第 24 卷第 3 期
2007 年 6 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 24 No. 3
Jun. 2007

文章编号：1000−8152(2007)03−0475−05

含状态时滞及执行器饱和不确定系统反馈镇定及L_2增益分析

魏爱荣[1]，王玉振[1]，赵克友[2]

(1. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061; 2. 青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 研究了具有控制饱和状态时滞不确定系统的L_2控制问题, 提出了状态反馈方法, 利用Lyapunov函数可获得时滞相关的线性矩阵不等式. 线性矩阵不等式条件可保证闭环系统无干扰时鲁棒内稳定性和在某椭球内预先给定的有干扰时L_2性能水平, 该不等式通过引入辅助矩阵解除了执行器饱和对系统的影响而更易于实现且减小了保守性. 采用线性矩阵不等式技术, 将控制器存在的充分条件转化为凸优化问题. 在此基础上设计了系统的状态反馈控制器, 最后用数值仿真验证了所提出方法的可行性.

关键词: 执行器饱和; L_2增益; 状态时滞; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Feedback stabilization and L_2-gain analysis of uncertain systems with state delay and actuator saturation

WEI Ai-rong[1], WANG Yu-zhen[1], ZHAO Ke-you[2]

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;
2. School of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: The problem of L_2 control for uncertain time-delay linear systems subject to actuator saturation is investigated in this paper. Firstly, the state feedback method is proposed and delay-dependent linear matrix inequality is achieved by Lyapunov function which ensures robust stability and a prescribed L_2 performance level for the resulting closed-loop system in a given ellipsoid. An auxiliary matrix is then introduced that eliminates the effect of actuator saturation which enables us to obtain a more easily tractable and less conservative condition. Furthermore, sufficient conditions for the existence of state feedback controller are established in terms of linear matrix inequalities, in which the design of admissible controller is treated as a convex optimization problem. Finally, numerical example is provided to demonstrate the feasibility of the proposed method.

Key words: actuator saturation; L_2 gain; state delay; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

控制饱和系统是十分常见的系统, 因实际控制系统几乎都会遇到执行器饱和问题, 或处于安全而人为加入的, 或为器件装置所固有的. 1990年以来对饱和受限控制系统的研究重被重视并取得不少成果[1,2]. 时滞系统的稳定性分析和综合是多年来研究的重要课题[3~5], 最近, 不确定时滞系统的H_∞控制问题引起重视. 文献[6,7]运用对定时滞和变时滞的不确定系统分别研究了在状态反馈下的H_∞控制问题; 文献[8,9]进一步对变时滞的不确定随机系统分别研究了在状态反馈和动态输出反馈下的H_∞控制问题.

实际系统经常是不确定的, 又同时含状态时滞和执行器饱和, 如何解决对它们的控制? 有效方法似见报道的很少. 文献[10]研究了控制饱和时滞不确定系统的H_∞控制问题的分析和设计方法, 给出了保守性相对较强的时滞不相关方法; 文献[11]对确定性控制饱和时滞系统H_∞时滞相关控制和稳定性问题进行研究, 且文献[11]只针对确定系统.

本文的目的是运用状态反馈分析不确定性时滞控制饱和和L_2增益, 并建立了时滞相关的线性矩阵不等式条件(linear matrix inequality, 缩写为LMI).若把反馈增益看为一自由参数, 所对应的分析优化问题可以较容易地用来控制器的设计.

文中: $\mathbb{R}$表示实数域, I表示单位阵, 矩阵或向量M的转置记以M^{T}, 在无特殊说明时, 用M_i表

收稿日期: 2005−04−19; 收修改稿日期: 2006−05−18.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174040).

