第 24 卷第 4 期 控 制 理 论 与 应 用 Vol. 24 No. 4
2007 年 8 月 Control Theory & Applications Aug. 2007

文章编号：1000−8152(2007)04−0587−07

不确定奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制

朱淑倩[1,2]，张承慧[3]， 李振波[4]，程兆林[1]

(1. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100; 2. 山东大学 计算机科学与技术学院, 山东 济南 250061;

3. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061; 4. 山东经济学院 统计与数学学院, 山东 济南 250014)

摘要: 研究了含范数有界参数不确定性的奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制问题. 文中所考虑的控制器增益摄动包括加性摄动和乘性摄动两种形式. 在标称奇异时滞系统的时滞相关型稳定性判据的基础上, 引入了一个新的时滞相关型有界实引理(BRL), 进而给出了时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制器存在的充分性条件, 并利用LMIs和锥补线性化算法给出了控制器的表达式. 从数值算例可以看出, 所给出的设计算法是有效的.

关键词: 奇异时滞系统; 鲁棒H_∞弹性控制; 时滞相关型判据; 线性矩阵不等式(LMI); 锥补线性化算法

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Delay-dependent robust resilient H-infinity control for uncertain singular time-delay systems

ZHU Shu-qian[1,2], ZHANG Cheng-hui[3], LI Zhen-bo[4], CHENG Zhao-lin[1]

(1. School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China;

2. School of Computer Science and Technology, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

3. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

4. Department of Mathematics and Statistics, Shandong Economic University, Jinan Shandong 250014, China)

Abstract: The delay-dependent robust resilient H-infinity control for singular time-delay systems with norm-bounded parameter uncertainty is investigated in this paper. The considered resilient controller is related to additive and multiplicative controller gain variations. First, based on the delay-dependent stability criterion for nominal singular time-delay systems, a new delay-dependent bounded real lemma(BRL) is established. Then the sufficient conditions for the existence of the robust resilient H-infinity controller are presented. Moreover, the explicit expression for the desired controller is deigned by using the linear matrix inequalities(LMIs) and the cone complementarity linearization algorithm. Finally, a numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: singular time-delay systems; robust resilient H-infinity control; delay-dependent criteria; linear matrix inequality (LMI); cone complementarity linearization algorithm

1 引言(Introduction)

鲁棒H_∞控制是系统控制领域非常重要的干扰抑制控制设计问题. 近年来, 时滞系统的鲁棒H_∞控制取得了长足的发展, 成为时滞系统领域的热点研究课题. 奇异时滞系统的鲁棒H_∞控制也得以研究, 见文献[1,2], 但上述结果都是时滞无关型的, 这具有较大的保守性.

另一方面, 在实际物理过程中, 由于模型系统中隐含的不确定性, 及控制器实施过程中所需的附加调整等原因, 使得控制器增益常存在一定的误差, 从而造成闭环系统的性能下降或稳定性的破坏, 这种控制器被称为“脆弱”控制器. 因此, 设计控制器时能主动考虑给予一定的冗余度, 允许控制器增益在一定范围内变化就显得很有意义. 近年来, 一些学者给出了一些方法来处理弹性控制器设计问题[3~6]. 但据作者所知, 目前尚未有文献研究奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒弹性控制, 这启发了本文的工作.

本文研究了不确定奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制问题. 控制器增益摄动包括加性摄动和乘性摄动两种形式. 在标称奇异时滞系统的时滞相关型稳定性判据的基础上, 引入了一个新的时滞相关型有界实引理(BRL), 并进而给出了时滞相关

收稿日期: 2006−01−05; 收修改稿日期: 2006−11−10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50477042).

型鲁棒H_∞弹性控制器存在的充分性条件及控制器设计算法.

文中用到如下记号: $C_{n,\tau}$表示由$[-\tau,0]$映到$\mathbb{R}^n$中的所有连续向量值函数构成的Banach空间; $L_2[0,\infty)$表示$[0,\infty)$上的所有平方可积向量值函数构成的空间, $\| f \|_2 := (\int_0^\infty \| f(t) \|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}$表示$L_2[0,\infty)$空间中函数$f(t)$的范数; $\| G(s) \|_\infty := \sup\limits_{w\in L_2[0,\infty), w\neq 0} \frac{\| z \|_2}{\| w \|_2}$表示稳定连续系统的传递函数矩阵$G(s)$的$H_\infty$范数; 符号$*$用于一些矩阵描述中来表示对称结构, 例如$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix}$.

