文章编号：1000−8152(2007)03−0435−05

PPR型平面欠驱动机械臂的点位控制

刘盛平[1]，吴立成[2]，陆 震[1]

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083;

2. 清华大学 计算机科学与技术系智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 研究了PPR型平面欠驱动机械臂(第1个关节和第2个关节是移动关节且是受控的, 第3个关节为被动的转动关节)在水平面运动的点位控制问题. 首先, 通过输入和坐标变换方法, 系统的动力学方程被变换成二阶链式形式. 其次, 提出用反步法推导出保证系统指数渐近稳定的控制器. 仿真结果表明, 机械臂能够稳定地从任意初始位置运动到任意给定的位置, 从而证明了控制器设计的有效性.

关键词: 欠驱动; 平面机械臂; 反步法; 点位控制

中图分类号: TP242 **文献标识码**: A

Point-to-point control of a planar PPR under-actuated manipulator

LIU Sheng-ping[1], WU Li-cheng[2], LU Zhen[1]

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
2. State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems,
Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The point-to-point control problem of a planar PPR under-actuated manipulator is considered in this paper. The PPR under-actuated manipulator with the first and the second prismatic actuated joints and the third passive revolute joint can only move in the horizontal plane. Firstly, the motion equations are transformed into the second order chained form by using input and coordinate transformations method. Secondly, the paper proposed an exponential asymptotic stable controller for the system by integrator backstepping method. Simulation results indicate that the proposed controller can effectively stabilize the manipulator system from any initial position to any desired position.

Key words: under-actuated; planar manipulator; backstepping; point-to-point control

1 引言(Introduction)

欠驱动(under-actuated)机械臂是控制输入数目少于系统广义坐标数目的机械系统. 它具有能耗少, 重量轻以及成本低的特点. 近年来对这种系统的研究已经成为机器人技术研究的重要方向之一. 但由于驱动器的减少, 使该系统动力学方程中具有不可积分的加速度约束, 极大地增加了对这类系统的控制难度. H. Arai[1]最初建议在欠驱动机械臂的被动关节添加制动器来控制整个机械臂, 它的思路是当被动关节由制动器固定时, 就能在不改变被动关节位置的条件下对主动关节实现控制, 而制动器不起作用时, 被动关节则通过动态耦合实现控制, 反复混合这两种模式, 整个机械臂的位形就能被控制. 为此R. Mukherjee等人[2]就建议在空间机器人中利用这种方法. 这种方法的实现需要在被动关节处加上制动器, 可是G. Oriolo等[3]指出利用欠驱动机器人约束方程的非完整特性, 即使在被动关节处没有驱动器, 仍然能够实现机器人的位置控制.

针对被动关节上既无驱动器也无制动器的欠驱动机械臂的研究主要包括: 平衡流形控制, PTP(point-to-point)控制, 轨迹跟踪控制等. A. D. Luca等[4,5]研究了第1个关节受驱动, 第2个关节为被动的2R(两个关节都为转动关节), PR(第1个关节为移动关节, 第2个关节为转动关节)机械臂的稳定性问题. H. Arai[6]利用构造轨迹方法证明了3R型平面欠驱动机器机械臂是完全可控的, 并且通过非线性反馈控制来稳定被构造轨迹, 试验结果也证明了该构造方法的有效性. J. I. Imura等[7]研究了PPR型

收稿日期: 2005−09−06; 收修改稿日期: 2006−06−06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50375007, 50405002).

平面欠驱动机械臂的PTP控制. Mahindrakar等[8]利用新方法同样研究了该机械臂的点位控制. 国内对欠驱动机器人的研究不是很多, 何广平等[9,10]对欠驱动冗余度空间机器人的控制作了一些工作. 虽然如此, 目前还没有通用的理论来研究欠驱动机器人的运动规划和控制. 每一种方法一般只能适用于具体的欠驱动系统.

本文研究了一个在水平面上运动的PPR型欠驱动机械臂的点位控制问题, 该机械臂包括两个移动关节和一个转动关节, 并且转动关节上既无驱动器也无制动器. 通过坐标和输入变换, 使将系统的动力学方程变换成二阶链式系统形式, 对链式系统, M. C. Laiou[11], Y. P. Tian等[12]已经做了不少研究. 本文采用反步法来为系统设计稳定的控制器. 这种方法直观、简单.

