

采用观测器的双线性系统最优跟踪控制器设计

唐功友¹, 赵艳东², 胡乃平^{1,2}

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 青岛科技大学 信息科学技术学院, 山东 青岛 266042)

摘要: 研究一类参考输入由外系统描述的双线性系统的最优输出跟踪控制问题. 利用逐次逼近的方法, 首先构造一族非齐次线性两点边值问题序列将原非线性两点边值问题解耦; 然后迭代求解伴随向量的序列, 得到由状态向量的线性解析函数和以伴随向量的极限形式给出的非线性部分的补偿项组成的最优输出跟踪控制律. 通过构造降维观测器重构外系统的状态, 解决了最优输出跟踪控制律的物理可实现问题. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 双线性系统; 最优输出跟踪控制; 观测器; 两点边值问题; 逐次逼近法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Design of optimal tracking controllers with observer for bilinear systems

TANG Gong-you¹, ZHAO Yan-dong², HU Nai-ping^{1,2}

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;

2. College of Information Science and Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao Shandong 266042, China)

Abstract: The optimal output tracking control (OOTC) problem for a class of bilinear systems is considered where the reference input is described by an exosystem. By using a successive approximation approach, a sequence of nonhomogeneous linear two-point boundary value (TPBV) problems is constructed to decouple the original nonlinear TPBV problem. An adjoint vector sequence can then be obtained by iteratively solving the sequence of TPBV problems. The OOTC law obtained consists of an accurate linear feedback term and a nonlinear compensation term which is the limit of the adjoint vector sequence. By introducing a reduced-order observer to reconstruct the state of the exosystem, the problem of physically realizable of the OOTC law can thus be solved. A simulation example is employed to illustrate the effectiveness of this approach.

Key words: bilinear systems; optimal output tracking control; observers; TPBV problem; successive approximation approach

1 引言(Introduction)

双线性系统是一类比较特殊的非线性系统, 其数学模型的非线性部分通常为系统的状态和输入的二次型函数或者双线性函数. 双线性系统模型比一般的非线性系统结构简单, 但描述研究对象的近似程度往往比线性系统要高得多, 因而在工业过程控制、电子、生物、化学过程建模及控制、宇宙航空和航空电子等领域的实际对象通常被描述为双线性系统模型. 跟踪控制有鲜明的应用背景, 例如, 飞行目标跟踪, 飞行器航行、导向和自动驾驶等^[1,2], 机器人的作业机械手臂的轨迹指令跟踪^[3,4], 工业反应器中的温度曲线跟踪^[5]. 对非线性系统的最优控

制问题, 根据最优控制的极大值原理可以导致求解一个非线性的两点边值问题. 这类问题的解析解往往是不存在的. 过去已有很多的研究者们致力于寻求此类问题的数值解, 因而出现了很多的研究方法. 例如幂级数近似法^[6], Galerkin逐次逼近法^[7], 利用逐次求解一个基于状态的Riccati方程来求得最优解的迭代算法^[8,9]和Riccati方程近似序列的方法^[10]. 但上述方法在每次迭代过程中都需要求解Riccati方程或Hamilton-Jacobi-Bellman方程, 而这类方程都是矩阵微分方程. 近年来, 提出了一种新的逐次逼近方法^[11~13]. 该方法在每次迭代过程中只需要求解一个伴随向量微分方程, 避免了求解矩阵微分方程的复

杂计算.

本文的目的是讨论具有有限时间二次型性能指标的一类双线性系统的最优跟踪控制问题, 并利用逐次逼近方法给出一种最优跟踪控制律的近似设计过程. 通过构造序列的方法将含有系统状态和输入的双线性函数的非线性最优跟踪问题转化为一族线性的非齐次两点边值问题序列, 从而实现原非线性两点边值问题的解耦. 该线性两点边值问题的解序列一致收敛于原最优跟踪控制问题的解, 因而可通过求解该线性两点边值问题序列, 得到由状态向量的线性解析函数和伴随向量序列极限形式的补偿项组成的最优跟踪控制律. 截取补偿项的有限次迭代的值可以得到原最优跟踪控制问题的次优解. 通过构造降维观测器来重构外系统的状态, 解决了控制律的物理不可实现问题. 最后给出了一个仿真实例来验证该算法的有效性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑一个双线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \{x(t)N\}u(t), t > 0, \\ x(0) = x_0, \{x(t)N\} = \sum_{j=1}^n x_j(t)N_j, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ 和 $y \in \mathbb{R}^q$ 分别为状态向量, 控制向量和输出向量; A, B 和 N_j 是具有适当维数的常量矩阵, 且

