

文章编号: 1000-8152(2007)03-0366-05

# 具有随机通讯时延的离散网络化系统的 $H_\infty$ 滤波器设计

王 武, 林琼斌, 杨富文

(福州大学 电气工程与自动化学院, 福建 福州 350002)

**摘要:** 由于传感器和滤波器是通过有限带宽的网络连接的, 因此系统的测量数据经常会出现时延, 而且时延是随机的。本文讨论了具有一步随机通讯时延的离散网络化系统的 $H_\infty$ 滤波器设计问题。利用线性矩阵不等式方法设计线性滤波器使得滤波误差系统是均方意义上指数稳定并具有给定的 $H_\infty$ 性能。滤波器参数通过凸优化技术求解一个线性矩阵不等式得到。数值仿真表明设计方法的有效性。

**关键词:** 离散网络化系统; 随机通讯时延;  $H_\infty$ 滤波; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13    **文献标识码:** A

## H-infinity filter design for discrete-time networked systems with random communication delays

WANG Wu, LIN Qiong-bin, YANG Fu-wen

(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350002, China)

**Abstract:** The sensors and filter are connected via a limited bandwidth communication channel. The system measurements are often subject to randomly varying communication delays. A H-infinity filtering problem is proposed for linear discrete-time networked systems with random communication delays. The problem addressed here is the design of a linear H-infinity filter such that the error systems are exponentially mean-square stable and guarantee a prescribed H-infinity performance in term of linear matrix inequality (LMI). The filter is then obtained by solving a LMI using convex optimization techniques. A numerical example is also provided to demonstrate the validity of the proposed design approach.

**Key words:** discrete-time networked systems; random communication delays; H-infinity filtering; LMI

## 1 引言(Introduction)

随着网络技术的发展, 被控对象与控制器, 滤波器通过网络连接构成网络化系统。由于网络传输带宽的限制, 信息传输过程中经常存在时延。众所周知, 时延是造成系统不稳定和性能下降的主要因素<sup>[1]</sup>。由于网络通讯时延是随机的和时变的, 这使得系统分析与设计变得十分复杂。近年来, 学者们采用概率论的方法来描述这种随机时延, 比如文献[2]假设时滞具有独立的转移概率分布; 文献[3]将随机时延看作已知概率分布的白噪声; 文献[4, 5]采用有限维的马尔可夫过程来描述随机时延; 文献[6, 7]采用取值为0和1的Bernoulli序列来描述系统的随机时延。对确定时滞系统的控制与滤波已取得许多成果, 但对这类具有随机时延的系统的研究还是刚刚开始。本文沿用文献[6, 7]描述随机时延的方法, 考虑系统测量数据由于传感器和滤波器连接网络的带宽限

制而出现的一步随机通讯时延, 利用线性矩阵不等式方法设计线性全阶滤波器, 所设计的滤波器使得滤波误差系统是均方意义上指数稳定并具有给定的 $H_\infty$ 性能。

## 2 问题的描述(Problem formulation)

考虑如下线性离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \\ z(k) = Lx(k) + Tw(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  是系统状态向量,  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  是外部扰动, 属于  $l_2[0, \infty)$ ,  $z(k) \in \mathbb{R}^p$  是被估计状态,  $A, B, L, T$  是已知的实矩阵。具有一步随机通讯时延的测量输出描述为:

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k), \\ \hat{y}(k) = r(k)y(k) + (1 - r(k))y(k-1). \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2005-06-01; 收修改稿日期: 2006-02-23。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474049, 60604027); 福建省自然科学基金资助项目(A0410012, A0510009)。

其中:  $y(k) \in \mathbb{R}^r$  是测量输出向量,  $C$  是已知的实矩阵, 随机变量  $r(k) \in \mathbb{R}$  是一个满足 Bernoulli 分布的序列, 其取值为 0 和 1, 它的概率为:

$$\text{Prob}\{r(k) = 1\} = E\{r(k)\} := \bar{r}, \quad (3)$$

$$\text{Prob}\{r(k) = 0\} = 1 - E\{r(k)\} := 1 - \bar{r}. \quad (4)$$

其中  $\bar{r}$  是已知的正数.