2 PPR平面欠驱动机械臂动力学方程(Dynamic equations of planar PPR under-actuated manipulator)

研究如图1所示的在水平面运动的PPR型平面欠驱动机械臂, 该机械臂的第1个和第2个关节是相互正交的移动关节, 第3个关节是转动关节, 并且两个移动关节是主动关节, 转动关节是被动关节.

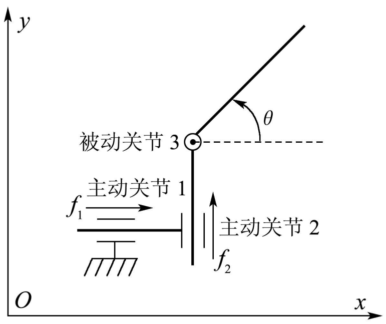

图 1 PPR型平面欠驱动机械臂

Fig. 1 Planar PPR under-actuated manipulator

设$\boldsymbol{q} = (x, y, \theta)^{\mathrm{T}}$为第3个关节的位置矢量, 即$x, y$为关节三的位置, θ为连杆三的方位. f_1, f_2为两个移动关节的控制输入, m_1, m_2, m_3分别表示3个连杆的质量, I_3为第3个连杆对其质心的转动惯量, d为关节三到第3个连杆质心的距离. 根据拉格朗日方程, 得如下PPR平面欠驱动机械臂的动力学方程:

$$\begin{cases} M_{123}\ddot{x} - M_3\ddot{\theta}\sin\theta - M_3\dot{\theta}^2\cos\theta = f_1, \\ M_{23}\ddot{y} + M_3\ddot{\theta}\cos\theta - M_3\dot{\theta}^2\sin\theta = f_2, \\ -M_3\ddot{x}\sin\theta + M_3\ddot{y}\cos\theta + I\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $M_{123} = m_1 + m_2 + m_3, M_{23} = m_2 + m_3$,以及$I = I_3 + m_3 d^2, M_3 = m_3 d$.

3 动力学方程变换(Transformations of dynamic equations)

为了利用反步法设计使系统稳定的控制器, 下面采用坐标和输入变换将系统动力学方程(1)等效成链式系统形式.

将下面的输入变换代入式(1):

$$\begin{cases} f_1 = -M_3\dot{\theta}^2\cos\theta + (M_{123} - \dfrac{M_3^2}{I}\sin^2\theta)u_x + \\ \quad \dfrac{M_3^2}{I}u_y\sin\theta\cos\theta, \\ f_2 = -M_3\dot{\theta}^2\sin\theta + \dfrac{M_3^2}{I}u_x\sin\theta\cos\theta + \\ \quad (M_{23} - \dfrac{M_3^2}{I}\cos^2\theta)u_y. \end{cases} \tag{2}$$

得

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_x, \\ \ddot{y} = u_y, \\ \ddot{\theta} = \gamma(u_x\sin\theta - u_y\cos\theta). \end{cases} \tag{3}$$

其中: $\gamma = \dfrac{M_3}{I}, u_x, u_y$是新的控制输入.

进一步, 将以下的坐标以及输入变换代入式(3):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (x - x_d + \dfrac{\cos\theta}{\gamma} - \dfrac{\cos\theta_d}{\gamma})\cos\theta_d + \\ \quad (y - y_d + \dfrac{\sin\theta}{\gamma} - \dfrac{\sin\theta_d}{\gamma})\sin\theta_d, \\ \varepsilon_2 = -(x - x_d + \dfrac{\cos\theta}{\gamma} - \dfrac{\cos\theta_d}{\gamma})\sin\theta_d + \\ \quad (y - y_d + \dfrac{\sin\theta}{\gamma} - \dfrac{\sin\theta_d}{\gamma})\cos\theta_d, \\ \varepsilon_3 = \tan(\theta - \theta_d). \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_x = (u_1\sec(\theta - \theta_d) + \dfrac{\dot{\theta}^2}{\gamma})\cos\theta + \\ \quad \dfrac{u_2\cos^2(\theta-\theta_d) - 2\dot{\theta}^2\tan(\theta-\theta_d)}{\gamma}\sin\theta, \\ u_y = (u_1\sec(\theta - \theta_d) + \dfrac{\dot{\theta}^2}{\gamma})\sin\theta - \\ \quad \dfrac{u_2\cos^2(\theta-\theta_d) - 2\dot{\theta}^2\tan(\theta-\theta_d)}{\gamma}\cos\theta. \end{cases} \tag{5}$$

