

控制方向未知的高次非线性系统的鲁棒自适应控制

魏春玲¹, 王强德², 武玉强²

(1. 东南大学自动化研究所, 江苏 南京 210096; 2. 曲阜师范大学自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 研究了一类具有不可控不稳定线性化的非线性系统的自适应控制问题. 该类系统的控制方向未知且含有不确定时变非线性参数. 应用Nussbaum-type增益技术和adding a power integrator递推设计方法, 设计了一种鲁棒自适应状态反馈控制器. 所设计的控制器能够保证闭环系统的所有信号全局一致有界, 且系统的状态渐近趋于零. 除了假设未知参数及不确定性有界外, 所设计的控制策略不需要控制系数的任何先验知识. 仿真例子验证了算法的有效性.

关键词: 非线性系统; 自适应; 非线性参数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust adaptive control of high order nonlinear systems with unknown control directions

WEI Chun-ling¹, WANG Qiang-de², WU Yu-qiang²

(1. Institute of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;

2. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China.)

Abstract: The problem of adaptive control for a class of nonlinear systems with uncontrollable and unstabilizable linearization is studied in this paper. The class of systems have unknown time-varying virtual control coefficients and uncertain time-varying nonlinear parameters. A robust adaptive state feedback controller is designed by employing the Nussbaum-type gain technique and adding a power integrator design approach. The controller guarantees all signals of the closed-loop system to be globally uniformly bounded. Especially, the state signals asymptotically converge to zero. The proposed design method does not require any a prior knowledge of the unknown control coefficients except for their bounds. The effectiveness of the proposed algorithm is verified by a simulation example.

Key words: nonlinear systems; adaptive; nonlinear parameterization

1 引言(Introduction)

不确定非线性系统的自适应控制问题一直是人们研究的一个热点, Backstepping算法的出现极大地推动了非线性系统控制的研究进程^[1~4]. 但是当所研究的系统是本质非线性时(系统是反馈线性化的, 其雅克比线性化不可控), Backstepping算法就无能为力了. 近年来, 针对本质非线性系统, Lin 和Qian提出了一种新的设计程序—Adding a power integrator并取得了一系列的研究成果^[5~8]. 文献[7]和[8]分别设计了光滑和非光滑状态反馈控制器, 解决了一类含有不可控线性化和非线性参数化系统的全局自适应控制问题; 另外, 还研究了当虚拟控制系数未知时系统的全局自适应调节问题, 但需要假设虚拟控制系数的符号是已知的.

当虚拟控制系数的符号未知时, 自适应控制问题变得更加困难. 在虚拟控制系数的符号未知的情况下, 针对一类一阶线性系统, 文献[9]设计了第一个解决方案并首次提出了Nussbaum-type增益方法. 该方法是处理虚拟控制系数符号未知的系统控制问题的一种非常有效的工具. 文献[10~13]用Nussbaum-type增益方法解决了一阶非线性系统和具有非线性干扰的高阶线性系统的自适应控制问题. 近来, 应用Nussbaum-type增益方法, 文献[14,15]研究了含有未知常参数的严格反馈非线性系统的自适应控制; 文献[16]利用解耦后推算法研究了含有完全未知控制系数和参数不确定的严格反馈非线性系统的自适应控制. 当不确定系统函数满足一定的条件时, 文献[17]研究了一类含有未知时变控制系数

的时变不确定非线性系统的输出调节问题. 含有未知高频增益的非线性系统的输出反馈控制方案在文献[18]里给出. 而文献[19]研究了既包含时变不确定参数和干扰又含有未知虚拟控制系数的非线性系统的鲁棒自适应控制. 以上文献所讨论的都是具有严格反馈或部分反馈形式的系统, 并且都采用基于Backstepping的递推方法设计控制器. 然而当非线性系统含有不可控线性化, 并且虚拟控制系数的符号未知时, 基于Backstepping的递推方法将不再适用, 此类系统的控制问题到目前为止还没有任何可行方案. 本文将结合Nussbaum-type 增益技术和adding a power integrator递推设计方法, 研究一类含有不可控线性化和未知虚拟控制系数的非线性系统的鲁棒自适应控制问题.

