第 24 卷第 4 期
2007 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 4
Aug. 2007

文章编号：1000−8152(2007)04−0617−04

非线性奇摄动系统的小增益增长条件

汪志鸣, 戴浩晖, 王隔霞

(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 给出小增益增长条件使得在此条件下快慢子系统的渐近稳定性能够保证其原奇摄动系统的相应稳定性, 并给出估计摄动参数的稳定界的解析表示及其应用例子.

关键词: 渐近稳定; 奇摄动系统; 稳定界; 半全局稳定

中图分类号: TP13，O231.2　　**文献标识码**: A

Small gain growth condition of nonlinear singularly perturbed systems

WANG Zhi-ming, DAI Hao-hui, WANG Ge-xia

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: A small gain growth condition is presented in this paper, under which the asymptotic stability of nonlinear singularly perturbed systems is guaranteed by the asymptotic stability of its fast and slow subsystems. Moreover, an explicit and closed form of stability bound on perturbation parameter is provided, and some examples in applications are given to illustrate the condition.

Key words: asymptotic stability; singularly perturbed systems; stability bound; semi-global stability

1 前言(Introduction)

线性奇摄动系统的稳定性质可以由其降阶的快慢子系统的稳定性所决定[1,2]. 但是, 对于非线性奇摄动系统的稳定性质却不是如此, 它需要进一步的条件才能保证. 请看例子:

$$\begin{cases} \dot{x} = z - 3x^3, \\ \varepsilon\dot{z} = -z + 2\varepsilon x, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x 和 z 是一维变量. 其慢子系统

$$\dot{x} = -3x^3$$

和快子系统

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = -y,$$

显然关于它们的平衡点都渐近稳定, 此处 $y = z$. 但是整个奇摄动系统关于它的平衡点 ($x = 0$, $z = 0$) 并不稳定, 因为其在平衡点附近的线性化系统

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \varepsilon\dot{z} = -z + 2\varepsilon x. \end{cases} \tag{1.2}$$

对任一$\varepsilon > 0$都不是Hurwitz. 文献[3]选取了快慢子系统的二次型Lyapunov函数的组合来构成整个系统的Lyapunov函数, 指出需要加上某种非线性增长条件才可以保证原系统的渐近稳定性, 该结果具有实用价值. 但对进一步的理论分析有困难, 因为渐近稳定的系统未必能获得相应的二次型Lyapunov函数. 事实上, 具有二次型Lyapunov函数的渐近稳定只是指数稳定的简单推广, 本质上没有区别. 因此, 对于一般非线性奇摄动系统, 何种增长条件能够保证整个系统的稳定性在理论上有重要意义. 本文提出某类小增益增长条件使得在该条件下快慢子系统的渐近稳定性能够保证获得整个奇摄动系统相应的稳定性, 同时给出估计摄动参数稳定界的解析表示. 作为应用, 本文讨论文献[3]的情况, 并给出相应的例子.

2 主要定理(Main result)

考虑非线性奇摄动系统

$$\dot{x} = f(x, z), \tag{2.1a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = g(x, z). \tag{2.1b}$$

其中: $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n$, $z \in D_z \subset \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$为小参数, 原点是系统(2.1)的孤立平衡点, f和g在$D_x \times D_z$上连续, 满足局部李普希茨条件. 根据微分方程基本的理论可知, 对$\forall(x_0, z_0) \in D_x \times D_z$, 系统(2.1)存在唯

收稿日期: 2006−02−14; 收修改稿日期: 2006−07−17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671069); 上海市重点学科建设项目.

一解$x(t,\varepsilon)$,$z(t,\varepsilon)$. 令$\varepsilon=0$, 得慢子系统

$$\dot{x}=f(x,z), \tag{2.2a}$$

$$0=g(x,z). \tag{2.2b}$$

假设 1 函数方程(2.2b)存在唯一孤立解$z=h(x)$, $x\in D_x$, 它在区域D_x上可微, 并且满足$\|h(x)\|\leqslant\gamma(\|x\|)$, 其中$\gamma$为$K$类函数.