2 问题的描述(Problem statement)

考虑一类不确定奇异时滞系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau)x(t-\\ \qquad \tau) + B_1 u(t) + (B_2 + \Delta B_2)w(t), \\ z(t) = (G+\Delta G)x(t) + Du(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$为状态, $u(t)\in\mathbb{R}^q$为控制输入, $w(t)\in\mathbb{R}^r$为干扰输入, 且$w(t)\in L_2[0,\infty), w(0)=0, z(t)\in\mathbb{R}^s$为受控输出. $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$且$0<\operatorname{rank} E = p < n$, $A, A_\tau, B_1, B_2, G, D$为已知适维常矩阵. $0<\tau\leqslant\tau_m$为未知滞后常数, $\phi(t)\in C_{n,\tau}$为满足相容性条件的初始函数. $\Delta A, \Delta A_\tau, \Delta B_2, \Delta G$为常阵, 表征系统的不确定性, 并且假设具有如下结构:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_\tau & \Delta B_2 \\ \Delta G & \star & \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} E_1 & E_\tau & E_2 \end{bmatrix}, \tag{2a}$$

$$F^T F \leqslant I,\ F\in\mathbb{R}^{i\times j}, \tag{2b}$$

其中: $D_1\in\mathbb{R}^{n\times i}, D_2\in\mathbb{R}^{s\times i}, E_1\in\mathbb{R}^{j\times n}, E_\tau\in\mathbb{R}^{j\times n}, E_2\in\mathbb{R}^{j\times r}$为已知实常阵, F为不确定实常阵.

注 1 为保证零初始函数$\phi(t)\equiv 0, t\in[-\tau,0]$, 为系统的相容性初始函数, 故限制干扰$w(t)$的初值为$w(0)=0$. 一般情况下, 干扰的瞬时值不致影响系统, 故上述限制不失一般性.

本文将考虑弹性控制器

$$u(t) = (K+\Delta K)x(t) \tag{3}$$

及H_∞性能指标

$$J = \| G_{zw}(s) \|_\infty . \tag{4}$$

其中$G_{zw}(s)$表示控制器(3)作用于系统(1)构成的闭环系统从干扰输入$w(t)$到受控输出$z(t)$的传递函数.

定义 1 考虑不确定奇异时滞系统(1). 若存在弹性控制器(3), 使得对于任意常时滞$\tau: 0<\tau\leqslant\tau_m$, 由(1)和(3)构成的闭环系统都是正则, 无脉冲模且鲁棒内稳定(即$w(t)\equiv 0$时闭环系统鲁棒渐近稳定), 且对于事先给定的常数$\gamma>0$, 指标J满足$J\leqslant\gamma$ (即在零初始条件下有: $\| z \|_2 \leqslant \gamma \| w \|_2, \forall w\in L_2[0,\infty), w\neq 0$), 则称控制器(3)为系统(1)的一个鲁棒$H_\infty$弹性控制器.

注 2 关于奇异时滞系统正则, 无脉冲模且渐近稳定的定义, 可参见文献[7].

关于控制器增益摄动, 将考虑两种形式:

1) 加性摄动:

$$\Delta K = D_3 F_3 E_3,\ F_3^T F_3 \leqslant I; \tag{5a}$$

2) 乘性摄动:

$$\Delta K = D_4 F_4 E_4 K,\ F_4^T F_4 \leqslant I. \tag{5b}$$

其中: $D_i, E_i (i=3,4)$为已知实常阵, $F_i (i=3,4)$为不确定实常阵.

若$\Delta A, \Delta A_\tau, \Delta B_2, \Delta G$及$\Delta K$满足式(2)及(5), 则称其为容许不确定性.

本文的目的即为系统(1)设计时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制器(3). 将控制器(3)作用于系统(1), 得到闭环

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \\ (A_k+\Delta A_k)x(t) + (A_\tau+\Delta A_\tau)x(t-\\ \tau) + (B_2+\Delta B_2)w(t), \\ z(t) = (G_k+\Delta G_k)x(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{6}$$

其中: $A_k = A + B_1 K$, $\Delta A_k = \Delta A + B_1 \Delta K$, $G_k = G + DK$, $\Delta G_k = \Delta G + D\Delta K$.

