

利用状态反馈增益变化设计广义系统 H_∞ 可靠控制器

陈跃鹏¹, 周祖德², 曾春年¹, 张庆灵³, 刘焕彬⁴

(1. 武汉理工大学 自动化学院, 湖北 武汉 430070; 2. 武汉理工大学 机电学院, 湖北 武汉 430070;

3. 东北大学 系统所, 辽宁 沈阳 110004; 4. 黄冈师范学院 数学系, 湖北 黄冈 438000)

摘要: 通过对状态反馈两种增益变化形式的分析, 研究广义系统 H_∞ 可靠控制器的设计问题. 给出基于状态反馈增益变化的广义系统 H_∞ 可靠控制器的定义, 得到了执行器故障模型. 用线性矩阵不等式(LMI)方法, 研究两种状态反馈增益变化的广义系统 H_∞ 控制器存在的充分条件和设计方法. 进而, 针对执行器的不同故障情形, 用LMI方法给出广义系统存在基于状态反馈增益变化的 H_∞ 可靠控制器的充分条件. 最后, 给出了优化广义系统 H_∞ 可靠控制器的设计算法.

关键词: 广义系统; 执行器故障; 增益变化; H_∞ 可靠控制器; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

State-feedback H_∞ reliable controller design for descriptor systems with controller gain variations

CHEN Yue-peng¹, ZHOU Zu-de², ZENG Chun-nian¹, ZHANG Qing-ling³, LIU Huan-bin⁴

(1. School of Automation, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430070, China;

2. School of Mechatronic Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei 430070, China;

3. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;

4. Department of Mathematics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei 438000, China)

Abstract: By analyzing two kinds of state feedback gain variations forms, the H_∞ reliable controller design problem for descriptor systems is discussed in this paper. Firstly, the definition of H_∞ reliable controller based on state feedback gain variations for descriptor systems is given, and the failure models of actuators are also yielded. Using the approach of linear matrix inequalities (LMI), the sufficient conditions and the design method are then studied to show that there exist H_∞ controllers of two kind of state feedback gain variations forms for descriptor systems. Furthermore, aiming at the different actuator failures, the sufficient conditions that there exist H_∞ reliable controllers based on state feedback gain variations are obtained using LMI method. Finally, the optimal algorithm of design H_∞ reliable controller for descriptor systems is given.

Key words: descriptor system; actuator failure; gain variations; H_∞ reliable controller; LMI

1 引言(Introduction)

在过去的几十年里, 正常系统 H_∞ 控制问题的研究取得了很大进展^[1], 人们提出了多种方法来处理 H_∞ 控制问题, 如频域法^[2]、状态空间法^[3]等. H_∞ 控制弥补了控制理论在实际应用中的某些不足, 其研究模型具有广泛的实用性. H_∞ 控制现已发展成为当今极重要的控制理论分支之一. 广义系统因其特有的结构性质一直在控制领域中占有重要地位^[4], 学者们也开始关注广义系统的 H_∞ 控制问题^[5].

由于广义系统丰富的实际背景和容错控制问题的重要性, 可靠容错控制是近年来控制界研究的一大热点^[6], 而有关广义系统 H_∞ 可靠容错控制的研究成果还不多见.

在过去, 人们设计控制器时, 大多假设系统具有不确定性, 而控制器是确定的^[7]. 最近, Keel和Bhattacharyya在文献[8]中指出, 控制器增益的不确定性经常出现在如: 控制器性能衰减、系统运行初时的控制器微调等情形. 有关控制器增益的

不确定情形逐渐被学者关注^[9].

由于实际系统中执行器故障是无法避免的,因此,在系统设计中,将执行器的可能故障考虑进去是有必要的. 本文将要研究的问题是设计基于状态反馈增益变化的广义系统容错控制器,使得系统无论是正常运转还是部分执行器出现故障,对应的闭环广义系统都容许且满足给定的性能指标.

