第 24 卷第 3 期
2007 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 3
Jun. 2007

文章编号：1000−8152(2007)03−0465−06

时滞切换系统稳定性分析与镇定—Lyapunov函数方法

丛 屾[1]， 费树岷[1]， 徐君祥[2]

(1. 东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096; 2. 东南大学 数学系, 江苏 南京 210096)

摘要: 利用 Lyapunov函数方法克服“相空间”与“事件空间”之间的不一致, 以考虑时滞切换系统稳定性的分析与综合. 其一, 对将多Lyapunov函数方法推广至时滞情形, 由此给出子系统稳定性准则及切换序列的约束条件, 使整个系统是指数稳定的. 其二, 对于不稳定的时滞子系统, 提出了保证观测误差在任意切换作用下指数衰减的观测器设计方法, 并构造出基于估计状态的切换序列, 使状态变量指数收敛.

关键词: 切换系统; 时滞; 指数稳定性; Halanay型不等式

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

On stability analysis and stabilization of switched systems with delay–Lyapunov function approach

CONG Shen[1]， FEI Shu-min[1]， XU Jun-xiang[2]

(1. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;
2. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: Lyapunov function approach is introduced to investigate the stability of switched systems with delay for overcoming the discordance between the “phase space” and “event space”, and yields results both in analysis and synthesis. Firstly, the multiple Lyapunov functions approach is generalized for the case of time-delay, from which the stability criterion of subsystems and the constraint condition on switching sequence are established for preserving the exponential stability of the switched system. Secondly, for the unstable subsystems with delay, the state-observer is designed to guarantee the exponential decay of the estimation error undergoing arbitrary switching action, and the switching law is also constructed from the estimated state to make state variables be exponentially convergent to zero.

Key words: switched systems; time-delay; exponential stability; Halanay-type inequality

1 引言 (Introduction)

时滞与切换是影响系统稳定性的重要因素, 二者相互耦合可能导致复杂的动力学行为. 切换系统通常描述为若干子系统在切换信号驱动下构成的动力学系统, 其稳定性问题一般可归结为[1]:

问题 1 寻求保证系统在任意切换序列作用下一致渐近稳定的条件;

问题 2 寻求切换序列的约束, 系统在满足约束的切换序列驱动下一致渐近稳定;

问题 3 若所有子系统均不稳定, 设计切换控制使得整个系统渐近稳定.

逐段光滑Lyapunov函数与多Lyapunov函数方法是切换系统稳定性研究中具有代表性的成果. 由于切换系统的复杂性, 正定二次Lyapunov函数[2,3]已不敷研究之需. 欧氏空间中包围原点的凸多面体的Minkowskii泛函构成了完备, 且逐段光滑的Lyapunov函数类[4], 直观几何理解为:任何形式Lyapunov函数的等势面所界定的不变集可以由凸多面体从内部任意逼近, 反之则不然. 基于此类Lyapunov函数及相关计算技术分别得到关于问题(1)与问题(3)的充分必要条件[5,6].

泛函微分方程的相空间为无限维函数空间, 而触发切换的“事件”为有限维欧氏空间中元素, 这种不一致性是推广切换系统稳定性研究方法的困难所在. 文献[7, 8]分别基于Lyapunov-Krasovskii泛函与Lyapunov-Razumikhin函数方法将文献[9]中关于一般度量空间上非连续混杂动力系统稳定性分析的充分性结论推广至时滞情形. 泛函与函数方法的差别体现于构造原理与分析技巧方面. 对于具有时不变系数矩阵的时滞系统, 借助将离散型时滞转化

收稿日期: 2005−04−04; 收修改稿日期: 2006−02−23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574066).

为分布型时滞的变换及相应的泛函构造技巧可以导出各种与时滞相关的稳定性判据[10]; 对于时变问题, 这种变换效应的积累致使稳定性分析失去基本的因果性. 在泛函微分方程不变性原理的构造性研究及非连续系统稳定性分析中[11], Lyapunov函数则体现了特有的灵活性. 在泛函方法的框架下, 切换系统稳定性研究的许多方法难以推广, 例如多Lyapunov函数方法根植于其在欧氏空间中的几何相容性[1], 而对于一般的Lyapunov-Krasovskii泛函, 这种相容性并不成立.