**注 1** 一步随机通讯时延解释为: 当系统测量数据在一个采样周期内到达,  $\hat{y}(k) = y(k)$ ; 而系统测量数据在一个采样周期至两个采样周期之间到达,  $\hat{y}(k) = y(k-1)$ . 可见, 在第  $k$  采样周期内, 得到的系统测量输出为  $y(k)$  的概率是  $\bar{r}$ ,  $y(k-1)$  的概率是  $1 - \bar{r}$ .

**假设 1** 矩阵  $A$  渐近稳定.

本文的目标是设计  $n$  阶滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_f \hat{x}(k) + B_f \hat{y}(k), \\ \hat{z}(k) = C_f \hat{x}(k) + D_f \hat{y}(k), \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  表示状态估计,  $A_f, B_f, C_f, D_f$  是要设计的滤波器参数.

根据式(1)(2)和式(5), 可以得到如下增广系统:

$$\begin{cases} x_f(k+1) = A_{cl} x_f(k) + A_{dcl} x_f(k-1) + B_{cl} w(k), \\ z_f(k) = C_{cl} x_f(k) + C_{dcl} x_f(k-1) + D_{cl} w(k), \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_f(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \\ z_f(k) &= z(k) - \hat{z}(k), \\ A_{cl} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ r(k)B_f C & A_f \end{bmatrix} = A_{cl0} + (r(k) - \bar{r})A_{cl1}, \\ A_{dcl} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-r(k))B_f C & 0 \end{bmatrix} = A_{dcl0} - (r(k) - \bar{r})A_{dcl1}, \\ B_{cl} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_{cl} = [L - r(k)D_f C \quad -C_f] = C_{cl0} - (r(k) - \bar{r})C_{cl1},$$

$$C_{dcl} = [-(1-r(k))D_f C \quad 0] = C_{dcl0} + (r(k) - \bar{r})C_{dcl1},$$

$$D_{cl} = T, A_{cl0} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \bar{r}B_f C & A_f \end{bmatrix},$$

$$A_{cl1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f C & 0 \end{bmatrix}, A_{dcl0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-\bar{r})B_f C & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{dcl1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f C & 0 \end{bmatrix}, C_{cl0} = [L - \bar{r}D_f C \quad -C_f],$$

$$C_{cl1} = [D_f C \quad 0], C_{dcl0} = [-(1-\bar{r})D_f C \quad 0],$$

$$C_{dcl1} = [D_f C \quad 0].$$

本文的目标是设计形如式(5)的全阶滤波器, 有:

a) 在外部扰动  $w(k) = 0$  情况下, 滤波误差系统(6)是均方意义下指数稳定的;

b) 在零初始条件下, 滤波误差系统(6)具有  $H_\infty$  性能  $\gamma(\gamma > 0)$ , 即

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\}, \forall w(k) \neq 0. \quad (7)$$

**定义 1** 如果  $w(k) = 0$ , 存在  $\kappa \geq 1, 0 < \tau < 1$  使得

$$E\{\|x_f(k)\|^2\} \leq \kappa \tau^k E\{\|x_f(0)\|^2\}, \forall x_f(k) \neq 0, \quad (8)$$

系统被称为均方意义下指数稳定的.

**引理 1**<sup>[7]</sup>  $V(\eta(k))$  为 Lyapunov 函数. 如果存在  $\lambda \geq 0, \mu > 0, \nu > 0$  和  $0 < \psi < 1$  使得

$$\mu\|\eta(k)\|^2 \leq V(\eta(k)) \leq \nu\|\eta(k)\|^2, \quad (9)$$

$$E\{V(\eta(k+1))|\eta(k)\} - V(\eta(k)) \leq \lambda - \psi V(\eta(k)). \quad (10)$$

那么有

$$E\{\|\eta(k)\|^2\} \leq \frac{\nu}{\mu}(1-\psi)^k E\{\|\eta(0)\|^2\} + \frac{\lambda}{\mu\psi}. \quad (11)$$

### 3 主要结果(Main results)

**定理 1** 给定  $\gamma > 0$  且扰动  $w(k) = 0$ . 如果存在正定对称阵  $P$  和  $R$ , 使得

$$\begin{bmatrix} -P+R & 0 & A_{cl0}^T P & aA_{cl1}^T P \\ 0 & -R & A_{dcl0}^T P & -aA_{dcl1}^T P \\ PA_{cl0} & PA_{dcl0} & -P & 0 \\ aA_{cl1} P & -aA_{dcl1} P & 0 & -aP \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

成立, 其中  $a = (1-\bar{r})\bar{r}$ , 那么系统(6)是均方意义下指数稳定的.