$$N_j = [(N_1^j)^T, (N_2^j)^T, \dots, (N_n^j)^T]^T, j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中 $N_i^j \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 令 $f(x, u) = \{x(t)N\}u(t)$, 且 f 关于变量 x 满足 Lipschitz 条件. 设系统(1)的输出 y 所要跟踪的期望轨线 $\tilde{y}$ 由如下稳定的外系统确定

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t), \\ \tilde{y}(t) = Hz(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $z \in \mathbb{R}^p$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^q$; G 和 H 为相应的适当维数的常量矩阵. 假设 (G, H) 为完全可观测的.

选择有限时域的二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2} [e^T(t_f)Q_f e(t_f) + \int_0^{t_f} (e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t))dt]. \quad (4)$$

其中: $Q_f, Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为正定矩阵, 输出误差为

$$e(t) = \tilde{y}(t) - y(t). \quad (5)$$

最优跟踪问题是寻求最优控制 $u^*(t)$ 使受控系统(1)的输出 $y(t)$ 跟踪 $\tilde{y}(t)$ 使得性能指标 J 取得极小值.

由最优控制问题的必要条件可知, 系统(1)关于性能指标(4)的最优跟踪控制导致了如下两点边值问题

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}(t) = C^T Q C x(t) - C^T Q H z(t) + A^T \lambda(t) + F(t) \lambda(t), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) - (B + \{x(t)N\})R^{-1} (B + \{x(t)N\})^T \lambda(t), 0 < t < t_f, \\ \lambda(t_f) = C^T Q_f C x(t_f) - C^T Q_f H z(t_f), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$F(t) = \begin{bmatrix} N_1^1 u(t) & N_2^1 u(t) & \dots & N_n^1 u(t) \\ N_1^2 u(t) & N_2^2 u(t) & \dots & N_n^2 u(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^n u(t) & N_2^n u(t) & \dots & N_n^n u(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

最优控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T \lambda(t). \quad (8)$$

然而, 除了极特殊的情形外, 一般情况下问题(6)的解析解是不存在的. 通过逐次逼近的方法来求解最优跟踪控制问题不失为一种可取的办法. 本文的目的在于通过给出一种基于向量迭代的逐次逼近方法来获得其近似解.

3 最优输出跟踪控制律设计(Design of optimal output tracking control law)

定理 1 系统(1)对于性能指标(4)的最优跟踪控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T [P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}(t)]. \quad (9)$$

其中 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 分别为矩阵微分方程

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = -P_1(t)A - A^T P_1(t) + P_1(t)BR^{-1}B^T P_1(t) - C^T Q C, \\ P_1(t_f) = C^T Q_f C \end{cases} \quad (10)$$

和

$$\begin{cases} \dot{P}_2(t) = -P_2(t)G - A^T P_2(t) + P_1(t)BR^{-1}B^T P_2(t) + C^T Q H, \\ P_2(t_f) = -C^T Q_f H \end{cases} \quad (11)$$