对于加性控制器增益摄动, ΔA_k及ΔG_k可写为

$$\Delta A_k = D_{k1} F_k E_k,\ \Delta G_k = D_{k2} F_k E_k. \tag{7a}$$

其中:

$$D_{k1} = \begin{bmatrix} D_1 & B_1 D_3 \end{bmatrix},\ D_{k2} = \begin{bmatrix} D_2 & D D_3 \end{bmatrix}, \tag{7b}$$

$$E_k = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{bmatrix},\ F_k = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F_3 \end{bmatrix}. \tag{7c}$$

而对乘性控制器增益摄动, ΔA_k及ΔG_k可写为

$$\Delta A_k = D_{c1} F_c E_c,\ \Delta G_k = D_{c2} F_c E_c. \tag{8a}$$

其中:

$$D_{c1} = \begin{bmatrix} D_1 & B_1 D_4 \end{bmatrix},\ D_{c2} = \begin{bmatrix} D_2 & D D_4 \end{bmatrix}, \tag{8b}$$

$$E_c = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_4 K \end{bmatrix},\ F_c = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}. \tag{8c}$$

记

$$\tilde{D}\tilde{D}^T = D_1 D_1^T + D_{k1} D_{k1}^T, \tag{9a}$$

$$\bar{D}\bar{D}^T = D_1 D_1^T + D_{c1} D_{c1}^T. \tag{9b}$$

为得到本文主要结果, 引入如下引理:

引理 1[7]　若存在矩阵$Q>0,\ X\geqslant 0,\ Z>0$及P,Y满足下列LMIs:

$$
\begin{aligned}
&PE=E^{\mathrm T}P^{\mathrm T}\geqslant 0,\\
&\begin{bmatrix}\varPi & PA_\tau-Y+\tau_m A^{\mathrm T}ZA_\tau\\ * & -Q+\tau_m A_\tau^{\mathrm T}ZA_\tau\end{bmatrix}<0,\\
&\begin{bmatrix}X & Y\\ * & E^{\mathrm T}ZE\end{bmatrix}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

其中$\varPi=A^{\mathrm T}P^{\mathrm T}+PA+Q+\tau_m X+Y+Y^{\mathrm T}+\tau_m A^{\mathrm T}ZA$, 则对任意常时滞$\tau(0<\tau\leqslant\tau_m)$, 系统

$$
\begin{cases}E\dot x(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0]\end{cases}
$$

正则、无脉冲模且渐近稳定.

引理 2[8] 对任意适维矩阵G,H及标量$\epsilon>0$, 下列不等式成立:

$$GH+H^{\mathrm T}G^{\mathrm T}\leqslant\epsilon^{-1}GG^{\mathrm T}+\epsilon H^{\mathrm T}H.$$

3　主要结果(Main results)

首先, 考虑式(1)的无控制标称系统:

$$
\begin{cases}E\dot x(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)+B_2w(t),\\ z(t)=Gx(t),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{10}
$$

在下面的引理中, 将给出奇异时滞系统(10)的一个新的时滞相关型BRL.

引理 3　对给定的$\gamma>0$, 若存在矩阵$Q>0,X\geqslant 0,\ Z>0$及P,Y满足下列LMIs:

$$PE=E^{\mathrm T}P^{\mathrm T}\geqslant 0,\tag{11a}$$

$$
\begin{bmatrix}\varGamma & PA_\tau-Y & \tau_m A^{\mathrm T}Z & PB_2\\ * & -Q & \tau_m A_\tau^{\mathrm T}Z & 0\\ * & * & -\tau_m Z & \tau_m ZB_2\\ * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}<0,\tag{11b}
$$

$$
\begin{bmatrix}X & Y\\ * & E^{\mathrm T}ZE\end{bmatrix}\geqslant 0,\tag{11c}
$$

其中$\varGamma=A^{\mathrm T}P^{\mathrm T}+PA+Q+\tau_m X+Y+Y^{\mathrm T}+G^{\mathrm T}G$, 则系统(10)对任意的$\tau(0<\tau\leqslant\tau_m)$正则、无脉冲模、内稳定, 且满足$\|G_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

证　由引理1及式(11)易知系统(10)正则、无脉冲模且内稳定.

下面证$\|G_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$, 即证: 在$\phi(t)=0,t\in[-\tau,0]$时, 有$\|z\|_2\leqslant\gamma\|w\|_2,\forall w\in \mathrm{L}_2[0,\infty),w(0)=0$. 注意到$(E,A)$正则、无脉冲模, 加之$\phi(t)=0,t\in[-\tau,0]$, 故说明存在非奇异矩阵$M,N$, 使得系统(10)限制系统等价(r. s. e.)于

$$
\begin{cases}\bar E\dot y(t)=\bar Ay(t)+\bar A_\tau y(t-\tau)+\bar B_2w(t),\\ z(t)=\bar Gy(t),\\ y(t)=0,\ t\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{12}
$$