2 问题描述及预备引理(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下单输入单输出不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t)x_2^{p_1} + \phi_1(x, u, d(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(t)x_n^{p_{n-1}} + \phi_{n-1}(x, u, d(t)), \\ \dot{x}_n = g_n(t)u^{p_n} + \phi_n(x, u, d(t)), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别是系统的状态、输入和输出. $p_i \geq 1 (i = 1, \dots, n)$ 是正奇数, $g_i(t) \neq 0$ 和 $d(t) \in \mathbb{R}^s$ 是未知的有界分段连续函数(其界未知), $\phi_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$ 是关于其变量的连续函数. 控制目标是构造鲁棒自适应状态反馈非线性控制器, 使不确定非线性系统(1)的状态渐近趋于零, 同时保证闭环系统的其他所有信号全局一致有界.

假设 1 存在光滑函数 $f_i(\bar{x}_i, d(t)) \geq 0$, 使得

$$|\phi_i(x, u, d(t))| \leq \sum_{j=1}^i |x_j|^{p_i} f_i(\bar{x}_i, d(t)). \quad (2)$$

其中 $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$.

假设 2 时变参数 $g_i(t)$ 在未知闭区间 $I_i = [l_i^-, l_i^+]$ 内取值, 且 $0 \notin I_i, i = 1, \dots, n$. $g_i(t)$ 的符号, 即控制方向是未知的. 令 $\bar{g}_i = \max\{|l_i^-|, |l_i^+|\}$, $\bar{g} = \max\{\bar{g}_i\}$.

假设 3 p_i 为正奇数且满足 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$.

引理 1^[7] 对任意的连续函数 $f(x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, 存在光滑函数 $a(x) \geq 0, b(y) \geq 0, c(x) \geq 1, d(y) \geq 1$, 使得

$$|f(x, y)| \leq a(x) + b(y), \quad (3)$$

$$|f(x, y)| \leq c(x)d(y). \quad (4)$$

引理 2^[6] 对任意的正整数 m, n 和任意的实值函数 $r(x, y) > 0$, 下面的不等式成立:

$$|x|^m |y|^n \leq \frac{m}{n+m} r(x, y) |x|^{n+m} + \frac{n}{n+m} r^{-m/n}(x, y) |y|^{n+m}. \quad (5)$$

引理 3^[20] 对任意的 $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, p \geq 1$ 是整数, 下面的不等式成立:

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1} |a^p + b^p|. \quad (6)$$

引理 4 对系统(1)中的 $\phi_i(x, u, d(t)) (i = 1, \dots, n)$ 存在已知光滑函数 $\bar{f}_i(\bar{x}_i) \geq 1$ 和未知常数 $\Theta \geq 1$, 使得

$$|\phi_i(x, u, d(t))| \leq \sum_{j=1}^i |x_j|^{p_i} \bar{f}_i(\bar{x}_i) \Theta. \quad (7)$$

证 由假设1和引理1可知存在光滑函数 $\bar{f}_i(\bar{x}_i) \geq 1$ 和 $\tilde{f}_i(d(t)) \geq 1$, 使得

$$f_i(\bar{x}_i, d(t)) \leq \bar{f}_i(\bar{x}_i) \tilde{f}_i(d(t)).$$

由于 $d(t)$ 有界, 从而存在未知常数 $\Theta \geq 1$, 满足 $|\tilde{f}_i(d(t))| \leq \Theta$, 从而由假设1知式(7)成立.

证毕.

为了克服控制方向未知带来的困难, 借鉴文献[14,19]的处理方法, 采用Nussbaum-type增益方法.

称函数 $N(\eta)$ 为Nussbaum-type 函数, 如果它有下面的性质^[9]:

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\eta) d\eta = +\infty, \quad (8)$$

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\eta) d\eta = -\infty. \quad (9)$$

本文中, 选取 $N(\eta) = \exp(\eta^2) \cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ ^[17,19], 易知 $N(\eta)$ 是Nussbaum-type 函数.

引理 5 设 $N(\eta) = \exp(\eta^2) \cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ 是光滑的Nussbaum-type函数, $q \geq 1$ 是奇数, 则 $N^q(\eta)$ 也是光滑的Nussbaum-type函数, 即 $N^q(\eta)$ 也具有性质(8)和(9).