本文利用Lyapunov函数方法的灵活性, 并结合微分不等式技巧, 以考虑时滞切换系统稳定性的基本问题. 其一, 将多Lyapunov函数方法推广至时滞情形, 由此刻画出子系统稳定性准则与切换序列的约束条件, 使整个系统是指数稳定性的; 其二, 设计状态观测器重构系统状态, 并由此构造镇定切换序列, 使状态变量是指数衰减的.

2 记号与引理 (Notations and Lemmas)

$C_{n,r} := C([-r,0],\mathbb{R}^n)$表示由$[-r,0]$映入$\mathbb{R}^n$的具有一致范数的连续函数构成的Banach空间, $x_t \in C_{n,r}$含义为$x_t(\theta) := x(t+\theta)$, $\theta \in [-r,0]$; $|\cdot|, \|\cdot\|$ 分别表示$\mathbb{R}^n, C_{n,r}$上的度量. 对于实对称矩阵, $\lambda_{\max}(\cdot), \lambda_{\min}(\cdot)$表示其最大与最小特征值. D^+为实值连续函数的右导数算子.

引理 1 (Halanay不等式[12]) 若 $r>0$, $a>b>0$, $u(t)\geqslant 0$为连续实值函数, 满足微分不等式$D^+u(t) \leqslant -au(t)+b\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t+\theta)$, $t\geqslant t_0$, 则$u(t)\leqslant \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0$, $\mu>0$满足$\mu-a+b\mathrm{e}^{\mu r}=0$.

引理 2 如果$r>0$, $a>b>0$, $c>0$, $h>0$; $u(t)\geqslant 0, 0<w(t)\leqslant c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0$ 分别为连续实值函数与可测实值函数, 满足微分不等式$D^+u(t)\leqslant -au(t)+b\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t+\theta)+w(t)$, $t\geqslant t_0$, 那么对于给定初始条件$u_{t_0}\in C_{n,r}$, 存在$p(u_{t_0})\geqslant 1$, 使得$u(t)\leqslant p\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0$. 其中$\lambda := \min\{\mu,\lambda\}$, $\mu>0$满足$\mu-a+b\mathrm{e}^{\mu r}=0$.

证 不妨设$\mu\neq h$. $f(\mu)=\mu-a+b\mathrm{e}^{\mu r}$, $\mu>0$为严格增函数, 因此存在下述两种情形.

情形 1 若$h>\mu$, 则$h>a-b\mathrm{e}^{hr}$. 设$v(t) := \dfrac{c}{h-(a-b\mathrm{e}^{hr})}\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0$满足非齐次微分方程

$$\dot v(t)+(a-b\mathrm{e}^{hr})v(t)=-c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)},\ t\geqslant t_0,$$

从而

$$D^+u(t)\leqslant -au(t)+b\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t+\theta)-[\dot v(t)+(a-b\mathrm{e}^{hr})v(t)],\quad t\geqslant t_0,$$

即

$$\begin{aligned}&D^+[u(t)+v(t)]\leqslant\\&-a[u(t)+v(t)]+b[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t+\theta)+\mathrm{e}^{hr}v(t)]=\\&-a[u(t)+v(t)]+b\sup_{t-r\leqslant\theta\leqslant t}[u(\theta)+v(\theta)], t\geqslant t_0.\end{aligned}$$

依据引理1知

$$u(t)+v(t)\leqslant \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}[u(t_0+\theta)+v(t_0+\theta)].$$

进而对于$t\geqslant t_0$成立

$$u(t)\leqslant \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}[u(t_0+\theta)+\frac{c\mathrm{e}^{hr}}{h-(a-b\mathrm{e}^{hr})}]\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}. \tag{1}$$

情形 2 若$h<\mu$, 则$h<a-b\mathrm{e}^{hr}$. 设$v(t) := \dfrac{c}{(a-b\mathrm{e}^{hr})-h}\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0$满足非齐次微分方程

$$\dot v(t)+(a-b\mathrm{e}^{hr})v(t)=c\mathrm{e}^{h(t-t_0)},\ t\geqslant t_0.$$

给定$u_{t_0}\in C_{n,r}$, 只有下述可能性之一成立

① 存在$0<l<k$, 使得

$$lv(t)\leqslant u(t)\leqslant kv(t), t\geqslant t_0;$$

② 存在$\tau\geqslant t_0$, 使得$u(t)>v(t), t\geqslant \tau-r$.