由假设1可得降阶系统

$$\dot{x}=f(x,h(x)), \tag{2.3}$$

称为系统(2.1)的慢子系统, 显然$x=0$是其平衡点. 令$z=y+h(x)$, 则原系统(2.1)成为

$$\dot{x}=f(x,y+h(x)), \tag{2.4a}$$

$$\varepsilon\dot{y}=g(x,y+h(x))-\varepsilon\frac{\partial h}{\partial x}f(x,y+h(x)). \tag{2.4b}$$

注意, 当$h(x)$满足$\|h(x)\|\leqslant\gamma(\|x\|)$时, 系统(2.4)平衡点的渐近稳定性与系统(2.1)平衡点的渐近稳定性是等价的[4]. 令$\varepsilon=0$, 可得边界层系统

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=g(x,y+h(x)), \tag{2.5}$$

又称为系统(2.1)的快子系统, 其中$\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$, 慢变量$x$看成参数, 显然$y=0$是其平衡流形.

假设 2 慢系统(2.3)的平衡点$x=0$渐近稳定.

于是由Lyapunov逆定理[3]可知, 存在光滑函数$V:D_x\to\mathbb{R}^+$, 以及K函数$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$使得对$\forall x\in\tilde{D}_x\subseteq D_x$,

$$\alpha_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(\|x\|), \tag{2.6a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x,h(x))\leqslant-\alpha_3(\|x\|). \tag{2.6b}$$

假设 3 快子系统(2.5)的平衡点$y=0$关于$x\in D_x$一致渐近稳定.

又由Lyapunov逆定理[4]可知, 存在光滑函数$W:D_x\times D_y\to\mathbb{R}^+$, 以及$K$函数$\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$使得对$\forall y\in\tilde{D}_y\subseteq D_y$, 下列不等式对$\forall x\in D_x$一致成立:

$$\alpha_4(\|y\|)\leqslant W(x,y)\leqslant\alpha_5(\|y\|), \tag{2.7a}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}\cdot g(x,y+h(x))\leqslant-\alpha_6(\|y\|). \tag{2.7b}$$

下面给出如下形式的小增益增长条件.

假设 4 存在非负实数$\eta_i(i=1,2,3,4)$, 使得对$\forall x\in\tilde{D}_x$和$\forall y\in\tilde{D}_y$成立:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]\leqslant \eta_1\alpha_3(\|x\|)+\eta_2\alpha_6(\|y\|), \tag{2.8a}$$

$$(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x})\cdot f(x,y+h(x))\leqslant \eta_3\alpha_3(\|x\|)+\eta_4\alpha_6(\|y\|). \tag{2.8b}$$

其中$\eta_1+\eta_3<1$.

记

$$\varepsilon_0=\begin{cases}\dfrac{1}{\eta_2+\eta_4}>0, & (\eta_2,\eta_4)\neq(0,0),\\ +\infty, & (\eta_2,\eta_4)=(0,0)\end{cases} \tag{2.9}$$

现在叙述本文的主要定理.

定理 1 如果假设1~4成立, 则对$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 奇摄动系统(2.1)也渐近稳定.

注 1 定理1说明快慢子系统渐近稳定, 加上小增益增长条件成立, 则整个奇摄动系统也渐近稳定. 从小增益增长条件中立刻可得稳定界的估计, 也许较保守, 但计算十分方便.

注 2 如果假设1~4全局成立,并且α_1和α_4是K_∞类函数,则定理1的结论为全局渐近稳定.

