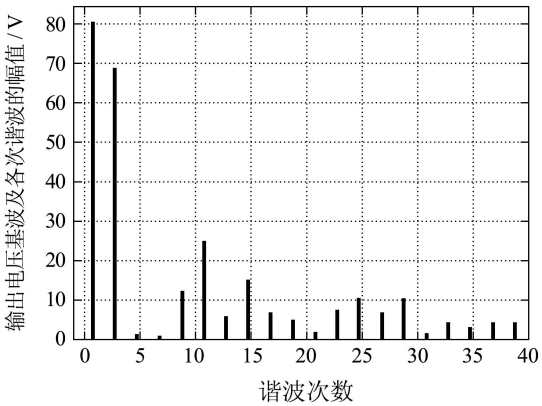

图 6 输出电压$v_{\rm ab}$的傅立叶频谱分析

Fig. 6 FFT analysis of output voltage $v_{\rm ab}$

从图6中可看出输出电压的第5、第7次谐波的幅值基本上为零. 由于本算例是以单相系统为控制对象, 选择消除第5、第7次谐波时3次及3的倍数次谐波依然存在. 而实际应用一般考虑三相系统, 当本算例用于三相系统时, 3次及3的倍数次谐波自然消除, 故不需考虑选择消除第3次谐波.

6　结论(Conclusions)

根据对称多项式理论, 将消谐多项式方程组表示成初等对称多项式的多项式方程组大大降低了消谐多项式方程组的次数, 有利于降低消谐多项式方程组的求解难度. 3个开关角的消谐多项式的求解流程和结果表明, 只需计算一些代数表达式就可得到选择性消谐多项式方程组的所有解, 大大减少了计算量, 提高了在线计算的速度.

参考文献 (References):

[1] PATEL H, HOFT R. Generalized techniques of harmonic elimination and voltage control in thyristor inverters: Part I-harmonic elimination[J]. *IEEE Trans on Industry Applications*, 1973, 9(4): 310 – 317.

[2] CHIASSON J, TOBERT L M, MCKENZIE K, et al. Eliminating harmonics in a multilevel using resultant theory[C]//*Proc of IEEE Power Electronics Specialits Conf*. Cairns, Australia: [s.n.], 2002: 503 – 508.

[3] 李师正. 多项式代数[M]. 山东: 山东人民出版社, 1984: 8 – 24.
(LI Shizheng. *Polynomial Algebra*[M]. Shandong: Shan Dong People Press, 1984: 8 – 24.)

[4] 张禾瑞, 郝鈵新. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984: 90 – 98.
(ZHANG Herui, HAO Bingxin. *Advanced Algebra*[M]. Beijing: Advanced Education Press, 1984: 90 – 98.)

[5] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
(WU Wenjun. *The Basic Principles of Mechanized Proof of Geometry Theory*[M]. Beijing: Science Press, 1984.)

[6] 梁宝钰. 用置换法求解二次和三次方程[J]. 太原教育学院学报, 2003, 3: 68 – 70.
(LIANG Baoyu. To solve quadratic equation and cubic equation with permutation method[J]. *J of Education Institute of Taiyuan University*, 2003, 3: 68 – 70.)

作者简介:

郑春芳　(1978—), 女, 博士, 研究方向为高频开关电源的谐波消除, E-mail: zcf219@163.com;

张　波　(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为高频开关电源与电力传动, E-mail: epbzhang@scut.edu.cn;

丘东元　(1972—), 女, 副教授, 研究方向为电力电子装置, E-mail: epdyqiu@scut.edu.cn.

(上接第360页)

[5] PLATT J. A resource-allocating network for function interpolation[J]. *Neural Computation*, 1991, 3(2): 213 – 225.

[6] YINGWEI L, SUNDARARAJAN N, SARATCHANDRAN P. A sequential learning scheme for function approximation and using minimal radial basis neural networks[J]. *Neural Computation*, 1997, 9(2): 1 – 18.

[7] MICCHELLI C. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions[J]. *Constructive Approximation*, 1986, 2(1): 11 – 22.

[8] 魏海坤, 宋文忠, 李奇. 非线性系统RBF网在线建模的资源优化网络方法[J]. 自动化学报, 2005, 31(6): 970 – 977.
(WEI Haikun, SONG Wenzhong, LI Qi. Resource-optimizing networks for nonlinear system on-line modeling using radial basis function networks[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 970 – 977.)

[9] WEI H, AMARI S. Online learning dynamics of radial basis function neural networks near the singularity[C]//*Proc of Int Joint Conf on Neural Networks*. New York, USA: IEEE Press, 2006: 4770 – 4776.

[10] AMARI S, PARK H, OZEKI T. Singularities affect dynamics of learning in neuromanifolds[J]. *Neural Computation*, 2006, 18(5): 1007 – 1065.

作者简介:

魏海坤　(1971—), 男, 副教授, 目前在日本Riken脑科学研究所从事博士后研究工作, 最近研究方向为奇异点附近层次神经模型的学习动态, E-mail: hkwei@seu.edu.cn;

李　奇　(1963—), 男, 博士生导师, 研究领域为复杂系统过程控制;

宋文忠　(1936—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为复杂系统辨识及控制、离散事件动态系统.