的唯一解. 伴随向量 $g^{(k)}(t)$ 由如下方程确定

$$\begin{cases} g^{(0)}(t) \equiv 0, \\ -\dot{g}^{(k)}(t) = \\ [A^T - P_1(t)BR^{-1}B^T]g^{(k)}(t) + [-P_1(t)(B + \\ \{x^{(k-1)}(t)N\})R^{-1}\{x^{(k-1)}(t)N\}^T + \\ F^{(k-1)}(t) - P_1(t)\{x^{(k-1)}(t)N\}R^{-1}B^T] \cdot \\ [P_1(t)x^{(k-1)}(t) + P_2(t)z(t) + g^{(k-1)}(t)], \\ 0 \leq t < t_f, \\ g^{(k)}(t_f) = 0, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$F^{(k-1)}(t) = \begin{bmatrix} N_1^1 u^{(k-1)} & N_2^1 u^{(k-1)} & \dots & N_n^1 u^{(k-1)} \\ N_1^2 u^{(k-1)} & N_2^2 u^{(k-1)} & \dots & N_n^2 u^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^n u^{(k-1)} & N_2^n u^{(k-1)} & \dots & N_n^n u^{(k-1)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$x^{(k)}$ 满足微分方程

$$\begin{cases} x^{(0)}(t) \equiv 0, \\ \dot{x}^{(k)}(t) = \\ [A - (B + \{x^{(k-1)}(t)N\})R^{-1}(B + \\ \{x^{(k-1)}(t)N\})^T P_1(t)]x^{(k)}(t) - (B + \\ \{x^{(k-1)}(t)N\})R^{-1}(B + \{x^{(k-1)}(t)N\})^T \\ [P_2(t)z(t) + g^{(k)}(t)], 0 < t \leq t_f, \\ x^{(k)}(0) = x_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (14)$$

证 考虑两点边值问题(6), 为了将其方程右边的线性项和非线性项分离, 令

$$\lambda(t) = P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + g(t). \quad (15)$$

其中 $g(t) \in \mathbb{R}^n$ 为待求的伴随向量. 式(15)两边分别对 t 求导, 并结合式(1)易得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}_1(t)x(t) + P_1(t)\dot{x}(t) + \dot{P}_2(t)z(t) + \\ &P_2(t)\dot{z}(t) + \dot{g}(t) = \\ &\dot{P}_1(t)x(t) + P_1(t)Ax(t) - P_1(t)(B + \\ &\{x(t)N\})R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T \cdot \\ &[P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + g(t)] + \\ &\dot{P}_2(t)z(t) + P_2(t)Gz(t) + \dot{g}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

又由于

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}(t) &= C^T Q C x(t) - C^T Q H z(t) + (A^T + \\ &F(t))[P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + g(t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

将(16)和(17)相加并比较系数即可得到矩阵微分方

程(10) (11)和伴随向量微分方程

$$\begin{cases} -\dot{g}(t) = \\ [A^T - P_1(t)BR^{-1}B]g(t) + [-P_1(t) \\ (B + \{x(t)N\})R^{-1}\{x(t)N\}^T + F(t) - \\ P_1(t)\{x(t)N\}R^{-1}B^T][P_1(t)x(t) + \\ P_2(t)z(t) + g(t)], 0 \leq t < t_f, \\ g(t_f) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

根据式(8)(15)和(1), 有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \\ [A - (B + \{x(t)N\})R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T \\ P_1(t)]x(t) - (B + \{x(t)N\})R^{-1}(B + \\ \{x(t)N\})^T [P_2(t)z(t) + g(t)], \\ 0 < t \leq t_f, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (19)$$

将(15)代入到(8)中, 可得最优跟踪控制律

$$u(t) = -R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T [P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + g(t)]. \quad (20)$$

为了得到最优控制律 $u(t)$ 需要求解 $P_1(t)$, $P_2(t)$ 和 $g(t)$ 显然, $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 分别为矩阵微分方程(10)和(11)的唯一解. 然而, 为了得到 $g(t)$ 的值, 需要求解由式(18)和(19)确定的两点边值问题. 下面, 引入逐次逼近法来进行求解.

构造两点边值问题序列(12)(14)则相应的控制律序列为

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) &= -R^{-1}(B + \{x^{(k-1)}(t)N\})^T \\ &[P_1(t)x^{(k)}(t) + P_2(t)z(t) + g^{(k)}(t)], \\ k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

对于第 k 次优化问题, 最优状态轨线和最优跟踪控制律分别为 $x^{(k)}(t)$ 和 $u^{(k)}(t)$. 显然, (12)和(14)分别为已知终值和初值的非齐次线性向量微分方程族, 可以通过逐次迭代求解 $g^{(k)}(t)$ 和 $x^{(k)}(t)$.

