

非整数阶系统连续时间域的模拟

林 军¹, POINOT Thierry², 李寿涛¹, TRIGEASSOU Jean-Claude²

(1. 吉林大学 通信工程学院, 吉林 长春 130022;

2. 普瓦捷高等工程师学院 自动化和工业计算机实验室, 法国 普瓦捷 86022)

摘要: 提出了一种致力于非整数阶系统连续时间域的模拟方法. 这种特殊系统的仿真建立在有限频率区间非整数阶积分算子的基础上, 其非整数阶作用仅限于有限频率区域. 然后, 可以定义非整数阶模型的状态方程实现, 它允许近似理想非整数阶系统的连续时间响应. 最后, 通过两个数字仿真例子来验证这种模拟方法.

关键词: 非整数阶系统; 非整数阶算子; 模拟

中图分类号: TP15 **文献标识码:** A

Continuous-time modelling of non-integer systems

LIN Jun¹, POINOT Thierry², LI Shou-tao¹, TRIGEASSOU Jean-Claude²

(1. School of Communication Engineering, Jilin University, Changchun Jilin 130022, China;

2. Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle, ESIP, Poitiers 86022, France)

Abstract: A method is proposed to deal with the continuous-time modelling of fractional systems. The simulation of these particular systems is based on a fractional integrator where the non-integer behavior acts only on a limited spectral band. Then, it is possible to define a state-space representation of the fractional model, which permits to approximate the continuous-time response of an ideal system. Finally, this methodology is validated with two simulated examples.

Key words: fractional systems; fractional operator; modelling

1 引言(Introduction)

非整数阶系统也叫长记忆系统, 其数学构思可以追溯到19世纪初, 长期以来国外许多数学家做了大量的研究. 法国波尔多LAP实验室的Alain OUSTALOU教授20多年前将它引入了自动化领域. 目前, 非整数阶系统离散时间域的解已经由他带领的CRONE研究小组解出^[1,2], 但由于当前数学知识有限, 其连续时间域的解析解还没有研究出来, 专家们都是用数学近似方法得出解析解的近似解^[3].

本文将用有限频率区间非整数阶积分算子构成有限频率区间非整数阶模型, 通过其状态方程的实现, 得到理想非整数阶系统解析解的近似解. 林军博士和Thierry POINOT博士用这个方法已经得到一维非整数阶系统解析解的近似解^[4], 本文将把它推广到多维非整数阶系统.

本文分为3个部分, 第1部分将介绍非整数阶积分和微分算子, 第2部分研究有限频率区间非整数阶模型, 第3部分列举两个数字仿真的例子.

2 非整数阶积分和微分算子 (Fractional integral operator and differential coefficient operator)

2.1 理想非整数阶积分和微分算子(Ideal fractional integral operator and differential coefficient operator)

定义理想非整数 r 阶积分算子为

$$I^{-r}(s) = s^{-r}, r > 0. \quad (1)$$

其波特图的斜率为 $-20r$ dB/dec, 相位与频率无关, 等于 $-r\pi/2$.

用 $I^{-r}(s)$ 的倒数定义理想非整数 r 阶微分算子 $D^r(s)$ 如下:

$$D^r(s) = \frac{1}{I^{-r}(s)} = s^r. \quad (2)$$

其波特图的斜率为 $20r$ dB/dec, 相位与频率无关, 等于 $r\pi/2$.

2.2 无附带整数阶积分和微分的有限频率区间非整数阶积分和微分算子(Fractional integral operator and differential coefficient operator of limited spectral band without integer order integral and differential coefficient)

设无附带整数阶微分的有限频率区间非整数阶微分算子为:

$$D_0^r(s) = C_0 \left(\frac{1+s/\omega_b}{1+s/\omega_h} \right)^r. \quad (3)$$

为了使 $D^r(s)$ 和 $D_0^r(s)$ 在频率区间 $[\omega_b, \omega_h]$ 有相同的相位和增益, 经计算只需 $C_0 = \omega_b^r$.

$D_0^r(s)$ 在频率区间 $[\omega_b, \omega_h]$ 具有微分阶数为 r 的渐近特性; 在有限频率区间非整数阶区间外具有阶数为0的渐近特性.

微分算子 $D_0^r(s)$ 的实现建立在实数零点、极点的循环分配的基础上^[1,2]. 设 $D_{N_c}^r(s)$ 是 $D_0^r(s)$ 的实现, $D_{N_c}^r(s)$ 由 N_c 个相位超前的单位组成:

$$D_{N_c}^r(s) = \omega_b^r \prod_{i=1}^{N_c} \frac{1+s/\omega'_i}{1+s/\omega_i}, \quad (4)$$

一对实数零点、极点为一个单位, 这里, N_c 是单位的个数, 与实数零点或极点的个数一致.