示M的第i行向量, $*$表示矩阵的对称结构, 即
$$\begin{bmatrix} L & N \\ N^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & N \\ * & R \end{bmatrix}.$$

2 问题描述(Problem statement)

考虑系统
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (A_d+\Delta A_d)x(t-\tau) + \\ \qquad (B+\Delta B)\mathrm{sat}(u(t)) + Ew(t), \\ z(t) = Cx(t) + D\mathrm{sat}(u(t)), \\ x(t) = \phi(t),\ \ \forall t \in [-\tau\ 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^p, z \in \mathbb{R}^q$分别是状态变量、控制输入、外部干扰和评价输出, 并且$w(t) \in L_2[0\ \infty), 0 < \tau < \overline{\tau}$. 标准向量饱和函数$\mathrm{sat}(\cdot)$: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, 定义为$\mathrm{sat}(u) = [\mathrm{sat}(u_1)\ \mathrm{sat}(u_2) \cdots \mathrm{sat}(u_m)]^{\mathrm{T}}$, 其中分量$\mathrm{sat}(u_i) = \mathrm{sgn}(u_i)\min\{1, |u_i|\}$. 附加不确定阵为参数结构型$[\Delta A\ \Delta A_d\ \Delta B] = M\varSigma[\Delta F_a\ \Delta F_d\ \Delta F_b]$. M, F_a, F_d, F_b是常实数矩阵, $\varSigma$为范数不大于1的任意参数不确定阵. 在状态反馈$u = Fx$作用下, 相应的闭环系统为
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (A_d+\Delta A_d)x(t-\tau) + \\ \qquad (B+\Delta B)\mathrm{sat}(Fx(t)) + Ew(t), \\ z(t) = Cx(t) + D\mathrm{sat}(Fx(t)). \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\overline{A} = A + \Delta A$, $\overline{A}_d = A + \Delta A_d$, $\overline{B} = B + \Delta B$.

以$\varXi$来记对角元素是1或0的m阶对角矩阵的全体, 其共含成员2^m个. 其代表成员用D_i 记之, 下标i遍取$[1\ \ 2^m] = [1\ \ 2\ \ 4\ \ ,\cdots,\ 2^m]$, 显然若$D_i \in \varXi$, 则$D_i^- = I - D_i \in \varXi$, 对$\forall F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $L(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : |F_i(x)| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, m\}$ 称系统(2)的线性域.

引理 1[12] 给定反馈阵$F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 对$\forall H \in \mathbb{R}^{m\times n}$及$\forall x \in L(H)$, 有$\mathrm{sat}(Fx) \in \mathrm{co}\{(D_iF + D_i^-Hx) : i \in [1\ 2^m]\}$, co表示凸组合.

引理 2[13] 假设$\alpha \in \mathbb{R}^{n_a}, \beta \in \mathbb{R}^{n_b}, N \in \mathbb{R}^{n_a\times n_b}$, 则对任意矩阵$X \in \mathbb{R}^{n_a\times n_a}, Y \in \mathbb{R}^{n_a\times n_b}, Z \in \mathbb{R}^{n_b\times n_b}$, 有
$$2\alpha^{\mathrm{T}}N\beta \leqslant \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$
其中$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix} \geqslant 0.$

引理 3[13] 令D, E为合适维数常实数矩阵, 对任意满足$\varSigma^{\mathrm{T}}\varSigma \leqslant I$的矩阵$I$, 则有
$$D\varSigma E + E^{\mathrm{T}}\varSigma^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \leqslant \varepsilon DD^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E,\ \forall \varepsilon > 0.$$

3 状态反馈系统L_2增益分析(L_2 gain analysis of state feedback system)

假设所有的状态变量可用, 对给定的状态反馈$u = Fx$, 本节欲分析或估计其L_2增益及时滞τ的上确界. 用椭球域去对(不变)吸引域做估计是文献中常用方法, 为此定义椭球域
$$\varOmega(P_1) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^{\mathrm{T}}P_1x \leqslant 1\}.$$
其中$P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$为给定正定阵.