**证** 系统(6)中令  $w(k) = 0$ . 取 Lyapunov 函数为:

$$V(k) = x_f^T(k)Px_f(k) + x_f^T(k-1)Rx_f(k-1), \quad (13)$$

其中  $P$  和  $R$  为正定对称阵.

那么

$$\begin{aligned} E\{V(k+1)|x(k), \dots, x(0), \hat{x}(k), \dots, \hat{x}(0)\} - V(k) &= \\ (A_{cl0}x_f(k) + A_{dcl0}x_f(k-1))^T P (A_{cl0}x_f(k) + \\ A_{dcl0}x_f(k-1)) + E(r(k) - \bar{r})^2 (A_{cl1}x_f(k) - \\ A_{dcl1}x_f(k-1))^T P (A_{cl1}x_f(k) - A_{dcl1}x_f(k-1)) + \\ x_f^T(k)(R - P)x_f(k) - x_f^T(k-1)Rx_f(k-1) &= \\ \eta^T(k)A\eta(k), \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} x_f(k) \\ x_f(k-1) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= A_{\text{cl}0}^T P A_{\text{cl}0} + a A_{\text{cl}1}^T P A_{\text{cl}1} - P + R, \\ \Lambda_2 &= A_{\text{cl}0}^T P A_{\text{dcl}0} - a A_{\text{cl}1}^T P A_{\text{dcl}1}, \\ \Lambda_3 &= A_{\text{dcl}0}^T P A_{\text{dcl}0} + a A_{\text{dcl}1}^T P A_{\text{dcl}1} - R, \\ a &= E(r(k) - \bar{r})^2 = (1 - \bar{r})\bar{r}.\end{aligned}$$

由Schur补引理, 式(12)等价于  $\Lambda < 0$ , 因此有

$$\begin{aligned}E\{V(k+1)|x(k), \dots, x(0), \hat{x}(k), \dots, \hat{x}(0)\} - V(k) &= \\ \eta^T(k)\Lambda\eta(k) &\leq -\lambda_{\min}(-\Lambda)\eta^T(k)\eta(k) \leq \\ -\alpha\eta^T(k)\eta(k),\end{aligned}\quad (15)$$

其中  $0 < \alpha \leq \lambda_{\min}(-\Lambda)$ .

必然存在  $0 < \alpha \leq \nu$ , 其中  $\nu = \max\{\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)\}$ , 有

$$\begin{aligned}E\{V(k+1)|x(k), \dots, x(0), \hat{x}(k), \dots, \hat{x}(0)\} - V(k) &\leq \\ -\alpha V(k)/\nu &= -\psi V(k), 0 < \psi < 1.\end{aligned}\quad (16)$$

又

$$\mu\|\eta(k)\|^2 \leq V(\eta(k)) \leq \nu\|\eta(k)\|^2,\quad (17)$$

其中  $\mu = \min\{\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(R)\}$ .

那么有

$$\begin{aligned}E\{\|x_f(k)\|^2\} &\leq E\{\|\eta(k)\|^2\} \leq \\ \frac{\nu}{\mu}(1-\psi)^k E\{\|\eta(0)\|^2\} &= \frac{\nu}{\mu}(1-\psi)^k E\{\|x_f(0)\|^2\}.\end{aligned}\quad (18)$$

由定义1可得系统(6)是均方意义下指数稳定的.

证毕.