得如下形式的方程:

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon}_1 = u_1, \\ \ddot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 u_1, \\ \ddot{\varepsilon}_3 = u_2. \end{cases} \tag{6}$$

下面将(6)改写成状态方程的形式, 令

$$\boldsymbol{y} = (\varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \dot{\varepsilon}_2, \varepsilon_3, \dot{\varepsilon}_3), \tag{7}$$

则方程(6)可以改写如下成两个子系统的形式:

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot y_1=y_2,\\ \dot y_2=u_1,\end{cases}\quad \Sigma_2:\begin{cases}\dot y_3=y_4,\\ \dot y_4=u_1y_5,\\ \dot y_5=y_6,\\ \dot y_6=u_2.\end{cases}\tag{8}$$

4 控制器设计(Controller design)

4.1 子系统Σ_1的控制器设计(Controller design for the subsystem Σ_1)

由于Σ_1是一个线性可控系统, 很容易设计下面的控制器:

$$u_1=-K(y_2+ky_1)-ky_2.\tag{9}$$

其中$K>k>0$为常数增益, 就能使得子系统Σ_1的原点是渐近稳定的.

但是在子系统Σ_2稳定趋近于原点之前, 如果$u_1=0$时, 那么子系统Σ_2的控制输入u_2 就成为奇异的. 下面来找出使$u_1=0$的y_1,y_2的初始条件域.

将式(9)代入子系统Σ_1得

$$u_1(t)=C_k\mathrm{e}^{-kt}-C_K\mathrm{e}^{-Kt}.\tag{10}$$

其中

$$\begin{cases}C_k=\dfrac{Kk^2y_1(0)+k^2y_2(0)}{K-k},\\ C_K=\dfrac{K^2ky_1(0)+K^2y_2(0)}{K-k}.\end{cases}\tag{11}$$

如果$u_1=0$, 从式(10)可得如下不等式:

$$0\leqslant \mathrm{e}^{-(K-k)t}=C_k/C_K\leqslant 1, t\in[0,+\infty).\tag{12}$$

由式(12)可知, 如果y_1,y_2的初始条件域满足式(12), 那么$u_1=0$.

图2为$K=4,k=1$时, y_1,y_2在各种初始条件下的运动轨迹, 粗线为奇异线, 可以看出在不同的初始条件下, 有的轨线要经过奇异线, 有的不经过, 凡是经过奇异线的就表示系统Σ_2稳定趋近于原点之前, $u_1=0$. 不经过奇异线表示系统Σ_2稳定趋近于原点之前, $u_1\neq 0$. 图3的阴影(不包括两条奇异线)描述了收敛域.