3 控制器设计及主要结果(Design of controller and main results)

令 $p = \max\{p_i | 1 \leq i \leq n\} = p_1$.

第1步 引入变量 $z_1 = x_1$, 考虑正定Lyapunov 函数

$$V_1(z_1) = \frac{1}{p-p_1+2} z_1^{p-p_1+2}.$$

由式(7)可知 $V_1(z_1)$ 的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq z_1^{p_1+1}(g_1x_2^{p_1} + \phi_1(x, u, d(t))) \leq \\ &z_1^{p_1+1}g_1x_2^{p_1} + z_1^{p_1+1}\bar{f}_1(x_1)\Theta \leq \\ &z_1^{p_1+1}g_1x_2^{p_1} + z_1^{p_1+1}(1 + \bar{f}_1(x_1))\Theta = \\ &z_1^{p_1+1}g_1x_2^{p_1} + z_1^{p_1+1}\beta_1^{p_1}(x_1)\Theta.\end{aligned}\quad (10)$$

其中 $\beta_1(x_1) = [1 + \bar{f}_1(x_1)]^{\frac{1}{p_1}} \geq 1$ 是光滑函数.

选择自适应虚拟控制律

$$\begin{cases} \alpha_1(x_1, \eta_1) = \Gamma_1 z_1 N(\eta_1) \beta_1(x_1), \\ \dot{\eta}_1(x_1, \eta_1) = \lambda_1 z_1^{p_1+1} \beta_1^{p_1}(x_1). \end{cases}\quad (11)$$

其中 $\Gamma_1 > 0$ 和 $\lambda_1 > 0$ 是设计参数. 则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq z_1^{p_1+1}g_1(x_2^{p_1} - \alpha_1^{p_1}) + \\ &z_1^{p_1+1}g_1\alpha_1^{p_1} + z_1^{p_1+1}\beta_1^{p_1}\Theta = \\ &z_1^{p_1+1}g_1(x_2^{p_1} - \alpha_1^{p_1}) + \\ &\lambda_1^{-1}\Gamma_1^{p_1}g_1N^{p_1}(\eta_1)\dot{\eta}_1 + \lambda_1^{-1}\dot{\eta}_1\Theta.\end{aligned}\quad (12)$$

定义 $z_2 = x_2 - \alpha_1$, 利用引理2和引理3, 可得

$$\begin{aligned}&|g_1 z_1^{p_1+1}[x_2^{p_1} - \alpha_1^{p_1}]| \leq \\ &z_1^{p_1+1} + z_2^{p_2+1}\rho_{22}(\bar{x}_2, \eta_1)\hat{g}_1.\end{aligned}\quad (13)$$

其中 $\rho_{22}(\bar{x}_2, \eta_1) \geq 0$ 是已知光滑函数, $\hat{g}_1 = \hat{g}_1(\bar{g}_1) > 0$ 是未知常数. 从而式(12)变为

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq z_1^{p_1+1} + \frac{\Gamma_1^{p_1}}{\lambda_1}g_1N^{p_1}(\eta_1)\dot{\eta}_1 + \\ &\frac{\Theta}{\lambda_1}\dot{\eta}_1 + \hat{g}_1 z_2^{p_2+1}\rho_{22}(\cdot).\end{aligned}\quad (14)$$

第2步 由 $z_2 = x_2 - \alpha_1$, 得

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= g_2(t)x_3^{p_2} + \phi_2(x, u, d(t)) - \frac{\partial\alpha_1}{\partial\eta_1}\dot{\eta}_1 - \\ &\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(g_1x_2^{p_1} + \phi_1(x, u, d(t))) \triangleq \\ &g_2(t)x_3^{p_2} + W_2.\end{aligned}\quad (15)$$

由假设1~3、引理2~4可知

$$|W_2| \leq (|z_1|^{p_2} + |z_2|^{p_2})\gamma_2(x_1, x_2, \eta_1)\bar{\Theta}_2.\quad (16)$$

其中: $\gamma_2(\cdot) > 0$ 是已知光滑函数, $\bar{\Theta}_2 = \max\{\Theta, 1, \bar{g}_1\}$ 是未知常数.