其中:

$$
y(t)=N^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix},\ \bar E=MEN=\begin{bmatrix}I_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},
$$

$$
\bar A=MAN=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & I_{n-p}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar A_\tau=MA_\tau N=\begin{bmatrix}A_{\tau 11} & A_{\tau 12}\\ A_{\tau 21} & A_{\tau 22}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar B_2=MB_2=\begin{bmatrix}B_{21}\\ B_{22}\end{bmatrix},\bar G=GN=\begin{bmatrix}G_1 & G_2\end{bmatrix},
$$

$$y_1(t)\in\mathbb R^p,\ A_{\tau 11}\in\mathbb R^{p\times p},\ B_{21}\in\mathbb R^{p\times q},\ G_1\in\mathbb R^{s\times p}.$$

记

$$
\bar P:=N^{\mathrm T}PM^{-1}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar Q:=N^{\mathrm T}QN=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ * & Q_{22}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar X:=N^{\mathrm T}XN=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ * & X_{22}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar Y:=N^{\mathrm T}YN=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{21} & Y_{22}\end{bmatrix},
$$

$$
\bar Z:=M^{-T}ZM^{-1}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ * & Z_{22}\end{bmatrix}.
$$

显然, 式(11)成立当且仅当

$$\bar P\bar E=\bar E^{\mathrm T}\bar P^{\mathrm T}\geqslant 0,\tag{13a}$$

$$
\begin{bmatrix}\bar\varGamma & \bar P\bar A_\tau-\bar Y & \tau_m\bar A^{\mathrm T}\bar Z & \bar P\bar B_2\\ * & -\bar Q & \tau_m\bar A_\tau^{\mathrm T}\bar Z & 0\\ * & * & -\tau_m\bar Z & \tau_m\bar Z\bar B_2\\ * & * & * & -\gamma^2 I\end{bmatrix}<0,\tag{13b}
$$

$$
\begin{bmatrix}\bar X & \bar Y\\ * & \bar E^{\mathrm T}\bar Z\bar E\end{bmatrix}\geqslant 0.\tag{13c}
$$

其中: $\bar\varGamma=\bar A^{\mathrm T}\bar P^{\mathrm T}+\bar P\bar A+\bar Q+\tau_m\bar X+\bar Y+\bar Y^{\mathrm T}+\bar G^{\mathrm T}\bar G$.

显然, 这里$\bar P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ 0 & P_{22}\end{bmatrix}$, $P_{11}>0$. 由式(13)易得

$$
\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & Y_{11} & Y_{12}\\ * & X_{22} & Y_{21} & Y_{22}\\ * & * & Z_{11} & 0\\ * & * & * & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,\tag{14}
$$

故$Y_{12}=0, Y_{22}=0$. 引入Lyapunov-Krasovskii泛函

$$V(y_t)=y^{\mathrm{T}}(t)\bar{P}\bar{E}y(t)+\int_{t-\tau}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)\bar{Q}y(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{y}^{\mathrm{T}}(\alpha)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\dot{y}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.$$

利用$y_1(t)-y_1(t-\tau)=\int_{t-\tau}^{t}\dot{y}_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha$, 计算$V(y_t)$沿系统(12)轨线的导数, 有

$$\begin{aligned}&\dot{V}(y_t)\mid_{(12)}+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)=\\&\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\0&P_{22}\end{bmatrix}\xi(t)+\\&\xi^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\0&P_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\ *&Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}-\\&\begin{bmatrix}y_1(t-\tau)\\y_2(t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\ *&Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t-\tau)\\y_2(t-\tau)\end{bmatrix}+\\&\tau\dot{y}^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\dot{y}(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{y}_1^{\mathrm{T}}(\alpha)Z_{11}\dot{y}_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\\&\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}G_1^{\mathrm{T}}G_1&G_1^{\mathrm{T}}G_2\\ *&G_2^{\mathrm{T}}G_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t).\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\xi(t)=\\&\begin{bmatrix}A_1+A_{\tau11}\\A_{\tau21}\end{bmatrix}y_1(t)-\begin{bmatrix}A_{\tau11}\\A_{\tau21}\end{bmatrix}\int_{t-\tau}^{t}\dot{y}_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\\&\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}y_2(t)+\begin{bmatrix}A_{\tau12}\\A_{\tau22}\end{bmatrix}y_2(t-\tau)+\begin{bmatrix}B_{21}\\B_{22}\end{bmatrix}w(t).\end{aligned}$$

注意到式(14), 有

$$\begin{aligned}&-2\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\0&P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{\tau11}\\A_{\tau21}\end{bmatrix}\int_{t-\tau}^{t}\dot{y}_1(\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant\\&\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\dot{y}_1(\alpha)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&\Theta_1\\ *&X_{22}&\Theta_2\\ *&*&Z_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\\dot{y}_1(\alpha)\end{bmatrix}\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