视 $\{x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{g^{(k)}(t)\}$ 为 $C^N[0, t_f]$ 中的序列, 由文献[11]中的引理1可知, $\{x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{g^{(k)}(t)\}$ 分别一致收敛到(18)和(19)的解, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}(t) = g(t), \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}(t) = x(t). \quad (22)$$

由式(21)知, 控制序列 $\{u^{(k)}(t)\}$ 仅与 $\{x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{g^{(k)}(t)\}$ 相关, 并结合式(22), 可直接得到系统的最优跟踪控制律(9). 证毕.

注 1 在实际工程设计中, 序列 $\{g^{(k)}(t)\}$ 的极限一般不可能精确求出, 通常利用有限次迭代的值 $\{g^{(M)}(t)\}$ 来近

似式(9)中的 $\lim_{k \rightarrow \infty} \{g^{(k)}(t)\}$ 进而得到 M 阶次优控制律

$$u_M(t) = -R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T [P_1(t)x(t) + P_2(t)z(t) + g^{(M)}(t)] \quad (23)$$

对 M 的确定, 通常根据工程需要而选择一定的误差标准来实现.

注 2 注意到式(23)中的 $x(t)$ 为状态向量的精确解, 而式(21)中的 $x^{(k)}(t)$ 为状态序列的第 k 次近似解, 因而由式(23)得到的次优控制律 $u_M(t)$ 比由式(21)得到的 $u^{(k)}(t)$ 更精确.

注 3 对于 M 阶次优控制律设计, 给出如下算法:

① 由式(3)求出期望输出 $\tilde{y}(t)$; 根据(10)和(11)分别求出 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$; 给定 $\varepsilon > 0$; 令 $J_0 = \infty, k = 1$.

② 由式(12)求出 $g^{(k)}(t)$ 代入(23)求出 $u_k(t)$; 进一步由(1)得到系统输出, 然后由式(5)求得 $e(t)$.

③ 令 $M = k$, 根据

$$J_M = \frac{1}{2} [e^T(t_f) Q_f e(t_f) + \int_0^{t_f} (e^T(t) Q e(t) + u_M^T(t) R u_M(t)) dt] \quad (24)$$

求出 J_M .

④ 如果

$$|(J_M - J_{M-1})/J_M| < \varepsilon \quad (25)$$

成立, 则结束计算, 输出控制律 $u_M(t)$.

⑤ 否则, 由(14)求出 $x^{(k)}(t)$; 令 $k = k + 1$, 转至②.

4 基于观测器的输出跟踪控制律设计(Design of the observer-based output tracking control law)

注意到最优控制律(23)中含有外系统的状态变量 $z(t)$, 因而控制律(23)是物理不可实现的. 为了解决这一问题, 需要重构外系统的状态. 下面给出降维观测器的设计方法.

由于 $\text{rank } H = q$ 且 (G, H) 完全可观, 因而存在常阵 $K \in \mathbb{R}^{(p-q) \times p}$ 使得 $T = [H^T \ K^T]^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为非奇异. 令 $T^{-1} = [W_1 \ W_2]$ 其中 $W_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{p \times (p-q)}$ 引入非奇异变换 $\bar{z} = [\bar{z}_1^T \ \bar{z}_2^T]^T = Tz$, 其中 $\bar{z}_1 \in \mathbb{R}^q$, $\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^{p-q}$. 从而外系统(3)可表示为

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_1(t) = \bar{G}_{11}\bar{z}_1(t) + \bar{G}_{12}\bar{z}_2(t), \\ \dot{\bar{z}}_2(t) = \bar{G}_{21}\bar{z}_1(t) + \bar{G}_{22}\bar{z}_2(t), \\ \tilde{y}(t) = \bar{z}_1(t). \end{cases} \quad (26)$$

其中 $\bar{G}_{11}$, $\bar{G}_{12}$ 和 $\bar{G}_{21}$, $\bar{G}_{22}$ 为适当维数的矩阵, 且

$$TGT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由(26)看出, 变换后的分状态 $\bar{z}_1$ 即为外系统的输出 $\tilde{y}$. 下面, 为重构状态 z 的 $(p-q)$ 维分状态 $\bar{z}_2$, 构造降维