若二者均不成立, 则由$v(t)$指数收敛性推知$u(t)$存在振荡间断点, 与其连续性相矛盾.

如果①成立, 那么依据$u(t)$连续性可知, 存在$p(u_{t_0})\geqslant 1$, 使得对于$t\geqslant t_0$成立

$$u(t)\leqslant p\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}. \tag{2}$$

如果②成立, 那么对于$t\geqslant\tau$成立$D^+u(t)\leqslant -au(t)+b\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t+\theta)+[\dot v(t)+(a-b\mathrm{e}^{hr})v(t)]$, 即

$$\begin{aligned}&D^+[u(t)-v(t)]\leqslant\\&-a[u(t)-v(t)]+b[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t+\theta)-\mathrm{e}^{hr}v(t)]=\\&-a[u(t)-v(t)]+b[\sup_{t-r\leqslant\theta\leqslant t}u(\theta)-\sup_{t-r\leqslant\theta\leqslant t}v(\theta)]\leqslant\\&-a[u(t)-v(t)]+b\sup_{t-r\leqslant\theta\leqslant t}[u(\theta)-v(\theta)], t\geqslant\tau.\end{aligned}$$

依据引理1知

$$0<u(t)-v(t)\leqslant \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}[u(\tau+\theta)-v(\tau+\theta)]\mathrm{e}^{-\mu(t-\tau)},\quad t\geqslant\tau,$$

[1]拓扑空间$\{\Omega,\tau\}$上非负连续实值函数u,v具有几何相容性, 如果存在$0<\alpha<\beta$, 使得$\alpha v(\omega)\leqslant u(\omega)\leqslant\beta v(\omega), \forall\omega\in\Omega$.

由此得到

$$u(t)\leqslant v(t)+\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}[u(\tau+\theta)-v(\tau+\theta)]\mathrm{e}^{-h(t-\tau)}\leqslant \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}[u(\tau+\theta)+c\mathrm{e}^{-(\tau-t_0)}]\mathrm{e}^{-h(t-\tau)}, t\geqslant\tau. \tag{3}$$

根据$u(t)$在$[t_0,\tau]$上的一致连续性, 可知在此情形下结论成立.

通过上述各种情形的讨论及式(1)~(3), 得证.

3 多Lyapunov函数方法稳定性分析 (Stability analysis via the multiple Lyapunov functions approach)

考虑由线性时滞子系统

$$\dot{x}(t)=A_ix_t(0)+A_{i1}x_t(-r), t\geqslant t_0, \quad i\in\{1,\cdots,N\}. \tag{4a}$$

在取值于指标集$\{1,\cdots,N\}$的右连续切换信号$s(t), t\geqslant t_0$驱动下构成的切换系统. 其中$x\in\mathbb{R}^n, r>0$为状态变量与时滞常数, $\{A_i,A_{i1}\}_{i=1}^N$为适当维数矩阵. 根据切换信号随时间的演化将其表述为序列形式

$$s:=\big\{(t_0,\pi(0)),\cdots(t_k,\pi(k)),\cdots\mid t_i<t_j, i<j; \lim_{k\to\infty}t_k=\infty\big\}. \tag{4b}$$

其中$t_k,\pi(k)\in\{1,\cdots,N\}, k=1,2,\cdots$,为切换时刻与相应的切换信号取值.

切换系统为非连续的时变系统, 其时变特性取决于切换序列的行为. 本文的目的是寻求子系统(4a)的稳定性判据与切换序列(4b)的约束条件, 使得整个系统保持指数稳定性.

引理 3　若存在常数$\gamma>1$, 使得关于对称矩阵$P>0$的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\gamma P & PA_1\\ A_1'P & -P\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

可解, 则时滞系统$\dot{x}(t)=Ax_t(0)+A_1x_t(-r), t\geqslant t_0$零解是指数稳定的.