2 系统描述(Systems description)

考虑广义系统

$$\begin{cases} E \frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{12} u, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $w \in \mathbb{R}^r$ 是外部干扰, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $z \in \mathbb{R}^s$ 是受控输出, 矩阵 $E, A, B_1, B_2, C_1, D_{12}$ 具有适当的维数且 $\text{rank } E < n$. 设计具有增益变化的状态反馈

$$u = (K + \Delta K)x, \quad (2)$$

其中: K 是反馈增益矩阵, ΔK 是增益摄动. 针对式(2), 考虑两种摄动形式:

i)

$$\Delta K = [k_{ij} \delta_{ki}]_{m \times n} = \delta_k K, \delta_k = \text{diag}\{\delta_{k1} \cdots \delta_{km}\}, \quad (3)$$

这里 $K = [k_{ij}]_{m \times n}$, δ_{ki} 是不确定参数, 满足

$$|\delta_{ki}| \leq \bar{\delta}_{ki} < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \quad (4)$$

$\bar{\delta}_{ki}$ 是常数, 令 $\bar{\delta} = \text{diag}\{\bar{\delta}_{k1}^2 \bar{\delta}_{k2}^2 \cdots \bar{\delta}_{km}^2\}$.

注1 这种摄动形式常常是由于控制器性能衰减所导致的^[9].

ii)

$$\Delta K = DF(t)G, \quad F^T(t)F(t) \leq I, \quad (5)$$

其中 D 和 G 是适当维数的常数矩阵, $F(t)$ 是未知的有界扰动.

注2 这种摄动形式常常出现在系统运行初时的控制器微调^[9].

于是得到闭环广义系统

$$E \frac{dx}{dt} = \bar{A}x + B_1 w, \quad z = \bar{C}x, \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_2(K + \Delta K), \\ \bar{C} &= C_1 + D_{12}(K + \Delta K). \end{aligned}$$

3 准备知识(Preliminary knowledge)

用 $\Omega \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ 表示广义系统(1)中易出现故障的执行器真子集, $\bar{\Omega} = \{1, 2, \cdots, m\} - \Omega \neq \emptyset$ 是它的补, 其中 $\emptyset$ 是空集, L_k 是执行器切换阵. 不妨假设 $\Omega = \{q + 1, q + 2, \cdots, m\}$, 这样 $L_k =$

$\text{diag}\{I_q \ 0\}$. 即广义系统(1)中, 前 q ($0 \leq q < m$) 个执行器正常, 其余的 $m - q$ 个执行器易出现故障. 记

$$\begin{aligned} B_2 &= [B_{2\bar{\Omega}} \ B_{2\Omega}], \quad D_{12} = [D_{12\bar{\Omega}} \ D_{12\Omega}], \\ D &= [D_{\bar{\Omega}}^T \ D_{\Omega}^T]^T, \quad \bar{\delta} = \text{diag}\{\bar{\delta}_{\bar{\Omega}} \ \bar{\delta}_{\Omega}\}, \end{aligned}$$

设 $\varphi \subseteq \Omega$ 是实际出现故障的执行器子集. 由文献[10], 不失一般性, 假设此时执行器切换阵为 $L_{\varphi} = \text{diag}[I_{\bar{\varphi}} \ 0]$. 记 u_{φ} 为对应集合 φ 的故障执行器. 类似地, 有

$$\begin{aligned} B_2 &= [B_{2\bar{\varphi}} \ B_{2\varphi}], \quad D_{12} = [D_{12\bar{\varphi}} \ D_{12\varphi}], \\ D &= [D_{\bar{\varphi}}^T \ D_{\varphi}^T]^T, \quad u = \begin{bmatrix} u_{\bar{\varphi}} \\ u_{\varphi} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{\bar{\varphi}} \\ K_{\varphi} \end{bmatrix}, \\ \Delta K &= \begin{bmatrix} \Delta K_{\bar{\varphi}} \\ \Delta K_{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \delta_k = \begin{bmatrix} \delta_{k\bar{\varphi}} & 0 \\ 0 & \delta_{k\varphi} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{\bar{\varphi}} & 0 \\ 0 & \bar{\delta}_{\varphi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中 $\bar{\varphi} = \bar{\Omega} \cup (\Omega - \varphi)$. 于是执行器故障情况下的闭环广义系统为

$$E \frac{dx}{dt} = \bar{A}_{\bar{\varphi}} x + B_1 w, \quad z = \bar{C}_{\bar{\varphi}} x, \quad (7)$$