**定理2** 给定  $\gamma > 0$ . 如果存在正定对称阵  $P$  和  $R$ , 使得

$$\left[ \begin{array}{cccccc} R-P & 0 & 0 & A_{\text{cl}0}^T P & C_{\text{cl}0}^T & a A_{\text{cl}1}^T P & a C_{\text{cl}1}^T \\ * & -R & 0 & A_{\text{dcl}0}^T P & C_{\text{dcl}0}^T & -a A_{\text{dcl}1}^T P & -a C_{\text{dcl}1}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & B_{\text{cl}}^T P & D_{\text{cl}}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -P & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -aP & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -aI \end{array} \right] < 0 \quad (19)$$

成立, 其中  $a = (1 - \bar{r})\bar{r}$ , 那么系统(6)是均方意义下指数稳定的且具有给定的  $H_\infty$  性能.

**证** 由Schur补引理式(19)成立隐含式(12)成立, 所以系统(6)是均方意义下指数稳定的.

当  $w(k) \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}E\{V(k+1)|x(k), \dots, x(0), \hat{x}(k), \dots, \hat{x}(0)\} - V(k) &= \\ \eta^T(k)\Lambda\eta(k) + w^T(k)B_{\text{cl}}^T P B_{\text{cl}} w(k) + \\ 2w^T(k)B_{\text{cl}}^T P(A_{\text{cl}0}x_f(k) + A_{\text{dcl}0}x_f(k-1)),\end{aligned}\quad (20)$$

那么

$$\begin{aligned}E\{V(k+1)\} - E\{V(k)\} + \\ E\{z_f^T(k)z_f(k)\} - \gamma^2 E\{w^T(k)w(k)\} = \\ \eta^T(k)\Lambda\eta(k) + w^T(k)B_{\text{cl}}^T P B_{\text{cl}} w(k) + \\ 2w^T(k)B_{\text{cl}}^T P(A_{\text{cl}0}x_f(k) + A_{\text{dcl}0}x_f(k-1)) + \\ E\{(C_{\text{cl}}x_f(k) + C_{\text{dcl}}x_f(k-1) + D_{\text{cl}}w(k))^T \\ (C_{\text{cl}}x_f(k) + C_{\text{dcl}}x_f(k-1) + D_{\text{cl}}w(k))\} - \\ \gamma^2 w^T(k)w(k) = \\ \begin{bmatrix} x_f(k) \\ x_f(k-1) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f(k) \\ x_f(k-1) \\ w(k) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= A_{\text{cl}0}^T P A_{\text{cl}0} + a A_{\text{cl}1}^T P A_{\text{cl}1} + \\ C_{\text{cl}0}^T C_{\text{cl}0} + a C_{\text{cl}1}^T C_{\text{cl}1} + R - P, \\ \Psi_{12} &= A_{\text{cl}0}^T P A_{\text{dcl}0} - a A_{\text{cl}1}^T P A_{\text{dcl}1} + \\ C_{\text{cl}0}^T C_{\text{dcl}0} - a C_{\text{cl}1}^T C_{\text{dcl}1}, \\ \Psi_{13} &= A_{\text{cl}0}^T P B_{\text{cl}} + C_{\text{cl}0}^T D_{\text{cl}}, \\ \Psi_{22} &= A_{\text{dcl}0}^T P A_{\text{dcl}0} + a A_{\text{dcl}1}^T P A_{\text{dcl}1} + \\ C_{\text{dcl}0}^T C_{\text{dcl}0} + a C_{\text{dcl}1}^T C_{\text{dcl}1} - R, \\ \Psi_{23} &= A_{\text{dcl}0}^T P B_{\text{cl}} + C_{\text{dcl}0}^T D_{\text{cl}}, \\ \Psi_{33} &= B_{\text{cl}}^T P B_{\text{cl}} + D_{\text{cl}}^T D_{\text{cl}} - \gamma^2 I.\end{aligned}$$

由Schur补引理, 式(19)成立即有

$$\begin{aligned}E\{V(k+1)\} - E\{V(k)\} + \\ E\{z_f^T(k)z_f(k)\} - \gamma^2 E\{w^T(k)w(k)\} < 0,\end{aligned}\quad (22)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{E\{V(k+1)\} - E\{V(k)\} +\}$$

$$E\{z_f^T(k)z_f(k)\} - \gamma^2 E\{w^T(k)w(k)\}\} < 0,\quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z_f(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\} + \\ E\{V(0)\} - E\{V(\infty)\}.\quad (24)$$

因为零初始  $x_f(0) = 0$  且系统是均方意义下指数稳定的, 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z_f(k)\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|w(k)\|^2\}.\quad (25)$$

证毕.