定理 1 在状态反馈$u = Fx$作用下, 对$i \in [1\ 2^m]$和给定$\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$, 若存在矩阵$P_1 > 0, Z > 0, Q > 0, H, P_2, P_3, Y_1, Y_2, Y_3, R_1, R_2, R_3$, 使
$$\begin{bmatrix} \overline{\varGamma}_{11i} & \overline{\varGamma}_{12i} & P_2^{\mathrm{T}}\overline{A}_d - Y_1^{\mathrm{T}} & P_2^{\mathrm{T}}E & C_i^{\mathrm{T}} \\ * & \overline{\varGamma}_{22} & P_3^{\mathrm{T}}\overline{A}_d - Y_2^{\mathrm{T}} & P_3^{\mathrm{T}}E & 0 \\ * & * & -Q & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3}$$
$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ * & R \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4}$$
和$\varOmega(P_1) \subset L(H)$, 即$\forall x \in \varOmega(P_1), |H_ix| \leqslant 1, i \in [1\ m]$, 则椭球$\varOmega(P_1)$是不变集且对所有的$w \in L_2$, 系统(2)从$w$到$z$的$L_2$增益小于或等于$\gamma$. 其中:
$$\overline{\varGamma}_{11i} = P_2^{\mathrm{T}}\overline{A}_i + \overline{A}_i^{\mathrm{T}}P_2 + \tau R_1 + Q + Y_1 + Y_1^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{\varGamma}_{12i} = P_1 - P_2^{\mathrm{T}} + \overline{A}_i^{\mathrm{T}}P_3 + \tau R_2 + Y_2,$$
$$\varGamma_{22} = -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + \tau R(3) + \tau Z,$$
$$Y = [Y_1\ Y_2],\ \overline{A}_i = A + \overline{B}(D_iF + D_i^-H),$$
$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ * & R_3 \end{bmatrix}.$$

证 记$x_t = x(t+\theta)$, $-2\tau \leqslant \theta \leqslant 0$和
$$\dot{x}(t) = y(t). \tag{5}$$

令系统(2)的Lyapunov函数为[3]
$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t). \tag{6}$$

其中:
$$V_2(x_t) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t} y^{\mathrm{T}}(\alpha)Zy(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,$$
$$V_3(x_t) = \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(\alpha)Qx(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$
$$V_1(x_t) = \overline{x}^{\mathrm{T}}SP\overline{x}(t),\ \overline{x}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)\ y^{\mathrm{T}}(t)],$$
$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
为半正定矩阵, 则$V_1(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)P_1x(t)$, 据Leibniz-Newton公式
$$x(t-\tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^{t} y(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \tag{7}$$

由式(2)(5)(7)知
$$\dot{V}_1(x_t) = 2x^{\mathrm{T}}(t)P_1\dot{x}(t) = 2\overline{x}(t)P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \varLambda \end{bmatrix}.$$

其中

$$\Lambda = -y(t)+(\overline{A}+\overline{A}_{\rm d})x(t)-\overline{A}_d\int_t^{t-\tau}y(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\overline{B}\mathrm{sat}(Fx(t))+Ew(t).$$

由引理1, 对$i\in[1\ \ 2^m]$,

$$\dot{V}_1(x_t)\leqslant\max 2\overline{x}^{\rm T}(t)P^{\rm T}\begin{bmatrix}0 & I\\ \overline{A}_i+\overline{A}_d & -I\end{bmatrix}\overline{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ E\end{bmatrix}w(t)-\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}0\\ \overline{A}_d\end{bmatrix}y(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