证　构造Lyapunov函数$V(x)=x'Px$, 根据不等式(5)知, 其沿着方程解轨线的导数满足如下估计

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)=2x_t'(0)P[Ax_t(0)+A_1x_t(-r)]\leqslant\\ &x_t'(0)[A'P+PA+PA_1P^{-1}A_1'P]x_t(0)+\\ &x_t'(-r)P\times x_t(-r)\leqslant\\ &-\gamma V(t)+\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V(t+\theta), t\geqslant t_0,\end{aligned}$$

由引理1, $V(t)\leqslant\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}, t\geqslant t_0$; $\mu>0$满足$\mu-a+b\mathrm{e}^{\mu r}=0$. 因此,

$$|x(t)|\leqslant[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}]^{\frac{1}{2}}\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{\frac{-\mu}{2}(t-t_0)}, t\geqslant t_0.$$

证毕.

定理 1　如果存在常数$\{\gamma_i>1\}_{i=1}^N$, 使得关于对称矩阵$\{P_i>0\}_{i=1}^N$的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A_i'P_i+P_iA_i+\gamma_iP_i & P_iA_{i1}\\ A_{i1}'P_i & -P_i\end{bmatrix}<0, i\in\{1,\cdots,N\}$$

分别可解, 那么存在常数$T_D>0$, 使得在满足如下约束条件的切换序列

$$s:=\big\{(t_0,\pi(0)),\cdots(t_k,\pi(k)),\cdots, \mid\inf_{k\geqslant 0}(t_{k+1}-t_k)\geqslant T_D\big\}$$

驱动下, 系统(4)保持指数稳定.

证　构造Lyapunov函数$\{V_i(x)=x'P_ix\}_{i=1}^N$. 设$\chi:=\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}\{\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)}|i\neq j\}\geqslant 1$, 则$V_i(x)\leqslant\chi V_j(x); \forall x\in\mathbb{R}^n, i,j\in\{1,\cdots,N\}$.

设$\{\mu_i>0\}_{i=1}^N$分别满足$\{\mu-\gamma_i+\mathrm{e}^{\mu r=0}\}_{i=1}^N$. 依据引理3, 对于$k=0,1,\cdots$, 成立

$$V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-)\leqslant\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(k)}(t_k+\theta)\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(k)}(t_{k+1}-t_k)}. \tag{6}$$

对于$\theta\in[-r,0]$, 存在如下估计

$$\begin{aligned}&V_{\pi(k)}(t_k+\theta)\leqslant\chi V_{\pi(k-1)}(t_k+\theta)\leqslant\\ &\chi[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)]\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(k-1)}(t_k+\theta-t_{k-1})}\leqslant\\ &\chi[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)]\times\\ &\mathrm{e}^{r\mu_{\pi(k-1)}}\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(k-1)}(t_k-t_{k-1})}.\end{aligned} \tag{7}$$

依据式(6)(7)可知

$$\begin{aligned}&V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-)\leqslant\\ &\chi[\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)]\times\\ &\mathrm{e}^{r\mu_{\pi(k-1)}}\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(k-1)}(t_k-t_{k-1})}\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(k)}(t_{k+1}-t_k)}.\end{aligned}$$

设$\bar{\mu}:=\max\{\mu_1,\cdots,\mu_N\}$, $\underline{\mu}:=\min\{\mu_1,\cdots,\mu_N\}$, 递归得到

$$\begin{aligned}&V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-)\leqslant\\ &\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\chi^k\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{e}^{r\mu_{\pi(i)}}\prod_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-\mu_{\pi(i)}(t_{i+1}-t_i)}\leqslant\\ &\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}V_{\pi(0)}(t_0+\theta)[\chi\mathrm{e}^{r\bar{\mu}}]^k\mathrm{e}^{-\underline{\mu}(t_{k+1}-t_0)}.\end{aligned} \tag{8}$$

选取$T_D>\frac{r\bar{\mu}+\ln\chi}{\underline{\mu}}$. 若切换序列满足约

束$t_{k+1}-t_k>T_D; k=0,1,\cdots$, 则可知

$$k\leqslant\frac{t_k-t_0}{T_D}; k=0,1,\cdots. \tag{9}$$

设$\lambda:=\dfrac{-1}{2}(\dfrac{r\bar{\mu}+\ln\chi}{T_D}-\underline{\mu})>0$, 依据式(8)(9)得到

$$\begin{aligned}&V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-)\leqslant\\&\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}V_{\pi(0)}(t_0+\theta)[\chi\mathrm{e}^{r\bar{\mu}}]^{\frac{t_k-t_0}{T_D}}\mathrm{e}^{-\underline{\mu}(t_{k+1}-t_0)}=\\&\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\exp[(\frac{r\bar{\mu}+\ln\chi}{T_D}-\underline{\mu})(t_{k+1}-t_0)].\end{aligned} \tag{10}$$

根据式(10)推知

$$|x(t_{k+1})|\leqslant\chi^{\frac{1}{2}}\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\lambda(t_{k+1}-t_0)}.$$

证毕.