取正定函数 $V_2 = \frac{1}{p-p_2+2}z_2^{p-p_2+2}$, 则由引理2及式(15)(16)可知 V_2 的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq g_2(t)z_2^{p-p_2+1}x_3^{p_2} + z_1^{p_1+1} + z_2^{p_2+1}\rho_{21}(\cdot)\Theta_2 \leq \\ &g_2(t)z_2^{p-p_2+1}x_3^{p_2} + z_1^{p_1+1} + z_2^{p_2+1}\beta_2^{p_2}(\bar{x}_2, \eta_1)\Theta_2.\end{aligned}\quad (17)$$

其中: $\rho_{21} > 0$ 是已知光滑函数, $\beta_2(x_1, x_2, \eta_1) = (1 + \rho_{21}(x_1, x_2, \eta_1) + \rho_{22}(x_1, x_2, \eta_1))^{\frac{1}{p_2}} \geq 1$, $\Theta_2 > 0$ 是未知常数, ρ_{22} 是式(13)中得到的光滑函数. 选择自适应

虚拟控制律

$$\begin{cases} \alpha_2(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = \Gamma_2 z_2 N(\eta_2) \beta_2(x_1, x_2, \eta_1), \\ \dot{\eta}_2(x_1, x_2, \eta_2) = \lambda_2 z_2^{p_2+1} \beta_2^{p_2}(x_1, x_2, \eta_1). \end{cases}\quad (18)$$

其中 $\Gamma_2 > 0$ 和 $\lambda_2 > 0$ 是设计参数. 则(17)式可变为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq g_2(t)z_2^{p-p_2+1}(x_3^{p_2} - \alpha_2^{p_2}) + \\ &g_2(t)z_2^{p-p_2+1}\alpha_2^{p_2} + z_1^{p_1+1} + z_2^{p_2+1}\beta_2^{p_2}\Theta_2 \leq \\ &g_2(t)z_2^{p-p_2+1}(x_3^{p_2} - \alpha_2^{p_2}) + z_1^{p_1+1} + \\ &\lambda_2^{-1}\Gamma_2^{p_2}g_2(t)N^{p_2}(\eta_2)\dot{\eta}_2 + \lambda_2^{-1}\dot{\eta}_2\Theta_2.\end{aligned}\quad (19)$$

定义 $z_3 = x_3 - \alpha_2$, 与式(13)相似, 存在光滑函数 $\rho_{32}(x_1, x_2, x_3, \eta_1, \eta_2) \geq 0$ 和未知常数 $\hat{g}_2 > 0$ 满足

$$|g_2(t)z_2^{p-p_2+1}(x_3^{p_2} - \alpha_2^{p_2})| \leq z_2^{p_2+1} + \hat{g}_2 z_3^{p_3+1}\rho_{32}(\cdot),\quad (20)$$

则式(19)又可变为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq z_1^{p_1+1} + z_2^{p_2+1} + \lambda_2^{-1}\Gamma_2^{p_2}g_2(t)N^{p_2}(\eta_2)\dot{\eta}_2 + \\ &\lambda_2^{-1}\dot{\eta}_2\Theta_2 + \hat{g}_2 z_3^{p_3+1}\rho_{32}(\cdot).\end{aligned}\quad (21)$$

第k步($3 \leq k \leq n$) 重复第1步和第2步的推导过程, 可得在第 $k-1$ 步有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{k-1} &\leq \\ &\sum_{i=1}^{k-1} z_i^{p_i+1} + \lambda_{k-1}^{-1}\dot{\eta}_{k-1}\Theta_{k-1} + \hat{g}_{k-1}z_k^{p_k+1}\rho_{k2}(\cdot) + \\ &\lambda_{k-1}^{-1}\Gamma_{k-1}^{p_{k-1}}g_{k-1}(t)N^{p_{k-1}}(\eta_{k-1})\dot{\eta}_{k-1},\end{aligned}\quad (22)$$

并且由 $z_k = x_k - \alpha_{k-1}$, 知

$$\begin{aligned}\dot{z}_k &= \\ &g_k(t)x_{k+1}^{p_k} + \phi_k(x, u, d(t)) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial\eta_j}\dot{\eta}_j - \\ &\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial\alpha_{k-1}}{\partial x_j}(g_j x_{j+1}^{p_j} + \phi_j(x, u, d(t))) \triangleq \\ &g_k(t)x_{k+1}^{p_k} + W_k.\end{aligned}\quad (23)$$