由引理2和式(4)有

$$\begin{aligned}&-2\int_{t-\tau}^{t}\overline{x}^{\rm T}(t)\leqslant\\&\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}y^{\rm T}(\alpha)\\ \overline{x}^{\rm T}(t)\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}Z & Y-[0\ \ \overline{A}_d^{\rm T}]P\\ * & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(\alpha)\\ \overline{x}(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}\alpha=\\&-2\int_{t-\tau}^{t}y^{\rm T}(\alpha)Zy(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\\&2x^{\rm T}(t)(Y-[0\ \ \overline{A}_d^{\rm T}]P)\overline{x}(t)-2x^{\rm T}(t-\tau)(Y-\\&[0\ \ \overline{A}_d^{\rm T}]P)\overline{x}(t)+\tau\overline{x}(t)R\overline{x}(t),\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\dot{V}_2(x_t)=\\&\int_{-\tau}^{0}[y^{\rm T}(t)Zy(t)-y^{\rm T}(t+\beta)Zy(t+\beta)]\mathrm{d}\beta=\\&\int_{t-\tau}^{t}[y^{\rm T}(t)Zy(t)-y^{\rm T}(\alpha)Zy(\alpha)]\mathrm{d}\alpha=\\&\tau y^{\rm T}(t)Zy(t)-\int_{t-\tau}^{t}y^{\rm T}(\alpha)Zy(\alpha)\mathrm{d}\alpha,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\dot{V}_3(x_t)=x^{\rm T}(t)Qx(t)-x^{\rm T}(t-\tau)Qx(t-\tau).\tag{10}$$

定义

$$J_{zw}=\int_0^{\infty}[z^{\rm T}(t)z(t)-\gamma^2w^{\rm T}(t)w(t)+\dot{V}(x_t)]\mathrm{d}t+V(x_t)|_{t=0}-V(x_t)|_{t=\infty},$$

在零初始条件下

$$V(x_t)|_{t=0}=0,\ V(x_t)|_{t=\infty}>0,$$

所以

$$J_{zw}\leqslant\int_0^{\infty}[z^{\rm T}(t)z(t)-\gamma^2w^{\rm T}(t)w(t)+\dot{V}(x_t)]\mathrm{d}t.\tag{11}$$

由式(6)(8) (11)知

$$J_{zw}\leqslant\max\int_0^{\infty}\xi^{\rm T}(t)\Theta_i xi(t)\mathrm{d}t.$$

其中　$\xi(t)=[x^{\rm T}(t)\ y^{\rm T}(t)\ x^{\rm T}(t-\tau)\ w(t)]^{\rm T}$.

对$i\in[1\ \ 2^m]$,

$$\Theta_i=\begin{bmatrix}\overline{\Psi}_i & P^{\rm T}[0\ \overline{A}_d^{\rm T}]^{\rm T}-[Y_1\ Y_2]^{\rm T} & P^{\rm T}[0\ E^{\rm T}]^{\rm T}\\ * & -Q & 0\\ * & * & -\gamma^2I\end{bmatrix}.\tag{12}$$

其中:

$$\overline{\Psi}_i=\begin{bmatrix}0 & I\\ \overline{A}_i & -I\end{bmatrix}^{\rm T}P+P^{\rm T}\begin{bmatrix}0 & I\\ \overline{A}_i & -I\end{bmatrix}+\tau\begin{bmatrix}R_1 & R_2\\ * & R_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_1 & Y_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{\rm T}+\begin{bmatrix}C_i^{\rm T}C_i+Q & 0\\ 0 & \tau z\end{bmatrix},$$

$$C_i=C+D(D_iF+D_i^-H).$$

运用矩阵Schur补定理知, 式(3)<0等价于$\Theta_i<0$, 即$\int_0^{\infty}[z^{\rm T}(t)z(t)\leqslant\gamma^2w^{\rm T}(t)w(t)]\mathrm{d}t$.　　证毕.

注 1　定理1保证了在$w(t)=0$时, 函数$\dot{V}(x_t)<0$, $\forall x\in\Omega(P_1)\setminus\{0\}$, 这表示对$w(t)=0$, 系统(2)在零点是二次稳定的, 而且$\Omega(P_1)$在其吸引域内.

注 2　在本文用$\Omega(P_1)$表示一椭球不会带来保守性, 因本文的主要目的是在一吸引椭球内分析系统L$_2$增益的上确界, 在L$_2$增益确定的情况下运用优化算法, 可使吸引椭球$\Omega(P_1)$达到最大, 请参看文献[14].