观测器

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \hat{G}v(t) + \hat{L}\tilde{y}(t), \\ \hat{z}_2(t) = v(t) + \bar{L}\tilde{y}(t). \end{cases} \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \bar{G}_{22}\bar{L} - \bar{L}\bar{G}_{12}\bar{L} + \bar{G}_{21} - \bar{L}\bar{G}_{11}, \\ \hat{G} &= (\bar{G}_{22} - \bar{L}\bar{G}_{12}). \end{aligned}$$

式(28)中的 v 为构造的观测器的 $(p-q)$ 维状态向量, 观测器的输出 $\hat{z}_2$ 即为 $\bar{z}_2$ 的观测值, $\bar{L}$ 为观测器矩阵. 可以通过选取 $\bar{L}$ 而任意配置 $\hat{G}$ 的全部特征值, 保证 $\hat{z}_2(t)$ 按要求的指数衰减率趋近于 $\bar{z}_2(t)$. 于是, 外系统的状态观测器输出可以表示为

$$\hat{z}(t) = W_2 v(t) + (W_1 + W_2 \bar{L}) \tilde{y}(t). \quad (29)$$

从而由式(28)(29)及(23)可以得到基于观测器的动态跟踪控制律

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \hat{G}v(t) + \hat{L}\tilde{y}(t), \\ u_M(t) = -R^{-1}(B + \{x(t)N\})^T [P_1 x(t) + P_2 W_2 v(t) + P_2 (W_1 + W_2 \bar{L}) \tilde{y}(t) + g^{(M)}(t)]. \end{cases} \quad (30)$$

注 4 由于控制律(30)中含有参考输入观测器, 观测器的系数矩阵 $\hat{G}$ 是按极点要求选取的. 所以控制律(30)不是最优或次优的. 但适当地选择系数矩阵 $\hat{G}$, 可以使控制律(30)的控制效果接近次优控制律(23).

5 仿真结果(Simulation results)

考虑由(1)描述的双线性系统, 其中:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.1 & 6 \\ -6 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \\ N_2 &= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -2 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

参考输入由外系统(3)描述, 各参数为

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, z_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

系统的性能指标(4)的参数为

$$Q_f = 5, Q = 5, R = 1, t_f = 8. \quad (33)$$

选取控制精度 $\varepsilon = 0.01$. 表1给出了当迭代次数 k 分别为 2, 4, 6, 8, 9 时的系统的性能指标值. 易知 $|(J_9 - J_8)/J_9| < \varepsilon$ 亦即当 $k = 9$ 时满足精度要求, 从而 u_9 可作为所求的近似最优输出跟踪控制律. 实

际上, k 取值越大, 得到的输出跟踪控制律越逼近于最优值. 图1和图2给出了当 $k = 2, 4, 9$ 时的系统输出误差 $e(t)$ 和控制变量 $u(t)$ 的仿真曲线.

表1 当 $k = 2, 4, 6, 8, 9$ 时的性能指标的值

Table 1 Performance index values when $k = 2, 4, 6, 8, 9$					
k	2	4	6	8	9
J_k	1.8880	1.3314	1.2111	1.1927	1.1823