若$A_{i1}=0, i\in\{1,\cdots,N\}, r=0$, 即时滞项消失, 则定理1的结论与无时滞条件下的多Lyapunov函数方法的分析结论是一致的[1].

4 基于估计状态的镇定镇定切换控制 (Stabilizing switching control constructed from the estimated state)

考虑两个不稳定线性时滞子系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A_ix_t(0)+A_{i1}x_t(-r),\\ y(t)=C_ix_t(0); t\geqslant t_0, i\in\{1,2\},\end{cases} \tag{11a}$$

即$\left\{\det\left(\lambda I_n-A_i-A_{i1}\mathrm{e}^{-r\lambda}\right)=0\right\}_{i=1}^2$存在位于复平面右半闭平面的根[11]. 假设时滞常数精确已知, $y\in\mathbb{R}^p$为量测输出, $\{C_i\}_{i=1}^2$为适当维数矩阵. 本文的目的是构造取值于$\{1,2\}$的切换控制

$$s(t)=\varPi\left(\hat{x}(t),s(t^-)\right), t\geqslant t_0, \tag{11b}$$

使得在其驱动下系统状态指数衰减; 其中估计状态$\hat{x}(t)$取自全维观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t)=&A_{s(t)}\hat{x}_t(0)+A_{s(t)1}\hat{x}_t(-r)+\\&L_{s(t)}[C_{s(t)}\hat{x}_t(0)-y(t)], t\geqslant t_0,\end{aligned} \tag{12a}$$

$\{L_i\}_{i=1}^2$为适当维数的观测器反馈增益矩阵. 观测误差$\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t), t\geqslant t_0-r$的动力学方程为

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\left[A_{s(t)}+L_{s(t)}C_{s(t)}\right]\tilde{x}_t(0)+A_{s(t)1}\tilde{x}_t(-r). \tag{12b}$$

观测误差随切换序列的演化过程是不可预见的, 因此其在任意切换序列作用下的稳定性是镇定切换控制(11b)存在的必要条件.

引理 4 若子系统观测器反馈增益矩阵取为$\{L_i:=P^{-1}W_i\}_{i=1}^2$, 其中对称矩阵$P>0, Q>0$与矩阵$\{W_i\in\mathbb{R}^{n\times p}\}_{i=1}^2$满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\varXi_i & rPA_{i1}\\ rA_{i1}'P & -rQ\end{bmatrix}<0, i\in\{1,2\}, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}&\{\varXi_i:=\\&(A_i+A_{i1})'P+P(A_i+A_{i1})+W_iC_i+C_i'W_i'\}_{i=1}^2,\end{aligned}$$

则存在常数$\beta\geqslant1,\nu>0$, 使得$|\tilde{x}(t)|\leqslant\beta\|\tilde{x}_{t_0}\|\mathrm{e}^{-\nu(t-t_0)}, t\geqslant t_0$在任意切换序列作用下成立.

证 设$\{\bar{A}_i:=A_i+A_{i1}+L_iC_i\}_{i=1}^2$. 观测误差方程(12b)在任意切换作用下的稳定性等价于下列泛函微分方程的指数稳定性

$$\begin{aligned}&\dot{\tilde{x}}(t)=\bar{A}x(t)\tilde{x}_t(0)+A_1(t)\tilde{x}_t(-r)=\\&[\bar{A}(t)+A_1(t)]\tilde{x}_t(0)+A_1(t)z_t(-r), t\geqslant t_0,\end{aligned}$$

其中: $\bar{A}(t):=\sum\limits_{i=1}^2m_i(t)\bar{A}_i, A_1(t):=\sum\limits_{i=1}^2m_i(t)A_{i1}$; $\{0\leqslant m_i(t)\leqslant1\}_{i=1}^2$为Lebesgue可测函数, 且$m_1(t)+m_2(t)=1, t\geqslant t_0$; $z_t(\theta):=\tilde{x}_t(\theta)-\tilde{x}_t(0), -r\leqslant\theta\leqslant0$, 满足$z_t(0)\equiv0, t\geqslant t_0$.