下面给出滤波器的设计方法.

**定理3** 给定  $\gamma > 0$ . 如果存在正定对称阵  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Y$  和  $W$ , 矩阵  $R_3, M, N, Z, D_f$ , 使得式(26)成立,

$$\begin{bmatrix} R_1 - W & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_2 - W & R_3 - Y & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_2 & -R_3 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ WA & WA & 0 & 0 & WB - W & * & * & * & * & * \\ YA + \bar{r}ZC + MYA + \bar{r}ZC & bZC & bZC & YB - W - Y & * & * & * & * & * & * \\ L - \bar{r}D_f C - N & L - \bar{r}D_f C & -bD_f C & -bD_f C & T & 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aW & * & * \\ aZC & aZC & -aZC & -aZC & 0 & 0 & 0 & -aW - aY & * & * \\ aD_f C & aD_f C & -aD_f C & -aD_f C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

其中  $a = (1 - \bar{r})\bar{r}$ ,  $b = 1 - \bar{r}$ , 那么系统(6)是均方意义下指数稳定的且具有给定的  $H_\infty$  性能. 此时滤波器的参数为:

$$\begin{cases} A_f = (W - Y)^{-1}M, B_f = (W - Y)^{-1}Z, \\ C_f = N, D_f = D_f. \end{cases} \quad (27)$$

证 由定理2知, 系统(6)是均方意义下指数稳定的且具有给定的  $H_\infty$  性能的充分条件是式(19)成立.

取  $P$  和  $P^{-1}$  为

$$P = \begin{bmatrix} Y & U \\ U^T & ? \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} X & V \\ V^T & ? \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} XR_1X - X & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_2X - I & R_3 - Y & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -XR_1X & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_2X & -R_3 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ AX & A & 0 & 0 & B & -X & * & * & * & * \\ YA + \bar{r}UB_f CX + UA_f V^T & YA + \bar{r}UB_f C & bUB_f CX & bUB_f C & YB & -I & -Y & * & * & * \\ LX - \bar{r}D_f CX - C_f V^T & L - \bar{r}D_f C & -bD_f CX & -bD_f C & T & 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aX & * & * \\ aUB_f CX & aUB_f C & -aUB_f CX & -aUB_f C & 0 & 0 & 0 & -aX - aY & * & * \\ aD_f CX & aD_f C & -aD_f CX & -aD_f C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

取变换阵

$$\Gamma_2 = \text{diag}\{X^{-1}, I, X^{-1}, I, I, X^{-1}, I, I, X^{-1}, I, I\},$$

$$\begin{bmatrix} R_1 - X^{-1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_2 - X^{-1} & R_3 - Y & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_2 & -R_3 & * & * & * & * & * & * \\ X^{-1}A & X^{-1}A & 0 & 0 & X^{-1}B & -X^{-1} & * & * & * & * \\ YA + \bar{r}UB_f C + UA_f V^T X^{-1} & YA + \bar{r}UB_f C & bUB_f C & bUB_f C & YB & -X^{-1} & -Y & * & * & * \\ L - \bar{r}D_f C - C_f V^T X^{-1} & L - \bar{r}D_f C & -bD_f C & -bD_f C & T & 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aX^{-1} & * & * \\ aUB_f C & aUB_f C & -aUB_f C & -aUB_f C & 0 & 0 & 0 & -aX^{-1} - aY & * & * \\ aD_f C & aD_f C & -aD_f C & -aD_f C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

其中  $X$  和  $Y$  是  $\mathbb{R}^{n \times n}$  阶正定对称阵,  $U$  和  $V$  是满秩阵,  $??$  为任意阵. 构造矩阵  $\Pi_1, \Pi_2$  为

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}, \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & U^T \end{bmatrix}, \quad (29)$$

有  $P\Pi_1 = \Pi_2$ .

取变换阵  $\Gamma_1 = \text{diag}\{\Pi_1, \Pi_1, I, \Pi_1, I, \Pi_1, I\}$ .