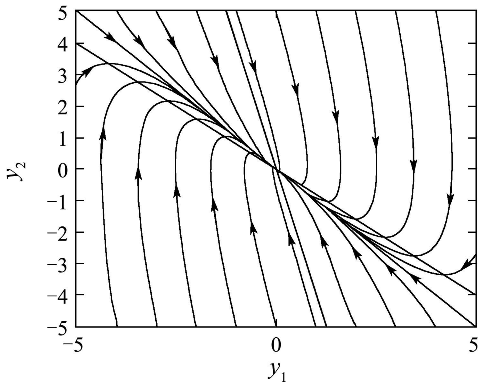

图 2　y_1和y_2的运动轨迹

Fig. 2　Trajectories of y_1 and y_2

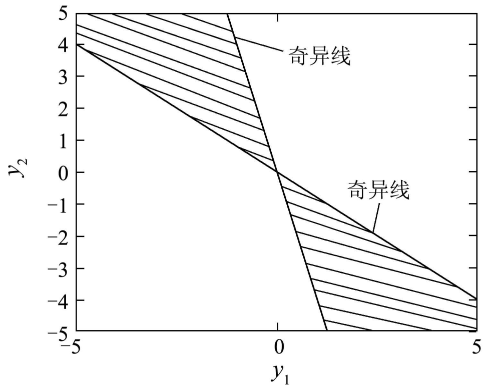

图 3　控制器设计的收敛域

Fig. 3　Convergence region of the proposed controller

故在y_1,y_2的初始条件域不在图3所示的收敛域中时(即子系统Σ_2稳定趋近于原点之前$u_1=0$), 可以先通过控制输入$u_1=\mathrm{const}, u_2=0$, 使$y_1,y_2$进入收敛域以此来避免子系统$\Sigma_2$的控制输入$u_2$成为奇异.

4.2 子系统Σ_2的控制器设计(Controller design for the subsystem Σ_2)

对于Σ_2子系统的控制器设计, 利用反步法推导使其渐近稳定于原点的的控制规律u_2.

定义4个误差变量

$$\begin{cases}\delta_1=y_3,\\ \delta_2=y_4-\alpha_1(y_3),\\ \delta_3=y_5-\alpha_2(y_3,y_4),\\ \delta_4=y_6-\alpha_3(y_3,y_4,y_5).\end{cases}\tag{13}$$

式中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为待定的虚拟反馈.下面在每一步构造一个Lyapunov函数, 使每一状态分量具有适当的渐近特性. 式(13)本质上为一微分同胚, 因此为镇定原系统Σ_2, 只需要镇定原系统状态$y_{i+3},\alpha_i(i=1,2,3)$间的误差即可.

第1步　对δ_1关于时间求导一次得

$$\dot\delta_1=y_4=-c_3\delta_1+c_3y_3+y_4.\tag{14}$$

式中$c_3>k>0$为增益常数. 取$\alpha_1=-c_3y_3$并定义Lyapunov函数$V_1=\dfrac{1}{2}\delta_1^2$, 则

$$\begin{cases}\dot\delta_1=-c_3\delta_1+\delta_2,\\ \dot\delta_2=u_1y_5-\dot\alpha_1,\\ \dot V_1=-c_3\delta_1^2+\delta_1\delta_2.\end{cases}\tag{15}$$

从式(15)可以看出, 当$\delta_2=0$时, $\delta_1=0$是渐近稳定的. 但是一般$\delta_2\neq 0$, 因此引入虚拟控制α_2使误差δ_2具有期望的渐近性态. 为此进行下一步设计.

第2步　定义Lyapunov函数$V_2=V_1+\dfrac{1}{2}\delta_2^2$, 取$\alpha_2=\dfrac{\dot\alpha_1-\delta_1-c_4\delta_2}{u_1}$, 式中$c_4>k>0$为增益常数,

则

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = -c_3\delta_1 + \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 = -\delta_1 - c_4\delta_2 + u_1\delta_3, \\ \dot{\delta}_3 = y_6 - \dot{\alpha}_2, \\ \dot{V}_2 = -c_3\delta_1^2 - c_4\delta_2^2 + u_1\delta_2\delta_3. \end{cases} \tag{16}$$

在函数α_2的选取中, 系数$c_3 > k, c_4 > k$的目的是保证$\dot{\alpha}_1 - \delta_1 - c_4\delta_2 = o(u_1)$.

从式(16)可以看出, 当$\delta_3 = 0$时, $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$是渐近稳定的. 但是一般$\delta_3 \neq 0$, 因此引入虚拟控制$\alpha_3$使误差$\delta_3$具有期望的渐近性态. 为此进行下一步设计.

第3步 定义Lyapunov函数$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\delta_3^2$, 取$\alpha_3 = \dot{\alpha}_2 - \delta_2 u_1 - c_5\delta_3$, 式中$c_5 > 0$为增益常数, 则

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = -c_3\delta_1 + \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 = -\delta_1 - c_4\delta_2 + u_1\delta_3, \\ \dot{\delta}_3 = -u_1\delta_2 - c_5\delta_3 + \delta_4, \\ \dot{\delta}_4 = u_2 - \dot{\alpha}_3, \\ \dot{V}_2 = -c_3\delta_1^2 - c_4\delta_2^2 - c_5\delta_3^2 + \delta_3\delta_4. \end{cases} \tag{17}$$

从式(17)可以看出, 当$\delta_4 = 0$时, $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$是渐近稳定的. 但是一般$\delta_4 \neq 0$, 因此可以选取控制$u_2$使误差$\delta_4$具有期望的渐近性态. 为此进行第4步设计.