与式(16)的推导相似, 可知存在光滑函数 $\gamma_k > 0$ 和未知常数 $\bar{\Theta}_k \geq 1$ 满足

$$|W_k| \leq \sum_{j=1}^k |z_j|^{p_k} \gamma_k(\bar{x}_k, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})\bar{\Theta}_k.\quad (24)$$

考虑正定函数 $V_k = \frac{1}{p-p_k+2}z_k^{p-p_k+2}$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_k &= z_k^{p-p_k+1}\dot{z}_k \leq z_k^{p-p_k+1}g_k(t)x_{k+1}^{p_k} + \\ &|z_k|^{p-p_k+1}[\sum_{j=1}^k |z_j|^{p_k} \gamma_k(\cdot)\bar{\Theta}_k].\end{aligned}\quad (25)$$

因为由引理2可得

$$\begin{aligned} & |z_k|^{p-p_k+1} \left[\sum_{j=1}^k |z_j|^{p_k} \gamma_k(\cdot) \bar{\Theta}_k \right] = \\ & \sum_{j=1}^k [|z_k|^{p-p_k+1} |z_j|^{p_k} \gamma_k(\cdot) \bar{\Theta}_k] \leq \\ & \sum_{j=1}^{k-1} z_j^{p+1} + z_k^{p+1} \rho_{k1}(\cdot) \Theta_k. \end{aligned} \quad (26)$$

其中: $\rho_{k1}(\cdot) = \frac{k(p-p_k+1)}{p+1} \left[\frac{p_k}{p+1} \gamma_k(\cdot) \right]^{\frac{p+1}{p-p_k+1}} > 0$ 是已知光滑函数, $\Theta_k = \bar{\Theta}_k^{\frac{p+1}{p-p_k+1}} > 0$ 是未知常数. 所以有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k & \leq \\ & z_k^{p-p_k+1} g_k(t) x_{k+1}^{p_k} + \sum_{j=1}^{k-1} z_j^{p+1} + z_k^{p+1} \rho_{k1}(\cdot) \Theta_k \leq \\ & z_k^{p-p_k+1} g_k(t) x_{k+1}^{p_k} + \sum_{j=1}^{k-1} z_j^{p+1} + z_k^{p+1} \beta_k^{p_k} \Theta_k. \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\beta_k(\bar{x}_k, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = (1 + \rho_{k1}(\cdot) + \rho_{k2}(\cdot))^{\frac{1}{p_k}}$. 选取自适应虚拟控制律

$$\begin{cases} \alpha_k(\bar{x}_k, \eta_1, \dots, \eta_k) = \Gamma_k z_k N(\eta_k) \beta_k(\cdot), \\ \dot{\eta}_k(\bar{x}_k, \eta_1, \dots, \eta_k) = \lambda_k z_k^{p+1} \beta_k^{p_k}(\cdot). \end{cases} \quad (28)$$

从而有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k & \leq g_k(t) z_k^{p-p_k+1} (x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}) + \\ & g_k(t) z_k^{p-p_k+1} \alpha_k^{p_k} + \sum_{j=1}^{k-1} z_j^{p+1} + z_k^{p+1} \beta_k^{p_k} \Theta_k = \\ & g_k(t) z_k^{p-p_k+1} (x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} z_j^{p+1} + \\ & \lambda_k^{-1} \Gamma_k^{p_k} g_k(t) N^{p_k}(\eta_k) \dot{\eta}_k + \lambda_k^{-1} \dot{\eta}_k \Theta_k. \end{aligned} \quad (29)$$

定义 $z_{k+1} = x_{k+1} - \alpha_k$, 与式(13)相似, 存在光滑函数 $\rho_{(k+1),2}(x_1, \dots, x_k, \eta_1, \dots, \eta_k) > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & |g_k(t) z_k^{p-p_k+1} (x_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k})| \leq \\ & z_k^{p+1} + \hat{g}_k z_{k+1}^{p+1} \rho_{(k+1),2}(\cdot). \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\hat{g}_k > 0$ 是未知常数, 从而

$$\begin{aligned} \dot{V}_k & \leq \sum_{j=1}^k z_j^{p+1} + \lambda_k^{-1} \Gamma_k^{p_k} g_k(t) N^{p_k}(\eta_k) \dot{\eta}_k + \\ & \lambda_k^{-1} \dot{\eta}_k \Theta_k + \hat{g}_k z_{k+1}^{p+1} \rho_{(k+1),2}(\cdot). \end{aligned} \quad (31)$$