定理1中的式(3)涉及到不确定性, 为使问题进一步简化, 提出下面定理:

定理 2　在状态反馈u=Fx作用下, 对$i\in[1\ \ 2^m]$和给定的$\tau\geqslant0$, $\gamma>0$, 若存在矩阵$P_1>0, Z>0, Q>0, H, P_2, P_3, Y_1, Y_2, Y_3, R_1, R_2, R_3$和实数$\varepsilon>0$满足式(4)和

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11i} & \Gamma_{12i} & P_2^{\rm T}A_d-Y_1^{\rm T}+\varepsilon F_{ai}^{\rm T}F_d & P_2^{\rm T}E & P_2^{\rm T}M & 0 & P_1M & \varepsilon F_{ai}^{\rm T} & C_i^{\rm T}\\ * & \Gamma_{22} & P_3^{\rm T}A_d-Y_2^{\rm T} & P_3^{\rm T}E & P_3^{\rm T}M & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -Q & 0 & 0 & \varepsilon F_d^T & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\gamma^2I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0\tag{13}$$

和$\Omega(P_1)\subset L(H)$, 则椭球$\Omega(P_1)$是不变集且对所有的$w\in$ L$_2$, 系统(2)从w到z的L$_2$增益小于或等于γ. 其中:

$$\Gamma_{11i}=P_2^{\rm T}A_i+A_i^{\rm T}P_2+\tau R_1+Q+Y_1+Y_1^{\rm T},$$

$$\Gamma_{12i}=P_1-P_2^{\rm T}+A_i^{\rm T}P_3+\tau R_2+Y_2,$$

$$\Gamma_{22}=-P_3-P_3^{\rm T}+\tau R_3+\tau Z,$$

$$A_i = A + B(D_iF + D_i^- H),$$

$\varGamma_{22}$, Y, R同定理1.

证 令

$$\varPsi_i = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -I \end{bmatrix}^{\mathrm T} P + P^{\mathrm T} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -I \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ * & R_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm T} + \begin{bmatrix} C_i^T C_i + Q & 0 \\ 0 & \tau z \end{bmatrix}.$$

由式(12)和引理3知, 对实数$\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \varTheta_i = &\begin{bmatrix} \varPsi_i & P^{\mathrm T}[0\ A_d^{\mathrm T}]^{\mathrm T} - [Y_1\ Y_2]^{\mathrm T} & P^{\mathrm T}[0\ E^{\mathrm T}]^{\mathrm T} \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (F_a + F_b(D_iF + D_i^- H))^{\mathrm T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [0\ F_d^{\mathrm T}] \\ 0 \end{bmatrix} (\varSigma)^{\mathrm T} [M^{\mathrm T} P\ 0\ 0] + \\ &\begin{bmatrix} P^{\mathrm T} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varSigma \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_a + F_b(D_iF + D_i^- H) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_d \end{bmatrix} 0 \right] \leqslant \\ &\begin{bmatrix} \varPi_i & P^{\mathrm T} \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1^{\mathrm T} \\ Y_2^{\mathrm T} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} F_{adi} \\ 0 \end{bmatrix} & P^{\mathrm T} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \\ * & -Q + \varepsilon F_d^{\mathrm T} F_d & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

其中：$F_{adi} = (F_a + F_b(D_iF + D_I^- H))^{\mathrm T} F_d$,

$$\begin{aligned} \varPi_i = &\\ &\varPsi_i + \varepsilon \begin{bmatrix} (F_a + F_b(D_iF + D_i^- H))^{\mathrm T}(F_a + F_b(D_iF + D_i^- H)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} P_1 M M^{\mathrm T} P_1 + P_2^{\mathrm T} M M^{\mathrm T} P_2 & P_2^{\mathrm T} M M^{\mathrm T} P_3 \\ * & P_3^{\mathrm T} M M^{\mathrm T} P_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

运用矩阵Schur补定理, 式(13)$<$ 0等价于式(14)$<$ 0. 证毕.