当增益摄动为式(3)时, $\bar{A}_{\bar{\varphi}} = A + B_{2\bar{\varphi}}(K_{\bar{\varphi}} + \delta_{k\bar{\varphi}} K_{\bar{\varphi}})$, $\bar{C}_{\bar{\varphi}} = C_1 + D_{12\bar{\varphi}}(K_{\bar{\varphi}} + \delta_{k\bar{\varphi}} K_{\bar{\varphi}})$; 当增益摄动为式(5)时, $\bar{A}_{\bar{\varphi}} = A + B_{2\bar{\varphi}}(K_{\bar{\varphi}} + D_{\bar{\varphi}} F(t)G)$, $\bar{C}_{\bar{\varphi}} = C_1 + D_{12\bar{\varphi}}(K_{\bar{\varphi}} + D_{\bar{\varphi}} F(t)G)$.

定义1 如果在执行器正常或部分出现故障的情况下, 状态反馈(2)能使闭环广义系统(6)和(7)都容许(正则、稳定且无脉冲), 且 $\|T(s)\|_{\infty} < \gamma$ 和 $\|T_F(s)\|_{\infty} < \gamma$, 其中 $\gamma > 0$ 预先给定, 则称(2)是广义系统(1)的具有增益变化的 H_{∞} 可靠控制器. 这里 $T(s) = \bar{C}(sE - \bar{A})^{-1}B_1$, $T_F(s) = \bar{C}_{\bar{\varphi}}(sE - \bar{A}_{\bar{\varphi}})^{-1}B_1$.

不失一般性, 假设广义系统(1)中的矩阵 E 具有如下形式^[11]

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中: I_r 是 $r \times r$ 的单位矩阵, r 是矩阵 E 的秩.

本文将要讨论的问题是: 对广义系统(1)设计基于状态反馈增益变化分别为式(3)和式(5)的 H_{∞} 可靠控制器.

4 主要结论(Main result)

在本文的讨论中, 不妨假设广义系统(1)满足:

A1) $D_{12}^T[C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]^{[1]}$;

A2) 广义系统 $(E, A, B_{2\bar{\Omega}})$ 能控.

其中假设 A1) 是为了简化运算, A2) 是广义系统(1)设计 H_{∞} 可靠控制器所必须满足的.

下面给出广义系统(1)在增益变化分别为式(3)和式(5)时的 H_∞ 可靠控制器设计方法.

4.1 增益变化为式(3)的情形 (Case of gain variations (3))

定理 1 对于广义系统(1), 若存在 $0 < \varepsilon < 1$ 及具有如下形式的矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_s & 0 \\ Q_1 & Q_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (9)$$

其中: $Q_s \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $Q_s = Q_s^T > 0$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$, $Q_f \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, Q_f 可逆, 满足LMI

$$\begin{bmatrix} Q^T A^T + A Q + B_{2\bar{\Omega}} \alpha_{0\bar{\Omega}} B_{2\bar{\Omega}}^T & B_1 & Q^T C_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ C_1 Q & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

其中

$$\alpha_{0\bar{\Omega}} = (1 - \varepsilon)^{-1} (\varepsilon I - (I + \varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon) \bar{\delta}_{\bar{\Omega}})^{-1}) < 0. \quad (11)$$

则

$$u = (I + \delta_k) K x, \quad K = -(1 - \varepsilon)^{-1} R_1^{-1} B_2^T P, \quad (12)$$

其中

$$R_1 = \varepsilon^{-1} \bar{\delta} + (1 - \varepsilon)^{-1} I, \quad P = Q^{-1}$$

是广义系统(1)具有状态反馈增益变化为式(3)的 H_∞ 可靠控制器.

定理1的证明需要下面两个引理:

引理 1 当广义系统(1)的部分执行器出现故障时, 若存在 $0 < \varepsilon < 1$ 及式(9)的矩阵 Q 满足LMI(10), 则

$$u_{\bar{\varphi}} = (I + \delta_{k\bar{\varphi}}) K_{\bar{\varphi}} x, \quad K_{\bar{\varphi}} = -(1 - \varepsilon)^{-1} R_{1\bar{\varphi}}^{-1} B_{2\bar{\varphi}}^T Q^{-1}, \quad (13)$$

其中

$$R_{1\bar{\varphi}} = \varepsilon^{-1} \bar{\delta}_{\bar{\varphi}} + (1 - \varepsilon)^{-1} I, \quad (14)$$

使得故障闭环广义系统(7)容许, 且 $\|T_F(s)\|_\infty < \gamma$.

