文章编号：1000−8152(2007)04−0661−04

凸胞型不确定系统的变结构控制

侯晓丽，胥布工

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 讨论了凸胞型不确定系统的变结构控制, 利用LMI方法, 给出了滑模面存在的充分条件, 并且给出了线性滑模面的显式表达式. 所设计的变结构控制律不仅能保证系统在有限时间到达滑模面, 并且保证受限在滑模面上的降阶等价系统是D_R稳定的. 最后, 给出一个设计实例来阐明该控制方法的有效性.

关键词: 变结构控制; 不确定系统; 凸胞型

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Variable structure control of polytopic systems

HOU Xiao-li, XU Bu-gong

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The problem of designing a variable structure control law for uncertain polytopic systems is considered in this paper. Firstly, a sufficient condition for the existence of linear sliding surfaces in terms of linear matrix inequality (LMI) is given, an explicit formula of linear sliding surfaces is also presented. Secondly, variable structure control law is designed, which not only guarantees the system to reach the sliding surface in finite time, but also assures the D_R stability of the reduced-order equivalent system on the sliding surface. Finally, an example is presented to show the efficiency of this control law.

Key words: variable structure control; uncertain system; polytopic

1 引言 (Introduction)

变结构控制是20世纪50年代在前苏联产生的一种控制策略. 它利用一个开关反馈控制使系统的轨线在有限时间到达一个具体的可选择的超平面, 此平面称为开关面或滑模面, 且使得系统轨线在后续时间停留在此滑模面内, 渐近趋向平衡点. 而且变结构控制对系统内部参数的摄动及外部干扰具有较强的鲁棒性. 因此, 此控制策略一出现便受到国内外学者的广泛关注. 近年来, 不确定系统的变结构控制成为研究领域的一个热点. 文[1～5]对不确定系统滑动模态的存在性及开关面的设计问题给予了充分的研究. Chio在文[6]中考虑范数有界不确定系统, 给出了滑模面设计的新方法: 线性矩阵不等式法, 即LMI法. 通过解线性矩阵不等式得到一正定矩阵, 从而设计滑模面及控制律, 实现滑模控制. 对于多目标LMI问题, 利用凸优化问题的内点算法也易得到解决, 这使得在考虑系统稳定性的同时, 可考虑系统的衰减度等性能指标. 因此, 在变结构控制中, LMI方法与传统方法相比有很多优点且设计弹性大.

对于不确定项是凸组合形式的凸胞型不确定系统, 即

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i A_i,\ 0\leqslant\alpha_i\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1,\ i=1,\cdots,N,$$

且A_i是已知矩阵. 很多文章对其鲁棒稳定性进行了研究. 文[7]利用参量依赖Lyapunov函数给出了系统鲁棒稳定的充分条件, 文[8]给出了系统稳定的一个新的LMI条件, 文[9]给出了一个新的系统鲁棒稳定条件, 在文[10]中对文[9]的结果进行了改进. 关于凸胞型不确定系统的H_2–H_∞ 控制也有不少结果. 而有关凸胞型不确定系统的变结构控制, 国内外的研究尚不多见. 本文基于LMI方法, 考虑凸胞型不确定系统的变结构控制, 给出了滑模面存在的充分条件, 设计变结构控制律, 不仅保证系统在有限时间到达滑模面, 并且保证受限在滑模面上的降阶等价系统是D_R稳定.

2 系统描述与准备知识 (System statement and preliminaries)

考虑系统

收稿日期: 2005−10−30; 收修改稿日期: 2006−09−11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474047); 国家自然科学基金重点资助项目(60334010); 高等学校博士学科点专项基金资助项目(20030561013).

$$\dot{x}=Ax+\Delta A(x,t)x+(B+\Delta B(x,t))u+g(x,t). \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$是状态, $u \in \mathbb{R}^m$是控制输入, $\Delta A(x,t),\Delta B(x,t),g(x,t)$分别代表系统矩阵不确定性, 输入矩阵不确定性及系统的非线性项. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$是系统矩阵, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$是满秩的输入矩阵.