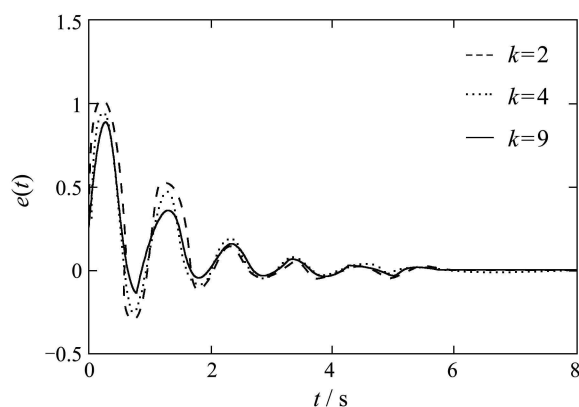


图1 当 $k = 2, 4, 9$ 时的系统输出误差 e 仿真曲线

Fig. 1 Trajectories of output error e when $k = 2, 4, 9$

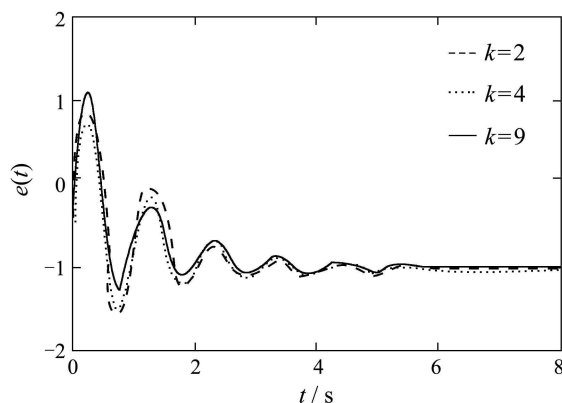


图2 当 $k = 2, 4, 9$ 时的系统控制变量 u 的仿真曲线

Fig. 2 Trajectories of control input u when $k = 2, 4, 9$

6 结论(Conclusion)

本文针对一类具有状态和输入的二次型函数的双线性系统, 讨论了在有限时间二次型性能指标下的最优输出跟踪控制问题, 利用一种逐次逼近法来近似设计控制律. 此方法避免了求解基于状态的Riccati方程或Hamilton-Jacobi-Bellman方程, 并且实现了非线性两点边值问题的解耦. 通过迭代求解伴随向量微分方程序列得到系统的最优输出跟踪控制律. 该算法计算量小, 在实际中容易实现. 且引入参考输入观测器解决了控制律的物理可实现问题.

由仿真结果可以看出, 此方法对于解决这类问题是行之有效的.

参考文献(References):

- [1] NO T S, MIN B M, STONE R H, et al. Control and simulation of arbitrary trajectory-tracking[J]. *Control Engineering Practice*, 2005, 13(5): 601 – 612.
- [2] SHARMA R, TEWARI A. Optimal nonlinear tracking of spacecraft attitude maneuvers[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2004, 12(5): 677 – 682.
- [3] GRABBE M T, DAWSON D M. Application of optimal control theory to the trajectory tracking of rigid robot manipulators[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1994, 15(4): 237 – 249.
- [4] SANTIBANEZ V, KELLY R, LIAMA M A. Global asymptotic stability of a tracking sectorial fuzzy controller for robot manipulators[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 2004, 34(1): 710 – 718.
- [5] BISWAS S K, CHEN S J, SATYANARAYANA A. Optimal temperature tracking for accelerated cooling processes in hot rolling of steel[J]. *Dynamics and Control*, 1997, 7(4): 327 – 340.
- [6] GARRARD W L, ENNS D F, SNELL S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft[J]. *Int J Control*, 1992, 56(4): 799 – 812.
- [7] BEARD R W, SARIDIS G N, WEN J T. Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. *Automatica*, 1997, 33 (12): 2159 – 2177.
- [8] HARRISON R F. Asymptotically optimal stabilising quadratic control of an inverted pendulum[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2003, 150(1): 7 – 16.
- [9] MCCAFFREY D, BANKS S P. Lagrangian manifolds and asymptotically optimal stabilizing feedback control[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(3): 219 – 224.
- [10] CIMEN T, BANKS S P. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1845 – 1863.
- [11] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.
- [12] TANG G Y, WANG H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153 – 161.
- [13] TANG G Y, MA H, ZHANG B L. Successive-approximation approach of optimal control for bilinear discrete-time systems[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(6): 636 – 644.

作者简介:

唐功友 (1953—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域为时滞系统、非线性系统及大系统的分析与控制等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;

赵艳东 (1976—), 女, 博士, 主要研究方向为时滞系统及非线性系统的最优控制, E-mail: ydzhao@ouc.edu.cn;

胡乃平 (1968—), 男, 教授, 博士研究生, 主要研究方向为时滞系统及非线性系统的最优控制, E-mail: hunaiping@163.com.