第n步 令 $z_n = x_n - \alpha_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} \dot{z}_n & = g_n(t) u^{p_n} + \phi_n(x, u, d(t)) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j - \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1}^{p_j} + \phi_j(x, u, d(t))). \end{aligned} \quad (32)$$

选取 $V_n = \frac{1}{p-p_n+2} z_n^{p-p_n+2}$, 与第k步的推导

相似, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n & = \\ & z_n^{p-p_n+1} g_n(t) u^{p_n} + z_n^{p-p_n+1} \{ \phi_n(x, u, d(t)) - \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (g_j x_{j+1}^{p_j} + \\ & \phi_j(x, u, d(t))) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \} \leq \\ & z_n^{p-p_n+1} g_n(t) u^{p_n} + |z_n^{p-p_n+1}| \left[\sum_{j=1}^n |z_j|^{p_n} \gamma_n(\cdot) \bar{\Theta}_n \right] \leq \\ & z_n^{p-p_n+1} g_n(t) u^{p_n} + \sum_{j=1}^{n-1} z_j^{p+1} + z_n^{p+1} \rho_{n1}(\cdot) \Theta_n \leq \\ & z_n^{p-p_n+1} g_n(t) u^{p_n} + \sum_{j=1}^{n-1} z_j^{p+1} + z_n^{p+1} \beta_n^{p_n}(\cdot) \Theta_n. \end{aligned} \quad (33)$$

其中: 光滑函数 $\rho_{n1}(\cdot), \beta_n(\cdot)$ 的选取与 $\rho_{k1}(\cdot), \beta_k(\cdot)$ 类似, $\Theta_n > 0$ 是未知常数.

选取自适应控制律

$$\begin{cases} u(\cdot) = \Gamma_n z_n N(\eta_n) \beta_n(\cdot), \\ \dot{\eta}_n(\cdot) = \lambda_n z_n^{p+1} \beta_n^{p_n}(\cdot), \end{cases} \quad (34)$$

则可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n & \leq \\ & \sum_{j=1}^{n-1} z_j^{p+1} + \lambda_n^{-1} \Gamma_n^{p_n} g_n(t) N^{p_n}(\eta_n) \dot{\eta}_n + \lambda_n^{-1} \dot{\eta}_n \Theta_n \leq \\ & \sum_{j=1}^n z_j^{p+1} + \lambda_n^{-1} \Gamma_n^{p_n} g_n(t) N^{p_n}(\eta_n) \dot{\eta}_n + \lambda_n^{-1} \dot{\eta}_n \Theta_n. \end{aligned} \quad (35)$$

至此完成了控制器的设计.

定理 1 如果假设1~3成立, 将上面的控制器设计程序应用于系统(1), 则对任意的初始条件, 闭环系统的所有信号在区间 $[0, \infty)$ 上是有界的, 并且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

证 设闭环系统的解的最大存在区间为 $[0, t_f)$. 不失一般性, 设 $\Gamma_k = \lambda_k = 1, 1 \leq k \leq n$.

由式(28)(31)以及 $\beta_k(\cdot)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) & \leq \sum_{j=1}^k \dot{\eta}_j + g_k(t) N^{p_k}(\eta_k) \dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k \Theta_k + \hat{g}_k \dot{\eta}_{k+1} \leq \\ & g_k(t) N^{p_k}(\eta_k) \dot{\eta}_k + b_k \sum_{j=1}^{k+1} \dot{\eta}_j, \\ & \forall t \in [0, t_f), 1 \leq k \leq n, \end{aligned} \quad (36)$$

其中: $b_k = \max\{\Theta_k + 1, \hat{g}_k\}, \dot{\eta}_{n+1} = 0$. 将式(36)两端积分可得

$$V_k(t) \leq \bar{c}_k + \int_0^t g_k(\tau) N^{p_k}(\eta_k) \dot{\eta}_k d\tau + b_k \sum_{j=1}^{k+1} \eta_j. \quad (37)$$

对 $\forall t \in [0, t_f], 1 \leq k \leq n$, 其中 $\bar{c}_k, 1 \leq k \leq n$ 是和初值有关的常数. 为了证明闭环系统的稳定性, 需要下面的引理.