作如下假定:

1) ΔA是凸胞型不确定性, 即

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i A_i,\ 0\leqslant\alpha_i\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1,\quad i=1,\cdots,N.$$

2) ΔB与$g(x,t)$满足匹配条件, 即存在函数$f(x,t),h(x,t)$, 使得

$$\Delta B(x,t)=Bf(x,t),\ g(x,t)=Bh(x,t).$$

3) 存在已知的连续正标量函数$\rho(x,t)$及正常数$\beta<1$, 使得$\|h(x,t)\|\leqslant\rho(x,t),\|f(x,t)\|\leqslant\beta$.

定义 1[11] 对复平面中的区域D, 若存在一对称矩阵$K\in\mathbb{R}^{n\times m}$和矩阵$M\in\mathbb{R}^{m\times m}$使得

$$D=\left\{z\in C|K+zM+z^*M^{\mathrm T}<0\right\},$$

则称D是一LMI区域. 其中z^*表示复数z的共轭.

定义 2[9] 若$2p\times 2p$矩阵R是一对称阵, 且可分解为

$$R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix},$$

其中R_{11},R_{22}为对称阵, $R_{22}\geqslant 0$, 称
$D_R=\{z\in C|R_{11}+R_{12}z+R_{12}^{\mathrm T}z^*+R_{22}zz^*<0\}$
为复平面中D_R区域.

定义 3[9] 对复平面中给定的区域D_R和矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 如果矩阵$A$的所有特征值都位于区域$D_R$中, 则称$A$是$D_R$稳定的.

考虑系统

$$\dot{x}(t)=A(\alpha)x(t). \quad (2)$$

其中

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i A_i,\ 0\leqslant\alpha_i\leqslant 1,\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1,\quad i=1,\cdots,N.$$

引理 1[11] 系统(2)是二次稳定的若存在一对称正定阵P, 使得

$$PA_i+A_i^{\mathrm T}P<0,i=1,\cdots,N.$$

引理 2[11] 系统(2)是D稳定的当且仅当存在一对称正定阵X, 使得

$$K\otimes X+M\otimes(A_iX)+M^{\mathrm T}\otimes(A_iX)^{\mathrm T}<0,\quad i=1,\cdots,N$$

成立. 其中$\otimes$表示矩阵的Kronecker积.

引理 3[9] 系统(2)是二次D_R稳定的当且仅当存在一对称正定阵P, 使得对所有$i=1,\cdots,N$, 有

$$\begin{pmatrix} M & (L\otimes P)(I_P\otimes A_i^{\mathrm T})\\ (I\otimes A_i)(L^{\mathrm T}\otimes P) & -I_P\otimes P\end{pmatrix}<0,$$
$$M=R_{11}\otimes P+R_{12}\otimes(A_iP)+R_{12}^{\mathrm T}\otimes(PA_i^{\mathrm T}),$$

其中$R_{22}=L^{\mathrm T}L\geqslant 0$.

3 主要结论(Main result)

考虑不确定系统(1), 对于线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} I\otimes\hat{B}^{\mathrm T} & 0\\ 0 & I\otimes\hat{B}^{\mathrm T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & (L\otimes P\hat{A}_i^{\mathrm T})\\ L^{\mathrm T}\otimes\hat{A}_iP) & -I\otimes P\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} I\otimes\hat{B} & 0\\ 0 & I\otimes\hat{B}\end{pmatrix}<0,$$
$$M=R_{11}\otimes P+R_{12}\otimes(\hat{A}_iP)+R_{12}^{\mathrm T}\otimes(P\hat{A}_i^{\mathrm T}),\quad i=1,\cdots,N. \quad (3)$$

其中: $\hat{A}_i=A+A_i$, $\hat{B}$是由$B^{\mathrm T}$的核空间的基向量组成的矩阵, 即$\hat{B}$是B的正交补. 易见, $\hat{B}$并不唯一.