由于篇幅有限, 证明略.

引理 2 对于广义系统(1), 若存在 $0 < \varepsilon < 1$ 及式(9)的矩阵 Q 满足LMI

$$\begin{bmatrix} Q^T A^T + A Q + B_2 \alpha_0 B_2^T & B_1 & Q^T C_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ C_1 Q & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$\alpha_0 = (1 - \varepsilon)^{-1} (\varepsilon I - (I + \varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon) \delta)^{-1}) < 0.$$

则式(12)使得闭环广义系统(6)容许, 且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$.

证 证明略.

注 3 对于状态反馈增益变化为式(3)的情形: 由式(12)设计的控制器能使正常闭环广义系统(6)容许, 且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ (见引理2); 当系统出现故障时, 所使用的控制器仍然是式(12), 但由于此时的切换矩阵 $L_{\bar{\varphi}} = \text{diag}[I_{\bar{\varphi}} \ 0]$, 因此只有 $u_{\bar{\varphi}}$ 部分的信号能反馈给闭环系统(7). 由引理1, 此时系统(7)容许, 且 $\|T_F(s)\|_\infty < \gamma$. 对于不同的故障, 控制器中真正起作用的部分可能不一样, 但都是式(12)中的部分信号. 式(12)能保证系统正常以及对于 Ω 中的各种故障情形, 闭环广义系统(6)和(7)都容许且满足给定的性能指标. 对于每一种故障情况, 系统会自动地反馈(12)中的部分信号, 无需每次重新计算控制器. 所以式(12)是广义系统(1)的具有增益变化的 H_∞ 可靠控制器. 对于状态反馈增益变化为式(5)的情形类似.

4.2 增益变化为式(5)的情形 (Case of gain variations (5))

为了给出广义系统(1)在状态反馈增益变化为式(5)的 H_∞ 可靠控制器设计, 有必要先介绍下面两个引理:

引理 3 当广义系统(1)的部分执行器出现故障时, 若存在 $\varepsilon > 0$ 及具有形式(9)的矩阵 Q 满足LMI

$$\begin{bmatrix} Q^T A^T + A Q - B_{2\bar{\Omega}} B_{2\bar{\Omega}}^T & B_1 & Q^T G^T & Q^T C_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ G Q & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ C_1 Q & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$R_2 = I - \varepsilon D_{12} D D^T D_{12}^T > 0. \quad (16)$$

则故障闭环广义系统(7)容许, 且 $\|T_F(s)\|_\infty < \gamma$. 此时

$$K_{\bar{\varphi}} = -B_{2\bar{\varphi}}^T Q^{-1}. \quad (17)$$

证 证明略.

引理 4 对于广义系统(1), 若存在 $\varepsilon > 0$ 及式(9)的矩阵 Q 满足式(16)及LMI

$$\begin{bmatrix} Q^T A^T + A Q - B_2 B_2^T & B_1 & Q^T G^T & Q^T C_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ G Q & 0 & -\varepsilon I & 0 \\ C_1 Q & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0.$$

则闭环广义系统(6)容许, 且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$. 此时

$$K = -B_2^T Q^{-1}.$$

证 与引理3的证明类似, 推导从略.

有了引理3和引理4, 下面给出状态反馈增益变化为式(5)时的 H_∞ 可靠控制器设计.

定理 2 对于广义系统(1), 若存在 $\varepsilon > 0$ 及式(9)的矩阵 Q 满足 LMI(15) 和式(16), 则

$$u = \begin{bmatrix} -B_{2\varphi}^T Q^{-1} + D_{\varphi} F(t) G \\ -B_{2\varphi}^T Q^{-1} + D_{\varphi} F(t) G \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} u_{\varphi} \\ u_{\varphi} \end{bmatrix}$$

是广义系统(1)的具有状态反馈增益变化为式(5)的 H_{∞} 可靠控制器.

证 与定理1的证明类似, 推导从略.

注 4 正如系统存在一些未知摄动一样, $u(t)$ 中也可能存在一些摄动, 因此在对广义系统(1)设计具有增益变化的状态反馈(2)时, 关键是要确定反馈增益矩阵 K , 以满足 H_{∞} 可靠控制器的要求^[12].