引理 6 不等式(37)中的 $\eta_k(t), V_k(t), (1 \leq k \leq n)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上是有界的.

注 1 引理6的证明思路类似于文献[17], 略.

根据引理6知, $z_k(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界. 再由式(28)可知 $\alpha_k, x_k(t)$ 在区间 $[0, t_f]$ 上有界. 于是闭环系统的所有变量在区间 $[0, t_f]$ 上有界, 从而 $t_f = \infty$.

因为 $u = \alpha_n$ 是有界的, 所以 $\|\dot{x}(t)\|$ 有界. 另外由式(28)知 $\dot{\eta}_k$ 有界, 因此 $\dot{z}_k(t)$ 有界, 又由于 $z_k(t)$ 有界, 从而 $z_k^{p+1}(t)$ 一致连续. 又

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t z_k^{p+1} d\tau &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{\eta}_k(\tau) d\tau = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_k(t) - \eta_k(0) &< \infty, \end{aligned} \quad (38)$$

所以由Barbalat引理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_k(t) = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (39)$$

再由式(28), z_k 的定义及 η_k 的有界性, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) = 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (40)$$

证毕.

注 2 虽然Nussbaum-type增益方法能解决控制方向未知时的控制问题, 但Nussbaum-type增益方法有一个缺点, 那就是瞬态控制量过大, 这在以往的文献和后面的例子中可看出. 克服这个缺点是今后的一个研究重点.

4 仿真例子(Simulation)

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t)x_2^3 + \theta_1 x_1^3, \\ \dot{x}_2 = g_2(t)u + \theta_2 x_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (41)$$

其中: θ_1 和 θ_2 是未知常数, 时变参数 $g_i(t)$ 在未知闭区间 $I_i = [l_i^-, l_i^+]$ 内取值, 且 $0 \notin I_i, i = 1, 2, g_i(t)$ 的符号是未知的. 控制目标是设计光滑自适应控制律, 使得系统的状态渐近趋于零.

仿真基于以下的选择: 1) 不确定参数 $g_1(t) = 1.5 + 0.5 \sin t, g_2(t) = 4 + 1.5 \cos t, \theta_1(t) = \sin t, \theta_2(t) = 2 + \cos t$; 2) 初始条件 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, \eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$; 3) 设计参数 $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$. 仿真结果示于图1~4. 由仿真结果可看出, 控制效果较好.