3 主要定理的证明(Proof of main result)

定义组合Lyapunov函数

$$v(x,y)=V(x)+W(x,y). \tag{3.1}$$

显然$v(x,y)$满足

$$\alpha_1(\|x\|)+\alpha_4(\|y\|)\leqslant v(x,y)\leqslant\alpha_2(\|x\|)+\alpha_5(\|y\|). \tag{3.2}$$

将组合Lyapunov函数$v(x,y)$作为整个系统(2.1)的候选Lyapunov函数, 沿着系统(2.1)的轨道计算得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\leqslant-(1-\eta_1-\eta_3)\alpha_3(\|x\|)-(1-\varepsilon(\eta_2+\eta_4))\frac{1}{\varepsilon}\alpha_6(\|y\|).$$

由定理已知条件立即得到, 对$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $v(x,y)$是整个系统(2.1)的Lyapunov函数, 于是系统(2.1)的平衡点渐近稳定. 如果所有假设全局成立, 并且α_1和α_4为K_∞类函数, 则系统(2.1)的平衡点全局渐近稳定. 定理证毕.

注 3 对于全局情况, 如果小增益增长条件的假设4仅在任意紧集上成立, 其余假设仍然全局成立, 则定理1结论应改为系统(2.1) 半全局渐近稳定[3].如果取文献[3]中的二次型Lyapunov函数, 即

$$\alpha_3(\|x\|)\geqslant c_1\Psi_1^2(x),\alpha_6(\|y\|)\geqslant c_2\Psi_2^2(y).$$

其中Ψ_j^2为正定函数, 而假设4由下列条件替代.

假设 5 存在非负实数$d_j(j=1,2,3)$使得对$\forall x\in\tilde{D}_x$和$\forall y\in\tilde{D}_y$都成立:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]\leqslant d_1\Psi_1(x)\Psi_2(y), \tag{3.3a}$$

$$(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x})\cdot f(x,y+h(x))\leqslant d_2\Psi_1(x)\Psi_2(y)+d_3\Psi_2^2(y). \tag{3.3b}$$

其中$d_1+d_2<2c_1$.

仔细计算可得

$$\eta_1=\frac{d_1}{2c_1},\ \eta_2=\frac{d_2}{2c_2},\ \eta_3=\frac{d_1}{2c_2},$$
$$\eta_4=\frac{d_2+2d_3}{2c_2},\ \eta_1+\eta_3=\frac{d_1+d_2}{2c_1},$$
$$\varepsilon_0=\frac{1}{\eta_2+\eta_4}=\frac{2c_2}{d_1+d_2+2d_3}. \tag{3.4}$$

推论 1　如果$\alpha_3(\|x\|)\geqslant c_1\Psi_1^2(x),\alpha_6(\|y\|)\geqslant c_2\Psi_2^2(y)$, 并且假设1~3和假设5成立, 则对$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 奇摄动系统(2.1)的平衡点渐近稳定, 其中稳定界ε_0由式(3.4)给出.

注 4　稳定界ε_0的估计与文献[3]中的有所不同, 主要是文献[3]中的增长条件仅适用于二次型Lyapunov函数, 且文献[3]中的组合Lyapunov函数加权,而本文的小增益增长条件适用任何情况.

注 5　在二次型Lyapunov函数情况下, 假设5已不具有小增益的限制了, 这是因为限制条件$d_1+d_2<2c_1$中的c_1事实上可以任意大, 它都不改变二次型Lyapunov函数性质. 这与文献[2]的结论相吻合.

4　例子(Examples)

例 1　考虑奇摄动系统

$$\dot{x}=-x-x^3+z, \tag{4.1a}$$
$$\varepsilon\dot{z}=x-z. \tag{4.1b}$$

其慢子系统为$\dot{x}=-x^3$, 其中$h(x)=x$, 满足性质: $|h(x)|\leqslant\gamma(|x|),\gamma(s)=s$. 快子系统为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-y$. 快慢子系统的平衡点都是全局渐近稳定.

选取$V(x)=2x^4,W(x,y)=2y^2$, 则

$$\alpha_3(|x|)=7|x|^6,\ \alpha_6(|y|)=3|y|^2.$$

而小增益增长条件为

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]=$$
$$8x^3y\leqslant 4x^6+4y^2=\frac{4}{7}\alpha_3(|x|)+\frac{4}{3}\alpha_6(|y|),$$
$$(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x})\cdot f(x,y+h(x))=$$
$$-4y(-x^3+y)\leqslant 2x^6+10y^2=$$
$$\frac{2}{7}\alpha_3(|x|)+\frac{10}{3}\alpha_6(|y|).$$

由于$\eta_1+\eta_3=\frac{6}{7}<1$, 故小增益增长条件全局满足. 而$\varepsilon_0=\frac{1}{\eta_2+\eta_4}=\frac{3}{14}$, 由定理1知, 当$\varepsilon\in(0,\frac{3}{14})$时, 奇摄动系统(4.1)的平衡点是全局渐近稳定.