零点、极点的循环分配就是角频率 ω'_i 和 ω_i 满足下列关系:

$$\begin{cases} \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha > 0, \\ \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta > 0, \end{cases} \quad (5)$$

α 和 η 的定义:

由

$$\begin{cases} r = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} = \log_{(\alpha\eta)} \alpha, \\ \frac{\omega_h}{\omega_b} = (\alpha\eta)^{N_c}, \end{cases} \quad (6)$$

得

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha\eta)^r = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{r/N_c}, \\ \eta = (\alpha\eta)^{1-r} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(1-r)/N_c}. \end{cases} \quad (7)$$

角频率 ω'_i 和 ω_i 由式(5)求出, 其中 ω'_1 为:

$$\omega'_1 = \sqrt{\eta} \omega_b. \quad (8)$$

同样, 无附带整数阶积分的有限频率区间非整数阶积分算子 $I_0^{-r}(s)$ 由 $D_0^r(s)$ 的倒数定义. $I_0^{-r}(s)$ 由 $I_{N_c}^{-r}(s)$ 实现, $I_{N_c}^{-r}(s)$ 的参数定义如 $D_{N_c}^r(s)$, 用 $-r$ 代替 r 即可.

2.3 附带一阶积分和微分的有限频率区间非整数阶积分和微分算子(Fractional integral operator and differential coefficient operator of limited spectral band with one order integral and differential coefficient)

理想非整数阶算子 s^{-r} 可以用附带一阶积分的有限频率区间非整数阶积分算子 $I_{-1}^{-r}(s)$ 近似^[4], $I_{-1}^{-r}(s)$ 由一阶积分 s^{-1} 和一个有限频率区间非整数阶微分算子 $D_0^{1-r}(s)$ 构成:

$$I_{-1}^{-r}(s) = \frac{1}{s} D_0^{1-r}(s) = \frac{1}{s} \omega_b^{1-r} \left(\frac{1+s/\omega_b}{1+s/\omega_h} \right)^{1-r}. \quad (9)$$

因此 $I_{-1}^{-r}(s)$ 在频率区间 $[\omega_b, \omega_h]$ 具有积分阶数为 $-r$ 的渐近特性; 在有限频率区间非整数阶区间外具有阶数为 -1 的渐近特性.

设 $I_{N_c}^{-r}(s)$ 是 $I_{-1}^{-r}(s)$ 的实现:

$$I_{N_c}^{-r}(s) = \frac{1}{s} D_{N_c}^{1-r}(s), \quad (10)$$

$I_{N_c}^{-r}(s)$ 状态方程的实现由MATLAB的从传递函数到状态方程的软件得出:

$$\begin{cases} \dot{X} = a_i X + b_i u, \\ y = c_i X. \end{cases} \quad (11)$$

系统 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 能够近似实现非整数阶积分的作用.

附带一阶微分的有限频率区间非整数阶微分算子 $D_1^r(s)$ 由 s 和 $I_0^{-1+r}(s)$ 构成, 它的实现 $D_{N_c}^r(s)$ 由 s 和 $I_{N_c}^{-1+r}(s)$ 构成.

3 有限频率区间非整数阶模型 (Fractional systems model in a limited spectral band)

设理想 (N, r) 阶非整数阶系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{mr}}{\sum_{n=0}^N a_n s^{nr}}, \quad (12)$$

其中: N 是维数, r 是微分的基础实数阶数.

通过用 $D_{N_c}^r(s)$ 近似 s^r , 得到有限频率区间 (N, r) 阶非整数阶模型的传递函数:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m D_{N_c}^r(s)^m}{\sum_{n=0}^N a_n D_{N_c}^r(s)^n}. \quad (13)$$

定义宏观状态为与有限频率区间非整数阶模型的实现有关的状态; 微观状态为与有限频率区间非整数阶积分算子的实现有关的状态; 总状态为所有

积分算子的微观状态构成的状态.