设滑模面方程为

$$\sigma(x)=Sx=B^{\mathrm T}P^{-1}x=0. \quad (4)$$

假定SB可逆, 设计控制律为

$$u(t)=\begin{cases} -(SB)^{-1}SAx-\dfrac{1}{1-\beta}[\varepsilon+\rho+\|(SB)^{-1}SAx\|+\\ \sum\limits_{i=1}^{N}\|(SB)^{-1}SA_ix\|]-\sum\limits_{i=1}^{N}(SB)^{-1}SA_ix, \|\sigma\|\neq 0,\\ -(SB)^{-1}SAx-\sum\limits_{i=1}^{N}(SB)^{-1}SA_ix,\quad \|\sigma\|=0.\end{cases} \quad (5)$$

其中$\varepsilon>0$是任意正数.

定理 1 假定不等式(3)有对称正定解P, 滑模面方程由(4)给出. 考虑由(5)和(1)所构成的闭环系统, 则在控制律(5)的作用下, 系统能在有限时间到达滑模面, 且受限在滑模面上的$n-m$阶等价系统是二次D_R稳定的.

证 首先证明控制律(5)可使得系统轨线在有限时间到达滑模面, 也就是满足到达条件$\sigma^{\mathrm T}(SB)^{-1}\dot{\sigma}<0$. 若不等式(3)有对称正定解$P$, 滑模面方程由式(4)给出, 则$\dot{\sigma}(x)=S\dot{x}=S(A+\Delta A)x+SB(u+\eta)$, 其中$\eta=h+fu$.

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}(\sigma^{\mathrm T}(B^{\mathrm T}P^{-1}B)^{-1}\sigma)=2\sigma^{\mathrm T}(SB)^{-1}\dot{\sigma}=$$

$$2\sigma^{\mathrm{T}}(SB)^{-1}SAx+\sigma^{\mathrm{T}}(SB)^{-1}(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i A_i)x+\sigma^{\mathrm{T}}(u+\eta).$$

由$\|\eta\|=\|h+fu\|\leqslant\rho+\beta\|u\|$ 及

$$\|u\|\leqslant \|(SB)^{-1}SAx\|+\|\sum_{i=1}^{N}(SB)^{-1}SA_ix\|+\frac{1}{1-\beta}[\varepsilon+\rho+\|(SB)^{-1}SAx\|+\sum_{i=1}^{N}\|(SB)^{-1}SA_ix\|]\leqslant \frac{2-\beta}{1-\beta}\|(SB)^{-1}SAx\|+\sum_{i=1}^{N}\frac{2-\beta}{1-\beta}\|(SB)^{-1}SA_ix\|+\frac{1}{1-\beta}(\varepsilon+\rho),$$

可得

$$\|\eta\|\leqslant\rho+\beta\|u\|\leqslant \rho+\frac{\beta(2-\beta)}{1-\beta}\|(SB)^{-1}SAx\|+\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta(2-\beta)}{1-\beta}\|(SB)^{-1}SA_ix\|+\frac{\beta}{1-\beta}(\varepsilon+\rho),$$

因此当$\|\sigma\|\neq 0$时, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}P^{-1}B)^{-1}\sigma)\leqslant\\ &\sigma^{\mathrm{T}}(SB)^{-1}SAx+\sigma^{\mathrm{T}}(SB)^{-1}(\sum_{i=1}^{N}\alpha_iA_i)x+\\ &\sigma^{\mathrm{T}}u+\|\sigma\|\|\eta\|=\\ &\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i-1)\sigma^{\mathrm{T}}(SB)^{-1}SA_ix-\\ &\frac{1}{1-\beta}[\varepsilon+\rho+\|(SB)^{-1}SAx\|+\\ &\sum_{i=1}^{N}\|(SB)^{-1}SA_ix\|]\|\sigma\|+\|\sigma\|\|\eta\|\leqslant\\ &-\frac{1}{1-\beta}[\varepsilon+\rho+\|(SB)^{-1}SAx\|+\\ &\sum_{i=1}^{N}\|(SB)^{-1}SA_ix\|]\|\sigma\|+\|\sigma\|\|\eta\|\leqslant\\ &-(1-\beta)\|(SB)^{-1}SAx\|\|\sigma\|-\\ &(1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\|(SB)^{-1}SA_ix\|\|\sigma\|-\varepsilon\|\sigma\|<0.\end{aligned}$$

故系统能在有限时间到达滑模面, 且保持在滑模面上.