取$\varepsilon=0.1$, 得到轨线如图1~3所示. 其中图1和图2分别是慢子系统与快子系统的轨线; 图3是奇摄动系统(4.1)的轨线, 从中可以看出, 在本文提出的小增益增长条件保证下，快慢子系统的稳定性可以保证整个奇摄动系统的稳定性.

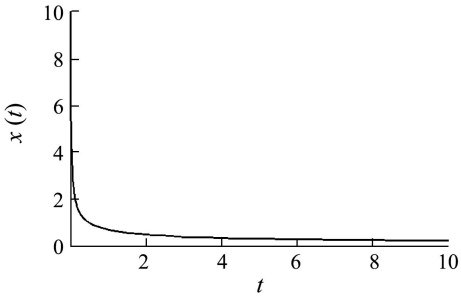

图 1　慢系统轨线图

Fig. 1　Trajectory of slow subsystems

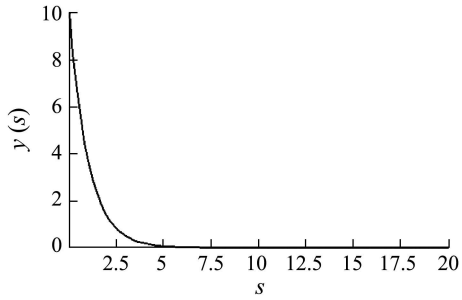

图 2　快系统轨线图

Fig. 2　Trajectory of fast subsystems

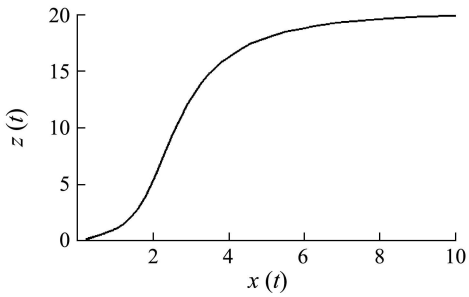

图 3　奇摄动系统(4.1)轨线图

Fig. 3　Trajectory of singularly perturbed systems (4.1)

例 2　考虑奇摄动系统

$$\dot{x}=-xz, \tag{4.2a}$$
$$\varepsilon\dot{z}=-z+x^2. \tag{4.2b}$$

其中区域$\bar{D}_x=\{x||x|\leqslant r\},\bar{D}_y=\{y||y|\leqslant r\}$. 则慢子系统为$\dot{x}=-x^3$, 其中$h(x)=x^2$, 满足性质: $|h(x)|\leqslant\gamma(|x|),\gamma(s)=s^2$. 快子系统为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-y$. 快慢子系统的平衡点都是全局渐近稳定.

选取$V(x)=2(2r+1)x^2,W(x,y)=\frac{1}{2}y^2$, 则

$$\alpha_3(|x|)=4(2r+1)|x|^4,\ \alpha_6(|y|)=|y|^2,$$

而小增益增长条件为

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot[f(x,y+h(x))-f(x,h(x))]=$$
$$-4(2r+1)x^2y\leqslant$$
$$2(2r+1)(x^4+y^2)=$$
$$\frac{1}{2}\alpha_3(|x|)+2(2r+1)\alpha_6(|y|),$$
$$(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x})\cdot f(x,y+h(x))=$$
$$2x^2y(y+x^2)\leqslant(2r+1)x^4+r^2y^2=$$
$$\frac{1}{4}\alpha_3(|x|)+r^2\alpha_6(|y|).$$

由于$\eta_1+\eta_3=\dfrac{3}{4}<1$, 故小增益增长条件在任意紧集$\bar{D}_x\times\bar{D}_y$上满足. 而$\varepsilon_0=\dfrac{1}{\eta_2+\eta_4}=\dfrac{1}{(r+2)^2-2}$, 由定理1知, 当$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$时, 奇摄动系统(4.2)的平衡点是半全局渐近稳定.