式中

$\Theta_1=Y_{11}-P_{11}A_{\tau11}-P_{12}A_{\tau21}, \Theta_2=Y_{21}-P_{22}A_{\tau21}$, 因此

$$\begin{aligned}&\dot{V}(y_t)\mid_{(12)}+z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\leqslant\\&\eta^{\mathrm{T}}(t)\Sigma\eta(t)+\tau_m\dot{y}^{\mathrm{T}}(t)\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Z}\bar{E}\dot{y}(t)=\\&\begin{bmatrix}y(t)\\y(t-\tau)\\w(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\Pi\begin{bmatrix}y(t)\\y(t-\tau)\\w(t)\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{15}$$

其中:

$$\eta(t)=\begin{bmatrix}y_1^{\mathrm{T}}(t)&y_2^{\mathrm{T}}(t)&y_1^{\mathrm{T}}(t-\tau)&y_2^{\mathrm{T}}(t-\tau)&w^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\Sigma_{13}&\Sigma_{14}&\Sigma_{15}\\ *&\Sigma_{22}&P_{22}A_{\tau21}-Y_{21}&P_{22}A_{\tau22}&P_{22}B_{22}\\ *&*&-Q_{11}&-Q_{12}&0\\ *&*&*&-Q_{22}&0\\ *&*&*&*&-\gamma^2I\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\Sigma_{11}=P_{11}A_1+A_1^{\mathrm{T}}P_{11}^{\mathrm{T}}+Q_{11}+\tau_mX_{11}+Y_{11}+Y_{11}^{\mathrm{T}}+G_1^{\mathrm{T}}G_1,\\&\Sigma_{12}=Y_{21}^{\mathrm{T}}+P_{12}+\tau_mX_{12}+Q_{12}+G_1^{\mathrm{T}}G_2,\\&\Sigma_{13}=P_{11}A_{\tau11}+P_{12}A_{\tau21}-Y_{11},\\&\Sigma_{14}=P_{11}A_{\tau12}+P_{12}A_{\tau22},\\&\Sigma_{15}=P_{11}B_{21}+P_{12}B_{22},\\&\Sigma_{22}=P_{22}+P_{22}^{\mathrm{T}}+Q_{22}+\tau_mX_{22}+G_2^{\mathrm{T}}G_2,\end{aligned}$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}\begin{matrix}\bar{P}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}^{\mathrm{T}}+\bar{Q}+\\\tau_m\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Y}^{\mathrm{T}}+\bar{G}^{\mathrm{T}}\bar{G}\end{matrix}&\bar{P}\bar{A}_\tau-\bar{Y}&\bar{P}\bar{B}_2\\ *&-\bar{Q}&0\\ *&*&-\gamma^2I\end{bmatrix}+\tau_m\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}\\\bar{A}_\tau^{\mathrm{T}}\\\bar{B}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{Z}\begin{bmatrix}\bar{A}^{\mathrm{T}}\\\bar{A}_\tau^{\mathrm{T}}\\\bar{B}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

由式(13b)及Schur补知$\Pi<0$. 将式(15)两边由0到∞积分, 推得

$$\int_0^{\infty}\dot{V}(y_t)\mid_{(12)}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t-\gamma^2\int_0^{\infty}w^{\mathrm{T}}(t)w(t)\mathrm{d}t\leqslant0,\tag{16}$$

此即

$$\|z\|_2^2\leqslant\gamma^2\|w\|_2^2+V(y_t)\mid_{t=0}-V(y_t)\mid_{t=\infty}.\tag{17}$$

注意到$V(y_t)\mid_{t=0}=0, V(y_t)\mid_{t=\infty}\geqslant0$, 故由上式知

$$\|z\|_2\leqslant\gamma\|w\|_2,\ \forall w\in\mathrm{L}_2[0,\infty),\ w(0)=0,\tag{18}$$

这说明$\|G_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma$.

证毕.

下面, 将针对两类控制器增益摄动, 给出鲁棒H_∞弹性控制器(3)存在的充分条件.