第4步 定义Lyapunov函数$V_4 = V_3 + \frac{1}{2}\delta_4^2$, 选取反馈控制规律$u_2 = \dot{\alpha}_3 - \delta_3 - c_6\delta_3, c_6 > 0$为增益常数, 则

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = -c_3\delta_1 + \delta_2, \\ \dot{\delta}_2 = -\delta_1 - c_4\delta_2 + u_1\delta_3, \\ \dot{\delta}_3 = -u_1\delta_2 - c_5\delta_3 + \delta_4, \\ \dot{\delta}_4 = -\delta_3 - c_6\delta_4, \\ \dot{V}_2 = -c_3\delta_1^2 - c_4\delta_2^2 - c_5\delta_3^2 - c_6\delta_4^2. \end{cases} \tag{18}$$

从式(18)可以看出, 当$u_2 = \dot{\alpha}_3 - \delta_3 - c_6\delta_4$时, $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0, \delta_4 = 0$是渐近稳定的. 同时虚拟反馈在选取系数$c_3 > k, c_4 > k$时也是渐近趋近于零. 那么$\Sigma_2$在$y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0, y_6 = 0$是渐近稳定的.

综上所述, 在上述反步法中给定的虚拟控制及如下反馈控制

$$\begin{cases} u_1 = -K(y_2 + ky_1) - ky_2, \\ u_2 = \dot{\alpha}_3 - \delta_3 - c_6\delta_3. \end{cases} \tag{19}$$

作用下子系统Σ_1, Σ_2为渐近稳定的.

5 模型仿真(Simulation)

仿真模型如图1所示, 机械臂的三根连杆是均质杆且质量分别为$m_1 = m_2 = 2$ kg, $m_3 = 1$ kg, 关节三到第3个连杆质心的距离$d = 0.5$ m, 连杆三对其质心的转动惯量$I_3 = 0.0833$ (kg·m^2), 选取常数增益系数$K = 4, k = 1, c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 3$. 设系统状态变量的初始值以及期望值分别为$(x(0), y(0), \theta(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\theta}(0)) = (1.2, 0.5, \pi/6, -2, 0, 0)$以及$(x_d, y_d, \theta_d, \dot{x}_d, \dot{y}_d, \dot{\theta}_d) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, 根据初始条件, 通过(4), 可以计算出$(\varepsilon_1(0), \varepsilon_2(0), \varepsilon_3(0), \dot{\varepsilon_1}(0), \dot{\varepsilon_2}(0), \dot{\varepsilon_3}(0)) = (1.1107, 0.8333, 0.5774, 0, 0, 0)$ 利用(19)设计出的稳定控制器, 得到仿真结果如图4和图5所示.