取$r=0.1,\varepsilon=0.204769$, 得到轨线如图4~6所示. 其中图4和图5分别是慢子系统与快子系统的轨线: 图6是奇摄动系统(4.2)的轨线,从中可以看出, 在本文提出的小增益增长条件保证下,快慢子系统的稳定性可以保证整个奇摄动系统的稳定性.

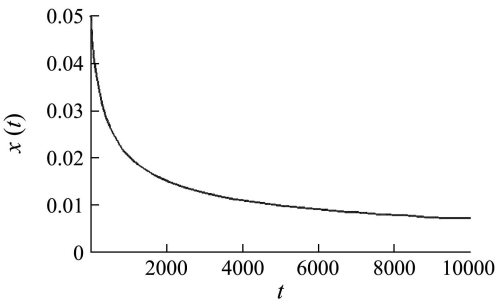

图 4 慢系统轨线图

Fig. 4 Trajectory of slow subsystems

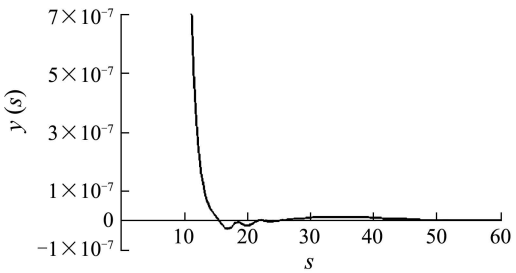

图 5 快系统轨线图

Fig. 5 Trajectory of fast subsystems

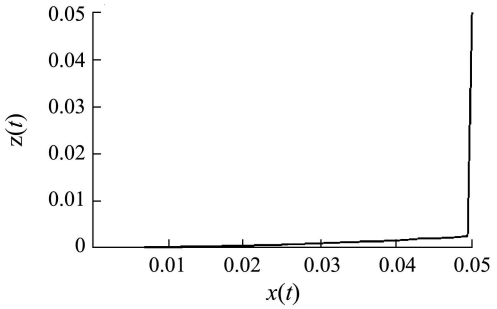

图 6 奇摄动系统(4.2)轨线图

Fig. 6 Trajectory of singularly perturbed systems (4.2)

两个例子说明选择合适的Lyapunov函数对系统满足小增益增长条件有帮助, 例2显示, 对非全局稳定的情况, 稳定的鲁棒性与吸引域的大小有关.

5 小结(Conclusion)

本文主要贡献是在L_2背景下给出了保证非线性奇摄动系统渐近稳定的小增益增长条件, 它直接推广了文献[3]中的结果, 为进一步研究一般非线性奇摄动系统稳定性和镇定问题打下了理论基础. 本文的工作可以推广到ISS稳定和由半正定的Lyapunov函数刻画的稳定性情况上去.

参考文献(References):

[1] KOKOTOVIC P V, KHALIL H K, O'REILLY J. *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*[M]. Oriando, Florida: Academic Press, 1986.

[2] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论和应用[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1 – 7.
(LIU Huaping, SUN Fuchun, HE Kezhong, et al. Singularly perturbed control systems: Theory and application[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(1): 1 – 7.

[3] SABERI A, KHALIL H K. Quadratic-type Lyapunov functions for singularly perturbed systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1984, 29(6): 542 – 550.

[4] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.

作者简介:

汪志鸣 (1953—), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为非线性控制与鲁棒控制, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn;

戴浩晖 (1976—), 男, 讲师, 博士, 目前研究方向为非线性控制, E-mail: hhdai@math.ecnu.edu.cn;

王隔霞 (1981—), 女, 博士研究生, 研究方向为非线性控制与网络化控制, E-mail: gxwang_2004@163.com.