5 算法(Algorithm)

通过求解如下优化问题, 可以优化状态反馈增益变化为式(3)情形的 H_{∞} 可靠控制器.

定理 3 对于广义系统(1), 若优化问题

$$\min \rho$$

满足约束条件:

i) 式(10); ii) $\alpha_{0\bar{\Omega}} < 0$; iii) $Q_s > 0$

有解 Q 及 $\alpha_{0\bar{\Omega}}$, 则状态反馈增益变化为式(3)的 H_{∞} 可靠控制器可由式(12)给出. 此时 $\|T(s)\|_{\infty} < \sqrt{\rho}$ 和 $\|T_F(s)\|_{\infty} < \sqrt{\rho}$, 这里 $\rho = \gamma^2$.

证 与定理1的证明类似, 推导从略.

定理3将广义系统(1)具有状态反馈增益变化的 H_{∞} 可靠控制器设计问题转化为一个带有 LMI 约束的凸优化问题, 可用 LMI 工具箱求解.

注 5 由定理3求出 $\alpha_{0\bar{\Omega}}$, 然后再由式(11)解得 ε , 这样就可以得到广义系统(1)具有状态反馈增益变化的 H_{∞} 可靠控制器.

注 6 类似地, 可以通过优化算法设计状态反馈增益变化为式(5)的 H_{∞} 可靠控制器.

6 结论(Conclusion)

本文通过考虑状态反馈的两种增益变化形式, 研究广义系统 H_{∞} 可靠控制器设计问题. 用 LMI 方法给出广义系统存在 H_{∞} 可靠控制器的充分条件, 并且还得到了相应 H_{∞} 可靠控制器设计的优化算法.

参考文献(References):

- [1] ZHOU K, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996.
- [2] FRANCIS B A. *A Course in H_{∞} Control Theory*[M]. New York: Springer-verlag, 1987.
- [3] DOYLE J C, GLOVER K, LIMEBEER D J, et al. State space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 831 – 846.
- [4] ZHANG Q L, LIU W Q, DAVID H. A Lyapunov approach to analysis of discrete singular systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 45(3): 237 – 247.
- [5] 陈跃鹏, 张庆灵, 周祖德, 等. 广义系统 H_{∞} 可靠控制[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(3): 407 – 412.
(CHEN Yuepeng, ZHANG Qingling, ZHOU Zude, et al. H-infinity reliable control for descriptor systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 407 – 412.)
- [6] CHEN Y P, ZHANG Q L, ZHAI D. Reliable controller design with mixed H_2/H_{∞} performance for descriptor systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(1): 262 – 266.
- [7] GAO Z W. Analysis for performance sensitivity of systems with structured uncertainty[J]. *Control and Intelligent Systems*, 1998, 26(3): 73 – 76.
- [8] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust fragile or optimal?[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(5): 1098 – 1105.
- [9] 关新平, 张群亮. 广义区间系统的弹性保成本控制[J]. *电机与控制学报*, 2002, 6(1): 84 – 87.
(GUAN Xinping, ZHANG Qunliang. Resilient guaranteed cost control for generalized interval[J]. *Electric Machines and Control*, 2002, 6(1): 84 – 87.)
- [10] KIM S W, SEO C J, KIM B K. Robust and reliable H_{∞} controllers for discrete-time systems with parameter uncertainty and actuator failure[J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(12): 1249 – 1258.
- [11] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [12] DU H P, LAM J, SZE K Y. Non-fragile output feedback H_{∞} vehicle suspension control using genetic algorithm[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2003, 16(7-8): 667 – 680.

作者简介:

陈跃鹏 (1971—), 男, 教授, 主要研究方向为广义系统故障诊断与容错控制, E-mail: chen Yuepengneu@163.com;

周祖德 (1946—), 男, 武汉理工大学校长, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为故障诊断、先进制造技术的理论与应用等;

曾春年 (1958—), 男, 武汉理工大学教授, 主要研究方向为智能控制;

张庆灵 (1956—), 男, 东北大学理学院院长, 控制理论与控制工程学科教授, 博士生导师, 主要研究方向为分散控制、鲁棒控制与广义系统理论等;

刘焕彬 (1956—), 男, 黄冈师范学院副院长, 教授, 主要研究方向为应用数理统计、随机控制等.