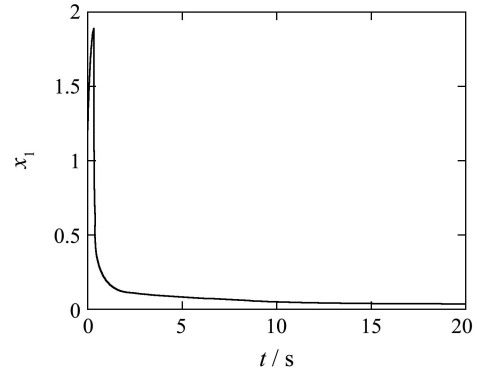


图 1 状态曲线 x_1

Fig. 1 Curve of state x_1

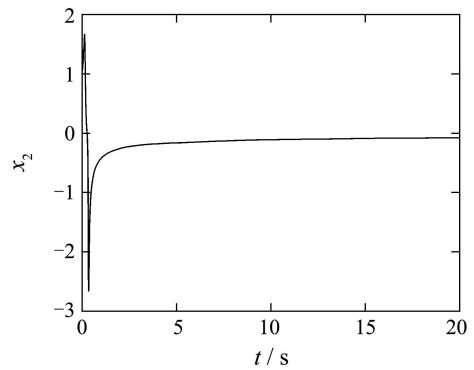


图 2 状态曲线 x_2

Fig. 2 Curve of state x_2

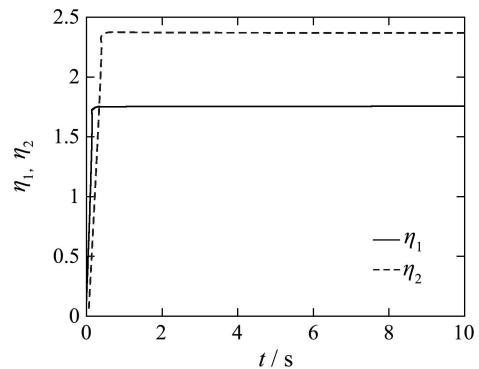


图 3 参数 η_1 和 η_2

Fig. 3 Parameters η_1 and η_2

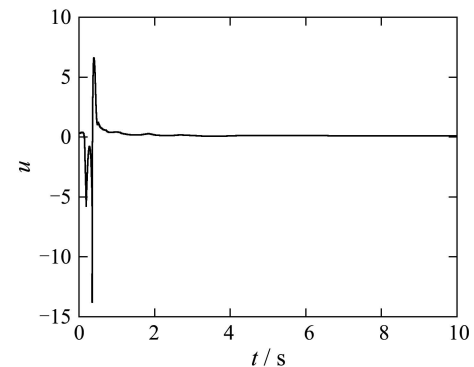


图 4 控制 u

Fig. 4 Control u

5 结论(Conclusion)

本文针对一类控制方向未知的具有不可控不稳定线性化的不确定本质非线性系统,应用Nussbaum-type 增益技术和adding a power integrator 递推设计方法,设计了一种鲁棒自适应状态反馈控制器.所设计的控制器能够保证闭环系统状态渐近趋于零,且闭环系统的所有信号全局一致有界.

参考文献(References):

- [1] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [2] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear control without overparametrization[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 177 – 185.
- [3] JIANG Z P, PRALY L. Iterative designs of adaptive controllers with nonlinear integrators[C]//*Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control*. Brighton, UK: [s.n.], 1991: 2482 – 2487.
- [4] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. New York: Wiley, 1995.
- [5] LIN W, QIAN C J. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: An adding a power integrator technique[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 353 – 364.
- [6] LIN W, QIAN C J. Adding a power integrator: A tool for global stabilization of high-order cascade nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 339 – 351.
- [7] LIN W, QIAN C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback case[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1249 – 1265.
- [8] LIN W, QIAN C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the nonsmooth feedback framework[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(5): 757 – 774.
- [9] NUSSBAUM R D. Some remark on the conjecture in parameter adaptive control[J]. *Systems & Control Letters*, 1983, 3(4): 243 – 246.
- [10] MARTENSSON B. Remarks on adaptive stabilization of first order nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(1): 1 – 7.
- [11] RYAN E P. A universal adaptive stabilizer for a class of nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1991, 16(3): 209 – 218.
- [12] RYAN E P. A nonlinear universal servomechanism[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(4): 753 – 761.
- [13] ILCHMANN A, RYAN E P. Universal tracking for nonlinearly-perturbed systems in the presence of noise[J]. *Automatica*, 1994, 30(2): 337 – 346.
- [14] DING Z. Adaptive control of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients[J]. *Int J of Control Signal Processing*, 2000, 14(4): 505 – 517.
- [15] YE X, JIANG J. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(11): 1617 – 1621.
- [16] GE Shuzhi Sam, WANG J. Robust adaptive neural control for a class of perturbed strict feedback nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(11): 1409 – 1419.
- [17] YE X D. Asymptotic regulation of time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control directions[J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 929 – 935.
- [18] YE Xudong. Adaptive nonlinear output-feedback control with unknown high-frequency gain sign[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(1): 112 – 115.
- [19] GE Shuzhi Sam, WANG J. Robust adaptive tracking for time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control coefficients[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1463 – 1469.
- [20] YANG B, LIN W. Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by smooth output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1069 – 1080.

作者简介:

魏春玲 (1970—), 女, 博士生, 研究方向为非线性系统的自适应控制, E-mail:weichunling@eyou.com;

王强德 (1971—), 男, 2005年在东北大学获得博士学位, 研究方向为自适应控制、鲁棒控制, E-mail:wqdwchl@sohu.com;

武玉强 (1962—), 男, 博士生导师, 曲阜师范大学自动化研究所教授, 研究方向为变结构控制、非线性系统控制与自适应控制, E-mail:wyq@mail.qfnu.edu.cn.