根据定理2, 在时滞τ已知的情况下估计系统(2)L_2增益的上确界可转化为下面的优化问题:

$$\inf_{P_1>0, Z>0} \gamma^2, \tag{15}$$

a) 不等式(13)(4); b) $\varOmega(P_1) \subset L(H)$;

令

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ * & V_3 \end{bmatrix} = P^{-1}, \ \begin{bmatrix} \overline{R}_1 & \overline{R}_2 \\ * & \overline{R}_3 \end{bmatrix} = V^{\mathrm T} R V,$$

$$\overline{R} = V = \varepsilon A_d^{\mathrm T} [P_2\ P_3] = \varepsilon [0\ A_d^{\mathrm T}] P,$$

对$\varTheta_i$<0分别左乘$\mathrm{diag}(V^{\mathrm T}, I, I)$右乘$\mathrm{diag}(V^{\mathrm T}, I, I)$, 仿定理2的证明, 对$i \in [1\ \ 2^m]$, 令

$$\begin{aligned} \varXi_i = &V_1 A_i^{\mathrm T} + (D_iFV_1 + D_i^- G)^{\mathrm T} - V_2^{\mathrm T} + \\ &V_3 + \tau R_2 + \varepsilon V_1 A_d^{\mathrm T}, \end{aligned}$$

$$\overline{F}_{ai} = F_a V_1 + F_b(D_iFV_1 + D_i^- G),\ G = HV_1,$$

有

$$\begin{bmatrix} V_1 + V_1^{\mathrm T} + \tau\overline{R}_1 & \Xi_i & 0 & 0 & \tau V_2 & V_1 & V_1 C_i^{\mathrm T} & 0 & \varepsilon\overline{F}_{ai}^{\mathrm T} & M^{\mathrm T} \\ * & -V_3 - V_3^{\mathrm T} + \tau\overline{R}_3 & -(\varepsilon - 1)A_d & E & \tau V_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon F_d^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

对式(4)左乘$\mathrm{diag}(Z^{-1}, V^{\mathrm T})$, 右乘$\mathrm{diag}(Z^{-1}, V)$, 有

$$\begin{bmatrix} Z^{-1} & 0 & \varepsilon Z^{-1} A_d^{\mathrm T} \\ * & \overline{R}_1 & \overline{R}_2 \\ * & * & \overline{R}_3 \end{bmatrix} > 0. \tag{17}$$

c) 等价于

$$H_i P_1^{-1} H_i^{\mathrm T} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & G_i \\ * & V_1 \end{bmatrix} \geqslant 0,\ i \in [1\ \ 2^m]. \tag{18}$$

为此, 式(15)可转化为下面的问题:

$$\inf_{V_1>0, Z>0} \gamma^2, \tag{19}$$

式(16) (18).

相似地在L_2增益γ已知的情况下, 估计系统(2)时滞τ 的上确界可转化为优化问题:

$$\sup_{V_1>0, Z>0} \tau, \tag{20}$$

式(16) (18).

若时滞τ和L_2增益预先给定, 把反馈增益看做一自由参数, 并令$X = FV_1$, 解优化问题(19)或(20), 则所设计的控制器为$F = XV_1^{-1}$.

4 仿真研究(Simulation)

考虑(2)所描述的系统, 其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0.9\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},\ M=F_a=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.8\end{bmatrix},$$

$$F_d=\begin{bmatrix}0&0\\0&0.3\end{bmatrix},\ F_b=\begin{bmatrix}0.4\\0.4\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ D=0.1,$$

运用定理2可知对$\tau\leqslant 2.53$ 系统是稳定的. 另外当不确定参数ΔA, ΔA_d, ΔB为零时, 运用定理2可知对$\tau\leqslant 3.84$系统是稳定的, 而运用文献[15]方法得到的结果是$\tau\leqslant 3.2$, 运用文献[16]方法, 当$w=0$时得到的结果是$\tau\leqslant 2.96$. 相比之下, 可见本文的结果保守性更少.

1) 令$F=[0.5427\ \ -68.7937]$, 若$\gamma=0.8$, 解优化问题(20), 有$\tau\leqslant 1.9357$, 若系统初态$x(\theta)=[1\ \ -2]^{\mathrm{T}},\theta\in[1.9537\ \ 0]$, 进行仿真, 图1的仿真结果表明系统是渐近稳定的. 若$\tau=1.3$, 解优化问题(19), 有$\gamma=0.5396$.