由(13)的线性与严格性可知, 存在$0<l<1$, 使得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^2m_i\bar{A}_i'P+P\sum_{i=1}^2m_i\bar{A}_i+rP(\sum_{i=1}^2m_iA_{i1})Q^{-1}\times\\&(\sum_{i=1}^2m_iA_{i1}')P+(1-l)P<0,\end{aligned} \tag{14}$$

其中$0\leqslant m_1,m_2\leqslant1, m_1+m_2=1$.

构造状态变换$\xi(t):=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-t_0)}\tilde{x}(t), t\geqslant t_0$, 依据$\dot{\xi}(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-t_0)}[\dfrac{1}{2}\tilde{x}(t)+\dot{\tilde{x}}(t)]$知, 对于$t\geqslant t_0$成立

$$\dot{\xi}(t)=[\bar{A}(t)+A_1(t)+\frac{1}{2}I_n]\xi_t(0)+A_1(t)\eta_t(-r). \tag{15}$$

其中$\eta_t(\theta):=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\theta}\xi_t(\theta)-\xi_t(0), -r\leqslant\theta\leqslant0$, 满足$\eta_t(0)\equiv0, t\geqslant t_0$. 构造Lyapunov-Krasovskii泛函$V(\xi_t)=r\xi_t'(0)P\xi_t(0)+\int_{-r}^0\eta_t'(\theta)Q\eta_t(\theta)\mathrm{d}\theta$, 通过不等式(14)推知其沿着方程(15)解轨线的导数

$$\begin{aligned}&D^+V(\xi_t)=\\&2r\left[\left(\bar{A}(t)+A_1(t)+\tfrac{1}{2}I_n\right)\xi_t(0)+A_1(t)\times\right.\\&\left.\eta_t(-r)\right]'P\xi_t(0)-\eta_t'(-r)Q\eta_t(-r)\leqslant\\&\xi_t'(0)[r\left(\bar{A}(t)+A_1(t)\right)'P+rP\left(\bar{A}(t)+\right.\\&\left.A_1(t)\right)+r^2PA_1(t)Q^{-1}A_1'(t)P+rP]\times\\&\xi_t(0)\leqslant rl\xi_t'(0)P\xi_t(0), t\geqslant t_0.\end{aligned} \tag{16}$$

设$w(t):=r\xi_t'(0)P\xi_t(0)=r\mathrm{e}^{t-t_0}\tilde{x}_t'(0)P\tilde{x}_t(0), t\geqslant t_0$, 依据(16)可知

$$w(t)\leqslant V(\xi_t)\leqslant V(\xi_{t_0})+\int_{t_0}^{t}D^+V(\xi_\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$V(\xi_{t_0})+l\int_{t_0}^{t}w(\tau)\mathrm{d}\tau, t\geqslant t_0.$$

对于$t\geqslant t_0$, 利用Gronwall不等式得到

$$w(t)\leqslant V(\xi_{t_0})\mathrm{e}^{l(t-t_0)}\leqslant$$
$$r\left[\lambda_{\max}(P)+\lambda_{\max}(Q)\right]\|\tilde{x}_{t_0}\|^2\mathrm{e}^{l(t-t_0)}.$$

设$\beta:=[\dfrac{\lambda_{\max}(P)+\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}]^{\frac{1}{2}}$, $\nu:=\dfrac{1-l}{2}$, 由此推知

$$|\tilde{x}(t)|\leqslant\beta\|\tilde{x}_{t_0}\|\mathrm{e}^{-\nu(t-t_0)}, t\geqslant t_0, \tag{17}$$

在任意切换作用下成立.　　证毕.