并令

$$\Pi_1^T R \Pi_1 = \begin{bmatrix} X R_1 X & X R_2^T \\ R_2 X & R_3 \end{bmatrix},$$

对式(19)进行合同变换, 即左乘  $\Gamma_1^T$  右乘  $\Gamma_1$  得(30):

$$\begin{bmatrix} XR_1X - X & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_2X - I & R_3 - Y & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -XR_1X & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_2X & -R_3 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ AX & A & 0 & 0 & B & -X & * & * & * & * \\ YA + \bar{r}UB_f CX + UA_f V^T & YA + \bar{r}UB_f C & bUB_f CX & bUB_f C & YB & -I & -Y & * & * & * \\ LX - \bar{r}D_f CX - C_f V^T & L - \bar{r}D_f C & -bD_f CX & -bD_f C & T & 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aX & * & * \\ aUB_f CX & aUB_f C & -aUB_f CX & -aUB_f C & 0 & 0 & 0 & -aX - aY & * & * \\ aD_f CX & aD_f C & -aD_f CX & -aD_f C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

对式(30)进行合同变换, 即左乘  $\Gamma_2^T$  右乘  $\Gamma_2$  得式(31):

$$\begin{bmatrix} R_1 - X^{-1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ R_2 - X^{-1} & R_3 - Y & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -R_2 & -R_3 & * & * & * & * & * & * \\ X^{-1}A & X^{-1}A & 0 & 0 & X^{-1}B & -X^{-1} & * & * & * & * \\ YA + \bar{r}UB_f C + UA_f V^T X^{-1} & YA + \bar{r}UB_f C & bUB_f C & bUB_f C & YB & -X^{-1} & -Y & * & * & * \\ L - \bar{r}D_f C - C_f V^T X^{-1} & L - \bar{r}D_f C & -bD_f C & -bD_f C & T & 0 & 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aX^{-1} & * & * \\ aUB_f C & aUB_f C & -aUB_f C & -aUB_f C & 0 & 0 & 0 & -aX^{-1} - aY & * & * \\ aD_f C & aD_f C & -aD_f C & -aD_f C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -aI \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

令  $W = X^{-1}$ ,  $UA_fV^T = MW^{-1}$ ,  $UB_f = Z$ ,  $C_fV^T = NW^{-1}$ , 即得到式(26).

滤波器传递函数为

$$\begin{aligned} T_f &= C_f(zI - A_f)^{-1}B_f + D_f = \\ &= NW^{-1}V^{-T}(zI - U^{-1}MW^{-1} \cdot \\ &\quad V^{-T})^{-1}U^{-1}Z + D_f = \\ &= N(zI - (UV^TW)^{-1}M)^{-1} \cdot \\ &\quad (UV^TW)^{-1}Z + D_f, \end{aligned} \quad (32)$$

那么滤波参数可取为

$$\begin{cases} A_f = (UV^TW)^{-1}M, B_f = (UV^TW)^{-1}Z, \\ C_f = N, D_f = D_f, \end{cases} \quad (33)$$

由  $PP^{-1} = I$ , 有  $YX + UV^T = I$ , 可得

$$UV^TW = W - Y, \quad (34)$$

将式(34)代入式(33)即为式(27). 证毕.

定理3给出了非Gauss噪声输入下的  $H_\infty$  滤波器的设计方法, 它将系统(1)的  $H_\infty$  滤波器存在的充分条件转化为一个线性矩阵不等式的可解问题, 即可通过求解如下的凸优化问题来设计  $H_\infty$  滤波器:

$$\begin{array}{ll} \min & \delta = \gamma^2, \\ \text{s.t. (26)}_{R_1, R_2, R_3, Y, W, M, N, Z, D_f, \delta} & \end{array} \quad (35)$$

相应的滤波器由式(27)来求取.