定理 1 考虑不确定奇异时滞系统(1). 若存在矩阵$Q>0, X\geqslant0, Z>0, P, Y, W$及$\epsilon>0$, 其中$P$非奇异, 满足

$$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant0,\tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} \varPhi_1+\epsilon\tilde{D}\tilde{D}^{\mathrm{T}} & A_\tau P^{\mathrm{T}}-Y & \varPhi_2+\epsilon\tau_m\tilde{D}\tilde{D}^{\mathrm{T}} & B_2 & \varPhi_3+\epsilon D_{k1}D_{k2}^{\mathrm{T}} & PE_k^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -Q & \tau_m PA_\tau^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & PE_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\tau_m Z+\epsilon\tau_m^2\tilde{D}\tilde{D}^{\mathrm{T}} & \tau_m B_2 & \epsilon\tau_m D_{k1}D_{k2}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -I+\epsilon D_{k2}D_{k2}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & EP^{\mathrm{T}}Z^{-1}PE^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{21}$$

其中:

$$\varPhi_1 = PA^{\mathrm{T}}+AP^{\mathrm{T}}+B_1W+W^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}+ Q+\tau_m X+Y+Y^{\mathrm{T}},$$
$$\varPhi_2 = \tau_m(PA^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}),$$
$$\varPhi_3 = PG^{\mathrm{T}}+W^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}},$$

则具有加性增益摄动的控制器

$$u(t) = (WP^{-T}+D_3F_3E_3)x(t) \tag{22}$$

为系统(1)的一个时滞相关型鲁棒H$_\infty$弹性控制器.

定理 2　考虑不确定奇异时滞系统(1). 若存在矩阵$Q>0, X\geqslant 0, Z>0, P, Y, W$及$\epsilon>0$, 其中$P$非奇异, 满足不等式(19)(21)及

$$\begin{bmatrix} \varPhi_1+\epsilon\bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}} & A_\tau P^{\mathrm{T}}-Y & \varPhi_2+\epsilon\tau_m\bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}} & B_2 & \varPhi_3+\epsilon D_{c1}D_{c2}^{\mathrm{T}} & PE_1^{\mathrm{T}} & W^{\mathrm{T}}E_4^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & -Q & \tau_m PA_\tau^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & PE_\tau^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\tau_m Z+\epsilon\tau_m^2\bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}} & \tau_m B_2 & \epsilon\tau_m D_{c1}D_{c2}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -I+\epsilon D_{c2}D_{c2}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

则具有乘性增益摄动的控制器

$$u(t) = (I+D_4F_4E_4)WP^{-T}x(t) \tag{24}$$

为系统(1)的一个时滞相关型鲁棒H$_\infty$弹性控制器.

利用引理2,3即证定理1及定理2, 此处略去.

注 3　显然非线性项$EP^{\mathrm{T}}Z^{-1}PE^{\mathrm{T}}$的存在使得式(21)不再是LMI. 参考文献[7], 不失一般性, 假设$E=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ Y_{21} & 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

其中: $P_{11}\in\mathbb{R}^{p\times p}, Y_{11}\in\mathbb{R}^{p\times p}, P_{11}>0$且$P$非奇异. 引入变量$U>0, T_{11}>0, S_{11}>0, V_{11}>0$, 并记

$$X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ * & U_{22} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

其中: $X_{11}\in\mathbb{R}^{p\times p}, U_{11}\in\mathbb{R}^{p\times p}$. 则易见若存在矩阵$P, X, Y, Z, U$及$V_{11}, S_{11}, T_{11}$满足式(25) (26)及

$$UZ=I,\ P_{11}V_{11}=I,\ T_{11}S_{11}=I, \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & Y_{11} \\ * & X_{22} & Y_{21} \\ * & * & T_{11} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} & V_{11} \\ * & S_{11} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{29}$$

则式(21)有解X, Y, Z及P. 于是可将具有加性增益摄动的鲁棒H$_\infty$弹性控制器设计问题表示为下述隶属于LMIs的锥补问题:

$$\min\{\mathrm{tr}(UZ)+\mathrm{tr}(P_{11}V_{11}+T_{11}S_{11})\}$$
$$\text{s.t. LMIs : 式(20)(25)(26)(28)(29) 及}$$
$$\begin{cases} Q>0,\ X\geqslant 0,\ Z>0,\ U>0,\ \epsilon>0, \\ P_{11}>0,\ V_{11}>0,\ T_{11}>0,\ S_{11}>0, \\ \begin{bmatrix} U & I \\ I & Z \end{bmatrix}\geqslant 0,\ \begin{bmatrix} P_{11} & I \\ I & V_{11} \end{bmatrix}\geqslant 0,\ \begin{bmatrix} T_{11} & I \\ I & S_{11} \end{bmatrix}\geqslant 0. \end{cases} \tag{30}$$

用线性化迭代算法解上述非凸优化问题, 有

算法 1

步骤 1　对矩阵E作奇异值分解: $\bar{U}E\bar{V}=\begin{bmatrix} \varSigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 其中: $\bar{U}, \bar{V}$为正交矩阵, $\varSigma\in\mathbb{R}^{p\times p}$为对角阵. 取$M=\begin{bmatrix} \varSigma^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\bar{U}, N=\bar{V}\begin{bmatrix} \varSigma^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 则$\bar{E}=MEN=\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 以$M$为行满秩变换矩