定理 2　如果引理4的条件成立, 并且存在$\gamma>1, 0\leqslant\delta_1,\delta_2\leqslant 1$满足$\delta_1+\delta_2=1$, 使得关于对称矩阵$P>0$的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{2}\delta_iA_i'P+P\sum\limits_{i=1}^{2}\delta_iA_i+\gamma P & \delta_1PA_{11} & \delta_2PA_{21}\\ \delta_1A_{11}'P & -\delta_1P & 0\\ \delta_2A_{21}'P & 0 & -\delta_2P\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

可解, 那么存在基于估计状态的切换控制, 在其驱动下系统(11)的状态变量是指数衰减的.

证　设$\Omega_i:=\left\{x\in\mathbb{R}^n\middle|x'\left(A_i'P+PA_i+PA_{i1}\times P^{-1}A_{i1}'P+\gamma P\right)x<0\right\}, i\in\{1,2\}$为$\mathbb{R}^n$中开集. 不等式(18)等价于$\sum\limits_{i=1}^{2}\delta_i(A_i'P+PA_i+PA_{i1}P^{-1}\times A_{i1}'P+\gamma P)<0$, 进而蕴涵$\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{i=1}^{2}\Omega_i\bigcup\{0\}$. 据此, 构造镇定切换序列

$$s(t)=\arg\min_{i\in\{1,2\}}\{\ \hat{x}_t'(0)\left[\ A_i'P+PA_i+PA_{i1}\times P^{-1}A_{i1}'P+\gamma P\ \right]\hat{x}_t(0)\}. \tag{19}$$

记$\{H_i:=L_iC_i\}_{i=1}^2$. 构造Lyapunov函数$V(\hat{x})=\hat{x}'P\hat{x}$, 依据切换控制(19)的极小化性质知, 其沿着系统(12)(19)解轨线的导数

$$\begin{aligned}&D^+V(t)=\\&2\left[A_{s(t)}\hat{x}_t(0)+A_{s(t)1}\hat{x}_t(-r)-H_{s(t)}\tilde{x}_t(0)\right]'P\hat{x}_t(0)=\\&\hat{x}_t'(0)\left[A_{s(t)}'P+PA_{s(t)}\right]\hat{x}_t(0)+\\&2\hat{x}_t'(-r)A_{s(t)1}'P\hat{x}_t(0)-2\hat{x}_t'(0)PH_{s(t)}\tilde{x}_t(0)\leqslant\\&\hat{x}_t'(0)\left[A_{s(t)}'P+PA_{s(t)}+PA_{s(t)1}P^{-1}\times\right.\\&\left.A_{s(t)1}'P+\varepsilon P\right]\hat{x}_t(0)+\hat{x}_t'(-r)P\hat{x}_t(-r)+\\&\varepsilon^{-1}\|P\|\|H_{s(t)}\|^2|\tilde{x}_t(0)|^2\leqslant\\&-(\gamma-\varepsilon)V(t)+\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}V(t+\theta)+M|\tilde{x}_t(0)|^2,\\&t\geqslant t_0.\end{aligned} \tag{20}$$

其中: $0<\varepsilon<\gamma-1$, $M:=\varepsilon^{-1}\max\limits_{i\in\{1,2\}}\{\|P\|\|H_i\|^2\}$. 对于$t\geqslant t_0$, 依据式(17)(20)推知

$$D^+V(t)\leqslant-(\gamma-\varepsilon)V(t)+\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}V(t+\theta)+$$
$$M\beta^2\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant0}|\tilde{x}(t_0+\theta)|^2\mathrm{e}^{-2\nu(t-t_0)}.$$

由引理2知, 存在$p(\hat{x}_{t_0})\geqslant 1$, 使得$V(t)\leqslant pV(\hat{x}_{t_0})\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t\geqslant t_0$, 因此得到

$$|\hat{x}(t)|\leqslant\kappa\|\hat{x}_{t_0}\|\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}, t\geqslant t_0, \tag{21}$$

其中$\lambda:=\min\{\mu,2\nu\}$, $\kappa:=p^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{\frac{1}{2}}$, $\mu>0$满足$\mu-(\gamma-\varepsilon)+\mathrm{e}^{\mu r}=0$.

对于$t\geqslant t_0$, 结合式(17)(21)可知

$$|x(t)|=|\hat{x}(t)+\tilde{x}(t)|\leqslant[\kappa\|\hat{x}_{t_0}\|+\beta\|\tilde{x}_{t_0}\|]\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(t-t_0)}.$$

证毕.