设宏观状态为:

$$X = [x_N \ x_{N-1} \ \cdots \ x_1]^T = \begin{bmatrix} D_1^{r(N-1)} & D_1^{r(N-2)} & \cdots & D_1^{r(0)} \\ N_c & N_c & \cdots & N_c \end{bmatrix}^T x(t).$$

则得 $G(s)$ 的状态方程为:

$$\begin{cases} D_{N_c}^r X = AX + Bu, \\ y = CX, \end{cases} \quad (14)$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T, C = [0 \ \cdots \ 0 \ b_M \ \cdots \ b_0].$$

根据宏观状态的定义, 有:

$$\begin{cases} x_N = I_{N_c}^{-r} (D_{N_c}^r x_N), \\ x_{N-1} = I_{N_c}^{-r} x_N, \\ \vdots \\ x_1 = I_{N_c}^{-r} x_2. \end{cases} \quad (15)$$

设各个微分算子的微观状态分别为 $X_{I1}, X_{I2}, \dots, X_{IN}$, 将式(11)代入式(15)得:

$$\begin{cases} \dot{X}_{IN} = a_I X_{IN} + b_I \cdot D_{N_c}^r X_N, \\ X_N = c_I X_{IN}, \\ \dot{X}_{IN-1} = a_I X_{IN-1} + b_I X_N, \\ X_{N-1} = c_I X_{IN-1}, \\ \vdots \\ \dot{X}_{I1} = a_I X_{I1} + b_I X_2, \\ X_1 = c_I X_{I1}, \end{cases} \quad (16)$$

设总状态为 $X_g = [X_{IN}^T \ X_{IN-1}^T \ \cdots \ X_{I1}^T]^T$, 则

$$\begin{cases} \dot{X}_g = \underbrace{\begin{bmatrix} a_I & & \\ & a_I & \\ & & \ddots \\ & & & a_I \end{bmatrix}}_{A_d} X_g + \underbrace{\begin{bmatrix} b_I & & \\ & b_I & \\ & & \ddots \\ & & & b_I \end{bmatrix}}_{B_d} D_{N_c}^r X, \\ X = \underbrace{\begin{bmatrix} c_I & & \\ & c_I & \\ & & \ddots \\ & & & c_I \end{bmatrix}}_{C_d} X_g, \end{cases} \quad (17)$$

$$D_{N_c}^r X = AX + Bu = AC_d X_g + Bu. \quad (18)$$

最后, 得有限频率区间非整数阶模型的状态方程实现为:

$$\begin{cases} X_g = A_d X_g + B_d \underbrace{D_{N_c}^r}_{A_g} X = \underbrace{(A_d + B_d A C_d)}_{A_g} X_g + \underbrace{B_d B}_{B_g} u, \\ y = CX = \underbrace{C C_d}_{C_g} X_g. \end{cases} \quad (19)$$

4 数字仿真的例子 (Digital simulation examples)

例1 本文做理想 $(1, r)$ 阶系统 $G_i(s)$ 的仿真:

$$G_i(s) = \frac{1}{s^r + 1}, \quad (20)$$

仿真模型用有限频率区间 $(1, r)$ 阶模型:

$$G(s) = \frac{1}{D_{18}^r(s) + 1}, \quad (21)$$

其中非整数阶区间的 $\omega_b = 10^{-5}$ 和 $\omega_h = 10^5$.

改变 $r(0 \leq r \leq 2)$ 值, 获得的阶跃响应如图1.

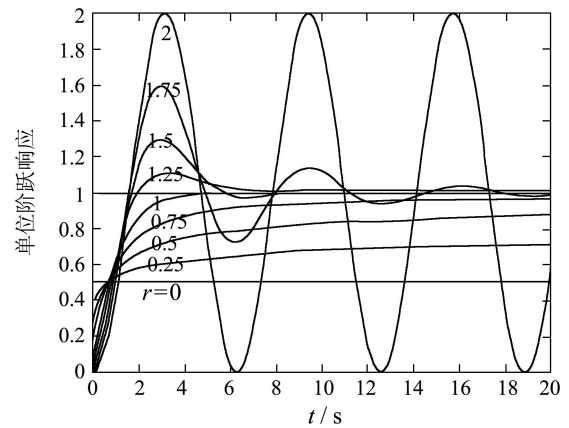


图1 r 值变化时的单位阶跃响应

Fig. 1 Step responses with varying r

观察到当 $2 \geq r > 1$ 时, 阶跃响应为震荡曲线; 当 $1 \geq r > 0$ 时, 为单调非震荡曲线.

例2 仿真对象为理想 $(4, 0.5)$ 阶系统 $G_i(s)$ [5]:

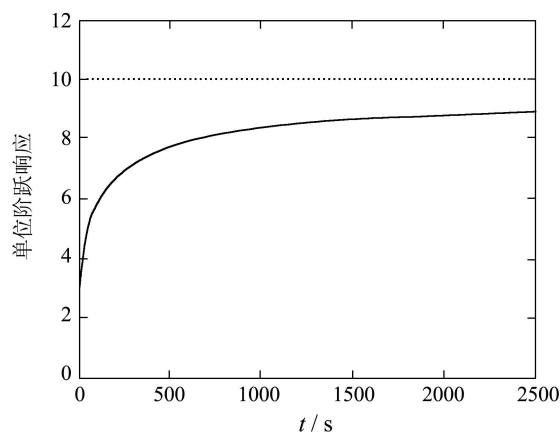
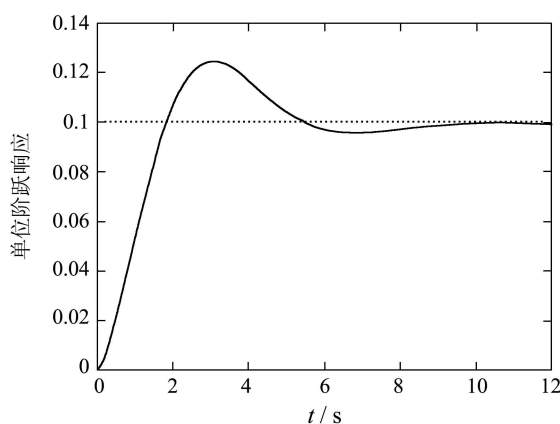
$$G_i(s) = \frac{1}{s^2 + \rho s^{3/2} + s^{1/2} + \rho}, \quad (22)$$

仿真模型为有限频率区间 $(4, 0.5)$ 阶模型:

$$G(s) = \frac{1}{D_{18}^{1/2}(s)^4 + \rho D_{18}^{1/2}(s)^3 + D_{18}^{1/2}(s) + \rho}, \quad (23)$$

其中非整数阶区间的 $\omega_b = 10^{-5}$ 和 $\omega_h = 10^5$.

当 $\rho = 0.1$ 和 $\rho = 10$ 时, 得到它们的阶跃响应分别如图2和图3.

图2 $\rho = 0.1$ 时 $G(s)$ 的单位阶跃响应Fig. 2 Step responses of $G(s)$ with $\rho = 0.1$ 图3 $\rho = 10$ 时 $G(s)$ 的单位阶跃响应Fig. 3 Step responses of $G(s)$ with $\rho = 10$

注意: 对于任何 $\rho > 0$, 理想非整数阶系统 $G_i(s)$ 只具有两个极点 s_1 和 s_2 [1,5]:

$$s_{1,2} = e^{\pm \frac{2\pi}{3}j} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j. \quad (24)$$

观察到 $\rho = 0.1$ 时阶跃响应为非振荡曲线, $\rho = 10$ 时为振荡曲线. 因此, 此非整数阶系统的动力特性不只取决于它的极点, 非整数阶部分的影响是极其重要的.

5 结论 (Conclusion)

本文介绍了一种非整数阶系统的连续时间域的模拟方法, 其实质是用高阶整数阶模型模拟非整数阶系统. 由于非整数阶积分算子附带一阶积分算子, 就使有限频率区间非整数阶模型的初始值与终值与理想非整数阶系统一致. 只要非整数阶区间足够大, 模拟结果就是正确的. 后续工作是根据这种模拟方法研究相应的系统辨识的方法[4].

参考文献 (References):

- [1] OUSTALOUP A. *La Dérivation Non Entière: Théorie, Synthèse et Applications*[M]. Paris, France: Hermes, 1995.
- [2] LE LAY L. *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*[D]. Bordeaux, France: Thèse de l'université Bordeaux I, 1998.
- [3] MILLER K S, ROSS B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*[M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1993.
- [4] LIN J, POINOT T, TRIGEASSOU J C, et al. Parameter estimation of fractional systems: application to the modelling of a lead-acid battery[C] // *Proc of 12th IFAC, Symposium on System Identification (SYSID'2000)*. Santa Barbara, California, USA: IFAC Press, 2000.
- [5] HELESCHWITZ D, MATIGNON D. Réalisations et approximations diffusives d'oscillateurs avec amortissements viscoélastiques[C] // *JDA'99, Journées Doctorales d'Automatique*. Nancy, France: Presses Universitaires de Nancy, 1999.

作者简介:

林 军 (1967—), 男, 吉林大学控制系副教授, 硕士和博士学位在法国LAI实验室获得, 研究自动控制理论、系统建模与辨识和非整数阶系统, E-mail: linj@jlu.edu.cn;

POINOT Thierry (1969—), 男, 法国LAI实验室讲师, 研究Moments的应用、系统建模与辨识和非整数阶系统, E-mail: poinot@esip.univ-poitiers.fr;

李寿涛 (1975—), 男, 吉林大学控制系讲师, 研究自动控制理论和系统仿真、智能机械与机器人控制, E-mail: list@jlu.edu.cn;

TRIGEASSOU Jean-Claude (1946—), 男, 法国LAI实验室教授, 研究Moments的应用、系统建模与辨识和非整数阶系统等多项领域, E-mail: trigeassou@esip.univ-poitiers.fr.