阵, N为坐标满秩变换矩阵, 则系统(1)r.s.e.于

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\bar{x}}(t)=(\bar{A}+\Delta\bar{A})\bar{x}(t)+(\bar{A}_\tau+\Delta\bar{A}_\tau)\bar{x}(t-\\ \qquad\tau)+\bar{B}_1u(t)+(\bar{B}_2+\Delta\bar{B}_2)w(t),\\ z(t)=(\bar{G}+\Delta\bar{G})\bar{x}(t)+Du(t),\\ \bar{x}(t)=N^{-1}\phi(t),\ \ t\in[-\tau,0]. \end{cases} \tag{31}$$

其中:

$$\bar{A}=MAN,\ \bar{A}_\tau=MA_\tau N,\ \bar{B}_1=MB_1,$$
$$\bar{B}_2=MB_2,\ \bar{G}=GN,\ \Delta\bar{A}=\bar{D}_1F\bar{E}_1,$$
$$\Delta\bar{A}_\tau=\bar{D}_1F\bar{E}_\tau,\ \Delta\bar{B}_2=\bar{D}_1FE_2,\ \Delta\bar{G}=D_2F\bar{E}_1,$$
$$\bar{D}_1=MD_1,\ \bar{E}_1=E_1N,\ \bar{E}_\tau=E_\tau N.$$

相应地, 令$\bar{E}_3=E_3N$. 为描述方便起见, 以下仍将$\bar{E},\bar{A},\bar{A}_\tau,\bar{B}_1,\bar{B}_2,\bar{G},\bar{D}_1,\bar{E}_1,\bar{E}_\tau,\bar{E}_3$记为$E,A,A_\tau,B_1,B_2,G,D_1,E_1,E_\tau,E_3$.

步骤 2 对给定的$\tau_m>0$, 寻找式(20)(25)(26)(28)~(30)的一组可行解$Q,X,Z,P,Y,W,U,P_{11},V_{11},S_{11},T_{11},\epsilon$. 若无解, 则退出. 若有解, 则记$U^{(0)}=U,Z^{(0)}=Z,P_{11}^{(0)}=P_{11},V_{11}^{(0)}=V_{11},T_{11}^{(0)}=T_{11},S_{11}^{(0)}=S_{11}$,并验证条件(21)是否成立. 若条件(21)成立, 则鲁棒H_∞弹性控制器设计为

$$u(t)=(WP^{-\mathrm{T}}+D_3F_3E_3)N^{-1}x(t). \tag{32}$$

若条件(21)不成立, 则令步骤3中目标函数的指标$k=0$, 进入步骤3.

步骤 3 解下列关于变量$Q,X,Z,P,Y,W,U,P_{11},V_{11},S_{11},T_{11}$及$\epsilon$的凸优化问题:

$$\min\{\mathrm{tr}(U^{(k)}Z+Z^{(k)}U)+\mathrm{tr}(P_{11}^{(k)}V_{11}+V_{11}^{(k)}P_{11}+T_{11}^{(k)}S_{11}+S_{11}^{(k)}T_{11})\}$$
s. t. 式(20)(25)(26)(28)(29) 及(30).

并记

$$U^{(k+1)}=U,\ Z^{(k+1)}=Z,$$
$$P_{11}^{(k+1)}=P_{11},\ V_{11}^{(k+1)}=V_{11},$$
$$T_{11}^{(k+1)}=T_{11},\ S_{11}^{(k+1)}=S_{11}.$$

步骤 4 验证条件(21)是否成立. 若成立, 则系统(1)的鲁棒H_∞弹性控制器即可设计为式(32). 若条件(21)在给定的迭代步数内不满足, 则退出. 否则, 令步骤3中目标函数的指标k为$k+1$,进入步骤3.

注 4 算法1给出了具有加性增益摄动的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制器的设计方法. 对算法1稍作修改, 即可得到具有乘性增益摄动的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制器的设计算法.