5　仿真 (Simulation)

仿真验证引理4与定理2的结论. 设时滞常数$r=1.0$ s, 子系统系数矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}1.0 & -1.0\\1.0 & -2.8\end{bmatrix}, A_{11}=\begin{bmatrix}-0.6 & 0.8\\-1.2 & 0.8\end{bmatrix},$$
$$C_1=\begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix}', A_2=\begin{bmatrix}-2.4 & 1.0\\-1.6 & 1.0\end{bmatrix},$$
$$A_{21}=\begin{bmatrix}0.8 & -0.8\\0.8 & -0.6\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}1.0\\-0.6\end{bmatrix}'.$$

依据引理4设计子系统观测器反馈增益矩阵为$L_1=[-1.23\ \ -0.56]'$, $L_2=[-0.71\ \ 1.50]'$; 矩阵不等式(18)的一组解为$\gamma=1.06, \delta_1=0.44, \delta_2=0.56$, $P=\begin{bmatrix}7.17 & -4.40\\-4.40 & 5.25\end{bmatrix}$. 切换控制(19)驱动下状态变量轨线如图1所示.

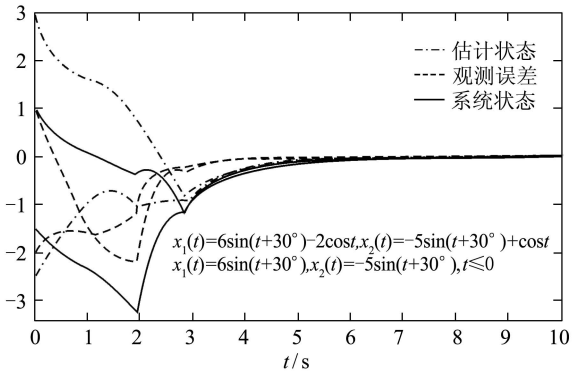

图 1　镇定切换控制驱动下状态变量轨线

Fig. 1　Forced trajectories of state variables under stabilizing switching control

6 结束语 (Conclusions)

本文利用Lyapunov函数与Halanay微分不等式考虑时滞切换系统稳定性的基本问题. 在分析方面, 将多Lyapunov函数方法推广至时滞情形; 在设计方面, 构造出基于估计状态的切换序列, 使状态变量是指数收敛的. Halanay型不等式条件的可构造性与结论的解析性使其较之于经典的Razumikhin型定理方法更为灵活. 局限性与保守性是Lyapunov函数方法的固有缺陷, 克服这些不足有待进一步研究.

参考文献 (References):

[1] LIBERZON D, MORSE S. Basic problems in stability and design of switching system[J]. *IEEE Control Systems*, 1999, 19(10): 59 – 70.

[2] CHENG D, GUO L, HUANG J. On quadratic Lyapunov function[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(5): 885 – 890.

[3] DAYAWANSA W, MARTIN C. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(4): 751 – 760.

[4] BLANCHINI F. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control[J]. *Automatica*, 1995, 31(3): 451 – 461.

[5] LIN H, ANTSAKLIS P. A necessary and sufficient condition for robust asymptotic stabilizability of continuous time uncertain switched linear system[C] // *Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2004: 3690 – 3695.

[6] MOLCHANOV A P, PYATNITSKIY Y S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory[J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(1): 59 – 64.

[7] NICULESCU S I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

[8] SUN Y, MICHEL A N, ZHAI G. Stability of discontinuous retarded functional differential equations with applications[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1090 – 1105.

[9] YUAN R, JING Z, CHEN L. Uniform asymptotic stability of hybrid dynamical systems with delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(2): 344 – 348.

[10] YE H, MICHEL A N, HOU L. Stability theory for hybrid dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 461 – 474.

[11] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[12] HALANAY A. *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*[M]. New York: Springer-Verlag, 1966.

作者简介:

丛 屾 (1976—), 男, 博士研究生, 研究方向为切换系统与时滞系统的稳定性分析与控制, E-mail: shen_tsong@163.com;

费树岷 (1961—), 男, 教授, 研究方向为非线性系统几何理论、切换系统与时滞系统的稳定性分析;

徐君祥 (1962—), 男, 教授, 美国数学会评论员, 研究方向为动力系统理论, 在哈密顿动力系统与KAM定理等诸多方面都得到好的结果.