下面证明受限在滑模面$\sigma(x)=0$上的降阶等价系统是二次D_R稳定的. 令

$$T=\begin{pmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}}P^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}\\ S\end{pmatrix},$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}P\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1} & B(SB)^{-1}\end{pmatrix},$$

作变换$x=T^{-1}z$, 故$z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=Tx$, 则可得

$$z_1=\hat{B}^{\mathrm{T}}x,\ z_2=Sx=\sigma(x),$$

因此$\dot{z}=T(A+\Delta A)T^{-1}z+TB(u+\eta)$.

把T代入可得

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ B^{\mathrm{T}}P^{-1}B\end{pmatrix}(u+\eta),$$

其中:

$$\begin{aligned}a_{11}&=\hat{B}^{\mathrm{T}}(A+\Delta A)P\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1},\\ a_{12}&=S(A+\Delta A)B(SB)^{-1},\\ a_{21}&=S(A+\Delta A)P\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1},\\ a_{22}&=S(A+\Delta A)B(SB)^{-1}.\end{aligned}$$

在$\sigma(x)=0$上, 有

$$\begin{aligned}\dot{z}_1&=\hat{B}^{\mathrm{T}}(A+\Delta A)P\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1}z_1=\\ &\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[\hat{B})^{\mathrm{T}}\hat{A}_iP\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1}]z_1,\\ z_1&=\hat{B}^{\mathrm{T}}x.\end{aligned}$$

由引理3知, 该系统是二次D_R稳定的当且仅当存在正定矩阵P_0, 使得下述不等式成立:

$$\begin{pmatrix}X & Y\\ Y^{\mathrm{T}} & -I_P\otimes P_0\end{pmatrix}<0.$$

其中:

$$\begin{aligned}X=&R_{11}\otimes P_0+R_{12}\otimes[\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}_iP\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1}]P_0+\\ &R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes P_0[\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}_iP\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1}]^{\mathrm{T}},\\ Y=&L\otimes P_0[\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}_iP\hat{B}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B})^{-1}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

令$P_0=\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B}$, 则可得

$$\begin{pmatrix}M & L\otimes(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{A}_i^{\mathrm{T}}\hat{B})\\ L^{\mathrm{T}}\otimes(\hat{B}^{\mathrm{T}}\hat{A}_iP\hat{B}) & -I_P\otimes\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B}\end{pmatrix}<0,$$

$$\begin{aligned}M=&R_{11}\otimes\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{B}+R_{12}\otimes(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{A}_i\hat{B})+\\ &R_{12}^{\mathrm{T}}\otimes(\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{A}_i^{\mathrm{T}}\hat{B}),\end{aligned}$$

即不等式(3)成立, 故降阶等价系统是二次D_R稳定的. 由$z=Lx$可知原系统是二次D_R稳定的. 定理证毕.

考虑下列LMI:

$$\hat{B}^{\mathrm{T}}(PA_i+A_i^{\mathrm{T}}P)\hat{B}<0, i=1,\cdots,N, \tag{6}$$

$$(I\otimes\hat{B}^{\mathrm{T}})(L\otimes P+M\otimes(A_iP)+M^{\mathrm{T}}\otimes(A_iP)^{\mathrm{T}})(I\otimes\hat{B})<0. \tag{7}$$

推论 1 假定不等式(6)有对称正定解P, 滑模面方程由式(4)给出. 考虑由式(5)和(1)所构成的闭环系统, 则在控制律(5)的作用下, 系统能在有限时间到达滑模面, 且受限在滑模面上的$n-m$阶等价系统是二次稳定的.

推论 2 假定不等式(7)有对称正定解P, 滑模面方程由式(4)给出. 考虑由式(5)和(1)所构成的闭环系统, 则在控制律(5)的作用下, 系统能在有限时间到达滑模面, 且受限在滑模面上的$n-m$阶等价系统是二次D稳定的.