2) 给定$\tau=0.9,\gamma=0.38$, 解优化问题(19)或(20), 有$u(t)=[-0.09364\ \ -84.6318]x(t)$.

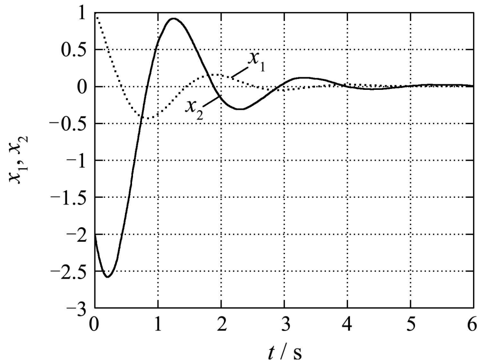

图 1 系统的状态响应

Fig. 1 State response of system

5 结论(Conclusion)

本文研究了具有控制饱和状态时滞不确定系统的L_2控制问题, 提出了状态反馈方法, 利用Lyapunov函数获得了时滞相关的线性矩阵不等式. 线性矩阵不等式条件可保证闭环系统无干扰时鲁棒内稳定性和在某椭球内预先给定的有干扰时L_2性能水平. 采用线性矩阵不等式技术, 将控制器存在的充分条件转化为凸优化问题. 在此基础上设计了系统的状态反馈控制器, 最后用数值仿真验证了所提出方法的可行性.

参考文献(References):

[1] SABERI A, LIN Z, TEEL A R. Control of linear systems with saturating actuators[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 368 – 378.

[2] SABERI A, HAN J. Constrained stabilization problems for linear plants[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 639 – 654.

[3] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931 – 1937.

[4] XU S, JAMES L. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(3): 384 – 387.

[5] XUE A, CAO Y, PI D. Stability analysis and H_∞ synthesis for linear systems with time-varying delays[C] // *Proc of American Control Conference*. New York: IEEE Press, 2004, 8: 4800 – 4805.

[6] CAO Y, SUN Y, JAMES L. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delayss[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1998, 145(3): 338 – 345.

[7] LEE Y, MOON Y, KJWON W. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 65 – 72.

[8] XU S, CHEN T. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2089 – 2094.

[9] XU S, CHEN T. H_∞ output feedback control for uncertain stochastic systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2004, 40(12): 2094 – 2098.

[10] XIE L, HE X, ZHANG W. Robust H_∞ control for uncertain time delay systems containing saturating nonlinear actuators[C] // *Proc of American Control Conference*. New York: IEEE Press, 2001, 8: 2708 – 2709.

[11] FRIDMAN E, SHAKED U. Regional stabilization and H_∞ control of time-delay systems with saturating actuators[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(9): 885 – 907.

[12] HU T, LIN Z, CHEN B. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 351 – 359.

[13] SU H, LIU F, CHU J. Robust stabilization of uncertain time-delay systems containing saturating actuators[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2001, 148(4): 323 – 328.

[14] CAO Y, LIN Z, CHEN B. An output feedback H_∞ controllers design for linear systems subject to sensor nonlinearities[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applicatons*, 2003, 50(7): 914 – 921.

[15] CAO Y, LIN Z, HU T. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I:Fundamental Theory and Applicatons*, 2002, 49(2): 233 – 240.

[16] TARBOURIECH S, PERES P, GARCIA G. Delay -dependent stabilization of time-delay systems with saturating actuators[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2002, 149(5): 387 – 393.

作者简介:

魏爱荣 (1972—), 女, 讲师, 博士, 目前研究方向为受限控制、时滞控制、Hamilton系统, E-mail: weiairong@sdu.edu.cn;

王玉振 (1963—),男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为Hamilton系统, E-mail: yzwang@sdu.edu.cn;

赵克友 (1945—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒与非线性控制、交流调速与伺服控制, E-mail: kyzhao@qdu.edu.cn.