#### 4 仿真例子(Simulation example)

系统的参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.24 \\ 0.12 & 0.85 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix},$$

$$L = [0.4 \ 0.3], C = [0.2 \ -0.4],$$

$$T = 0.3, \bar{r} = 0.6.$$

利用MATLAB LMI Toolbox对优化问题(35)进行寻优, 得最优  $\gamma = 1.2207$  下的滤波器参数为:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.7947 & -0.2171 \\ 0.1250 & 0.8297 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.6319 \\ -0.1721 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [0.3837 \ 0.2528],$$

$$D_f = 0.2612.$$

假设干扰输入

$$w(k) = \begin{cases} 2, & 20 \leq k < 30, \\ -2, & 50 \leq k < 60, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在这样的干扰输入下, 随机变量  $r(k)$  的实现如图1, 可得系统的状态和滤波器的估计状态, 见

图1. 并可算得  $\|z_f(k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} z_f^T(k)z_f(k)} = 5.3038$ ,  
 $\|w(k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)} = 8.9443$ , 那么  
 $\|z_f(k)\|_2 / \|w(k)\|_2 = 0.5930 < 1.2207$ .

可见本文提出的设计方法是有效的.

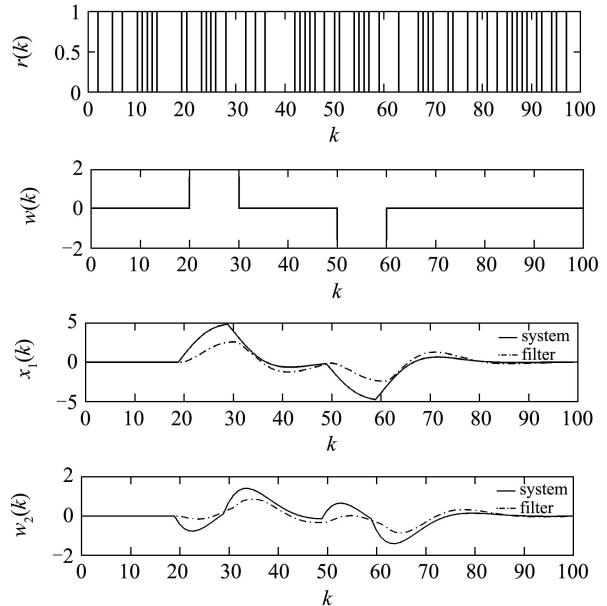


图1 随机变量  $r(k)$ , 外部干扰  $w(k)$ , 系统的状态和滤波器估计的状态

Fig. 1 Stochastic variable  $r(k)$ , the disturbance input  $w(k)$ , the state of system and the state of filter

#### 5 结论(Conclusion)

本文研究了具有一步随机通讯时延的离散网络化系统的  $H_\infty$  滤波器设计. 采用Bernoulli分布的随机变量来描述系统测量数据的一步随机通讯时延. 利用LMI方法给出了全阶滤波器存在的充分条件, 所设计的滤波器使得滤波系统均方指数稳定且具有给定的  $H_\infty$  性能. 文中的方法可推广到不确定系统的滤波器设计.

#### 参考文献(References):

- [1] MALEK-ZAVAREI M, JAMSHIDI M. *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Application*[M]. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1987.
- [2] NILSSON J, BERNHARDSSON B, WITTENMARK B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57–64.
- [3] SRINIVASAGUPTA D, SCHUTTLER H, JASEPH B. Time-stamped model predictive control: an algorithm for control of processes with random delays[J]. *Computer and Chemical Engineering*, 2004, 28(8): 1337–1346.