4 例子(Example)

考虑系统(1), 其中:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0.8\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix},\ g(x,t)=\frac{1}{2}\cos\ x_1x_2.$$

由假设条件得$\rho(x,t)=\|x\|, \|f(x,t)\|\leqslant\frac{1}{2}<1$即取$\beta=\frac{1}{2}$, 设对称阵$R$为

$$R_{11}=\begin{pmatrix}1.8 & 0\\ 0 & 0.19\end{pmatrix}, R_{12}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, R_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

它表示的区域为区域$\mathrm{Re}\,z<-0.9$与$\|z+1\|<0.9$的交集, 见图1中的阴影部分.

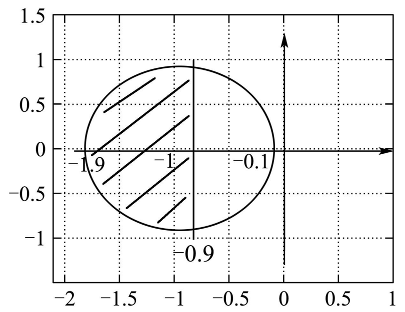

图 1 D_R区域

Fig. 1 D_R region

取$\hat{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$解线性矩阵不等式(3), 可得正定阵$P$, 正定阵的存在性说明在滑模面上降阶等价系统是二次鲁棒D_R稳定的. 经计算也可得滑模面上降阶等价系统的最大特征值为-1, 位于D_R区域内. 计算得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1.2991 & 0.1306\\ 0.1306 & 0.1563\end{pmatrix}.$$

因此滑模面可设计为$\sigma(x)=Sx=B^{\mathrm{T}}P^{-1}x=(0.2611\ \ 0.3127)x$, 取$\varepsilon=0.4$, 则控制律为

$$u(t)=\begin{cases}1.8352x_1+1.1001x_2-\\ 2\times(0.4+2.7690\|x\|)\dfrac{\sigma}{\|\sigma\|}, \|\sigma\|\neq 0,\\ 1.8352x_1+1.1001x_2, \qquad \|\sigma\|=0.\end{cases}$$

在此控制律作用下, 系统可在有限时间到达滑模面, 从而实现滑模控制.

5 结论(Conclusion)

本文利用方法, 结合系统鲁棒稳定性条件, 给出了凸胞型不确定系统变结构控制中滑模面存在的充分条件, 然后设计滑模面及控制律, 使得系统在此控制律作用下可到达滑模面, 实现滑模控制, 从而给出了凸胞型不确定系统的一种鲁棒控制方法.

参考文献(References):

[1] CHOI H H, CHUNG M J. Estimation of the asymptotic stability region of uncertain systems with bounded sliding mode controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(11): 2275 – 2278.

[2] DECARLO R A, ZAK S H, MATHEWS G P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1988, 76(3): 212 – 232.

[3] PACKARD A, ZHOU K, PANDEY P, et al. A collection of robust control problems leading to LMIs[C]//*Proc IEEE Conf on Decision and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 1991: 1245 – 1250.

[4] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to H_∞control[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 – 428.

[5] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraint: an LMI approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 367.

[6] CHOI H H. A new method for variable structure control system design: a linear approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2089 – 2092.

[7] TROFINO A. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach[C] // *Proc of the 38th IEEE Conf on Decision Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 1999: 2341 – 2346.

[8] DOMINGOS C W, RAMOS, PEDRO L D, et al. A LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems[J].*IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(4): 675 – 678.

[9] PEAUCELLE D, ARZELIER D, BACHELIER O, et al. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 40(1): 21 – 30.

[10] VALTER J, LEITE S, PEDRO L, et al. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(3): 500 – 504.

[11] BOYD S, GHZONI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. SIAM, American: Philadelphia, 1994.

作者简介:

侯晓丽 (1973—), 女, 华南理工大学自动化科学与工程学院博士, 主要研究方向为不确定时滞系统的鲁棒控制与变结构控制, E-mail: wanghou688@163.com;

胥布工 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 华南理工大学自动化科学与工程学院院长, IEEE高级会员, 主要研究兴趣为时滞系统和不确定系统的分析与综合、网络化控制系统理论及应用, E-mail: aubgxu@scut.edu.cn.