4 算例(Example)

考虑不确定奇异时滞系统(1), 其中:

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1.5&-1\\-2&5\end{bmatrix},\ A_\tau=\begin{bmatrix}0.5&0.1\\1&0\end{bmatrix},$$
$$B_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-1\\0.2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix},$$
$$D=0.2,D_1=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.2\end{bmatrix},D_2=\begin{bmatrix}0.1&0\end{bmatrix},$$
$$E_1=E_\tau=I,\ E_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \tau_m=1.$$

为系统(1)设计鲁棒H_∞弹性控制器(3), 其中$\gamma=1$. 若允许控制器增益摄动具有加性摄动(5a), 其中:

$$D_3=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.2\end{bmatrix},$$

则由定理1, 并利用MATLAB中的LMI Toolbox及算法1, 经2次锥补线性化迭代计算可以算得

$$K=\begin{bmatrix}-143.2774&-250.1074\end{bmatrix}.$$

若允许控制器增益摄动具有乘性摄动(5b), 其中

$$D_4=\begin{bmatrix}0.5&0.5\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}0.2\\0\end{bmatrix},$$

则由定理2, 经2次锥补线性化迭代计算可以算得

$$K=\begin{bmatrix}-14.7571&-19.6050\end{bmatrix}.$$

5 结论(Conclusion)

本文研究了不确定奇异时滞系统的时滞相关型鲁棒H_∞弹性控制问题, 考虑了控制器增益的加性摄动与乘性摄动, 获得了时滞相关型有界实引理(BRL), 并在此基础上给出了时滞相关型弹性状态反馈控制器存在的充分性条件及基于LMIs和锥补线性化技术的设计算法. 这是这一领域首次给出的时滞相关型方面的工作. 由于技巧处理上的困难, 本文未考虑基于补偿器的输出反馈情形.

参考文献(References):

[1] HUNG S S, LEE T T. Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control[J]. *J of the Franklin Institute*, 1999, 336(6): 911 – 923.

[2] SHI P, BOUKAS E K, AGARWAL R K. Robust H_∞ control of singular continuous-time systems with delays and uncertainties[C]//*Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control*. Sydney: IEEE Press, 2000: 1515 – 1520.

[3] HADDAD W M, CORRADO J R. Robust resilient dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain

variations[C]//*Proc of American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 1998: 2837 – 2841.

[4] DORATO P. Non-fragile controllers design: an overview[C]// *Proc of American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE Press, 1998: 2829 – 2831.

[5] GUAN X, ZHANG Q. Design of resilient guaranteed cost controllers for a class of generalized systems[C]//*Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shanghai: IEEE Press, 2002: 160 – 164.

[6] MAHMOUD M S. Resilient linear filtering of uncertain systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1797 – 1802.

[7] ZHU S, CHENG Z, FENG J. Delay-dependent robust stability criterion and robust stabilization for uncertain singular time-delay systems[C]//*Proc of American Control Conference*. Portland, Oregon: IEEE Press, 2005: 2839 – 2844.

[8] PETERSON I R. A stabilization algorithm for a class uncertain linear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

作者简介:

朱淑倩　(1979—), 女, 山东大学数学与系统科学学院讲师, 研究方向为奇异系统、时滞系统、切换系统等, Email: sqzhu@sdu.edu.cn;

张承慧　(1963—) , 山东大学控制科学与工程学院教授, 博士生导师, 研究方向包括工程优化控制、自适应控制、电气传动自动化及电力电子技术等, E-mail: zchui@sdu.edu.cn;

李振波　(1977—), 男, 山东经济学院统计与数学学院讲师, 研究方向为人工智能算法与经济数学方法, E-mail: lizhenbo@126.com;

程兆林　(1939—), 山东大学数学与系统科学学院教授, 研究方向包括多变量控制系统的理论与应用、奇异系统、时滞系统、非线性系统等, E-mail: chengzha@jn-public.sd.cninfo.net.

(上接第586页)

参考文献(References):

[5] ISHII H, BASAR T. Remote control of LTI systems over networks with state quantization[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(1): 15 – 31.

[6] ELIA N, MITTER S K. Stabilization of linear systems with limited information[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1384 – 1400.

[7] ISHII H, FRANCIS B A. Limited Data Rate in Control Systems with Networks[M] *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer, 2002.

[8] 刘强，于达仁. 考虑量化效应的观测器分析与设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 36(9): 1144 – 1146.
(LIU Qiang, YU Daren. Analysis and design of observers with quantization effects[J]. *J of Harbin Institute of Technology*, 2004, 36(9): 1144 – 1146.)

作者简介:

谢林柏　(1973—), 男, 副教授, 2004年于华中科技大学获控制理论与控制工程博士学位, 目前研究方向为网络化控制、控制系统的故障检测与诊断等, E-mail: xlbzyf@126.com;

纪志成　(1959—), 男, 博士, 现为江南大学通信与控制工程学院教授, 博士生导师, 主要从事电力电子、智能控制等方向的研究, E-mail: zcji@sytu.edu.cn;

赵惟一　(1981—), 男, 江南大学控制理论与控制工程专业在读硕士研究生, 主要研究课题为数据丢包下网络控制系统的最优控制、预测控制等.