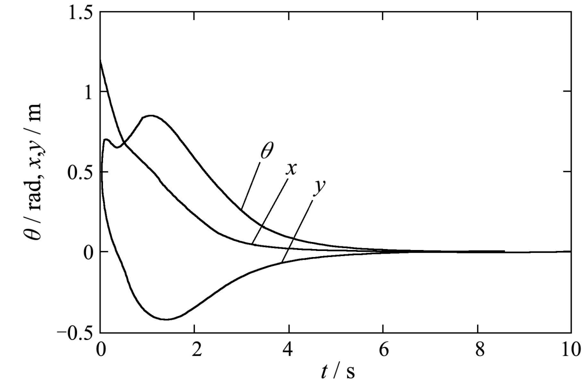

图 4 PPR型平面欠驱动机械臂各关节的运动轨迹

Fig. 4 Trajectories of planar PPR under-actuated manipulator

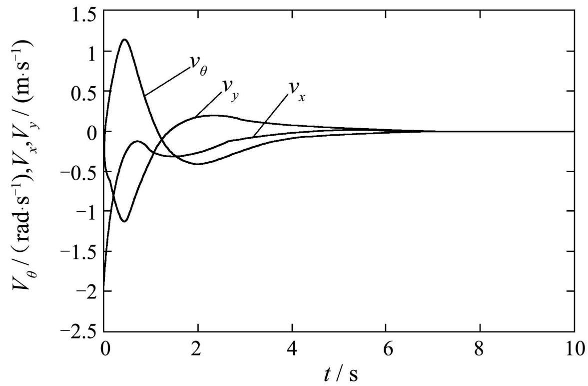

图 5 PPR型平面欠驱动机械臂各关节的速度函数

Fig. 5 Joint velocities of planar PPR under-actuated manipulator

结果显示, 第4节设计的控制器能够稳定地使系统从初始状态运动到给定状态.

6 结论(Conclusion)

研究了PPR型平面欠驱动机械臂的点位控制问题. 经过输入和坐标变换, 将系统的分成两个子系统. 利用反步法推导出使得系统指数渐近稳定的控制器. 通过PPR型平面欠驱动机械臂进行仿真, 仿真结果显示该机械臂能够稳定地从一个点运动到给定的点, 从而也证明了控制器设计的有效性.

参考文献(References):

[1] ARAI H, TACHI S. Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1991, 7(4): 528 – 534.

[2] MUKHERJEE R, CHEN D. Control of free-flying underactuated space manipulators to equilibrium manifolds[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1993, 9(5): 561 – 570.

[3] ORIOLO G, NAKAMURA Y.Free-joint manipulator: motion control under second-order nonholonomic constraints[C] // *Proc IEEE/RSJ Int Workshop on Intelligent Robots and Systems*. Orlando, American: IEEE Press, 1991: 1248 – 1253.

[4] LUCA A D, MATTONE R, ORIOLO G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2000, 10(4): 181 – 198.

[5] LUCA A D, IANNITTI S, ORIOLO G. Stabilization of a PR planar underactuated robot[C] // *Proc of 2001 IEEE Int Conf on Robotics & Automation*. Seoul, Korea: IEEE Press, 2001: 2090 – 2095.

[6] ARAI H, TANIE K, SHIROMA N. Nonholonomic control of a three-dof planar underactuated manipulator[J]. *IEEE Trans on Robotics and Automation*, 1998, 14(5): 681 – 695.

[7] IMURA J, KOBAYASHI K, YOSHIKAWA T. Nonholonomic control of 3 link planar manipulator with a free Joint[C] // *Proc of the 35th IEEE Int Conf Decision Control*. Kobe, Japan: IEEE Press, 1996: 1435 – 1436.

[8] MAHINDRAKAR A D, BANAVAR R N, REYHANOGLU M. Discontinuous feedback control of a 3 link planar PPR underactuated manipulator[C] // *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando, American: IEEE Press, 2001: 2424 – 2429.

[9] 何广平, 陆震, 王凤翔. 欠驱动冗余度空间机器人优化控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 305 – 310.
(HE Guangping, LU Zhen, WANG Fengxiang. Optimal control of under-actuated redundant space-robot system[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(2): 305 – 310.)

[10] 何广平, 陆震, 王凤翔. 被动冗余度空间机器人动力学控制[J]. 空间科学学报, 2001, 21(1): 73 – 80.
(HE Guangping, LU Zhen, WANG Fengxiang. Dynamical control of under actuated redundant space robots[J]. *Chinese J of Space Science*, 2001, 21(1): 73 – 80.)

[11] LAIOU M C, ASTOLFI A.Quasi-smooth control of chained systems[C] // *Proc of American Control Conference*. San Diego, American, 1999: 3940 – 3944.

[12] TIAN Y P, LI S H. Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1139 – 1146.

作者简介:

刘盛平　(1978—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为欠驱动机器人、柔性机器人动力学及控制等, E-mail: liushengping@asee.buaa.edu.cn;

吴立成　(1972—), 男, 助理研究员, 目前研究方向为机器人学、智能控制等, E-mail: wulicheng@tsinghua.edu.cn;

陆　震　(1942—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为机器人学、智能控制等, E-mail: zhenluh@ buaa.edu.cn.