- [2] OUELHADJ D. *A multi-agent system for the integrated dynamic scheduling of steel production*[D]. Nottingham: University of Nottingham, 2003.
- [3] CHANG S Y, CHANG M R, HONG Y. A lot grouping algorithm for a continuous slab caster in an integrated steel mill[J]. *Production Planning & Control*, 2000, 11(4): 363 – 368.
- [4] TANG L X, LIU J Y, RONG A Y, et al. A mathematical programming model for scheduling steelmaking-continuous casting production[J]. *European J of Operational Research*, 2000, 120(2): 423 – 435.
- [5] 唐立新, 杨自厚, 王梦光. 炼钢-连铸最优炉次计划模型与算法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 440 – 445.  
(TANG Lixin, YANG Zihou, WANG Mengguang. Model and algorithm of furnace charge plan for steelmaking-continuous casting production scheduling[J]. *J of Northeastern University(Natural Science)*, 1996, 17(4): 440 – 445.)
- [6] 唐立新. CIMS 下生产批量计划理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.  
(TANG Lixin. *Theory and Application of Lot-Sizing Problem in CIMS*[M]. Beijing: Science Press, 1999.)
- [7] 玄光男, 程润伟. 遗传算法与工程优化[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [XUAN Guannan, CHENG Runwei. *Genetic Algorithms and Engineering Optimization*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004)
- [8] PIOTRCZYK A K, JASZKIEWICZ A. Pareto simulated annealing: a metaheuristic technique for multiple objective combinatorial problem[J]. *J of Multi-Criteria Decisions Analysis*, 1998, 7(1): 34 – 47.
- [9] ULUNGU P L, TEGHEM J, FORTEMPS P H, et al. MOSA method: a tool for solving multiobjective combinatorial problems[J]. *J of Multi-Criteria Decisions Analysis*, 1999, 8(4): 221 – 236.
- [10] HANSEN P. Variable Neighborhood Search[M]// *Handbook of Metaheuristics*. New York, American: Prentice Hall, 1996.

#### 作者简介:

宁树实 (1973—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为流程工业生产计划及优化调度、智能算法, E-mail: ningshushi@163.com;

王伟 (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为自适应控制、模糊预测控制、流程工业生产过程建模与控制、CIMS, E-mail: wangwei@dlut.edu.cn;

潘学军 (1966—), 男, 副教授, 目前研究方向为工业生产过程建模与控制、智能控制, E-mail: panxj@dlut.edu.cn.

#### (上接第370页)

- [4] KOLMANOVSKY I V, MAIZENBERG T L. Optimal control of continuous-time linear systems with a time-varying, random delay[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 44(1): 119 – 126.
- [5] 谢林柏, 方华京, 纪志成, 等. 时延网络化控制系统的 $H_2/H_\infty$ 混合控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 1020 – 1024.  
(XIE Linbo, FANG Huajing, JI Zhicheng, et al. Mixed  $H_2/H_\infty$  control for networked control systems with delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 1020 – 1024.)
- [6] WANG Z, HO D W C, LIU X. Robust Filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2004, 51(6): 320 – 326.
- [7] YANG F, WANG Z, HUNG Y S, et al.  $H_\infty$  control for networked systems with random communication delays[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2006, 51(3): 511 – 518.

#### 作者简介:

王武 (1973—), 男, 讲师, 博士, 目前研究方向为网络化系统的控制与滤波、非脆弱控制, E-mail: wangwu@fzu.edu.cn;

林琼斌 (1976—), 男, 讲师, 在职博士研究生, 目前研究方向为网络化系统的控制与滤波, E-mail: qiongbinlin@fzu.edu.cn;

杨富文 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、鲁棒滤波、迭代学习控制等, E-mail: ofwyang@fzu.edu.cn.

#### (上接第373页)

- [8] TSATSANIS M K, GIANNAKIS G B. Time-varying system identification and model validation using wavelets[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3512 – 3523.
- [9] DELYON B, JUDISKY A, BENVENSITE A. Accuracy analysis for wavelet approximations[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1995, 6(2): 332 – 348.
- [10] 王耀南. 智能信息处理技术[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.  
(WANG Yaonan. *Intelligent Information Processing Technologies* [M]. Beijing: High Education Press, 2003.)

#### 作者简介:

孙炜 (1975—), 男, 博士, 湖南大学电气与信息工程学院副

教授, 目前研究方向为智能控制理论及应用、电力电子技术、智能机器人控制等, E-mail: david-sun@tom.com;

瞿晓华 (1982—), 男, 湖南大学电气与信息工程学院硕士研究生, 目前研究方向为智能控制, E-mail: zhaixiaohua@163.com;

张路金 (1983—), 男, 湖南大学电气与信息工程学院硕士研究生, 目前研究方向为智能控制, E-mail: zhanglujin@163.com;

王耀南 (1957—), 男, 博士, 湖南大学电气与信息工程学院教授, 目前研究方向为智能控制理论及应用、智能信息处理、智能机器人控制、电力电子、电动汽车控制等, E-mail: yaonan@mail.hun.edu.cn.