第 24 卷第 4 期 控 制 理 论 与 应 用 Vol. 24 No. 4
2007 年 8 月 Control Theory & Applications Aug. 2007

文章编号：1000−8152(2007)04−0665−04

Lurie 型直接控制系统的绝对稳定性

赵立英[1], 肖劲军[1], 刘贺平[2]

(1. 北京科技大学 应用科学学院, 北京 100083; 2. 北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)

摘要: Lurie 型控制系统是一类非常典型的非线性控制系统, 具有广泛的实际工程应用背景. 本文利用 Popov 频域法, 研究了一类 Lurie 型直接控制系统的绝对稳定性. 在系统矩阵无对角线相等情形假设的一般条件下, 给出了该类系统绝对稳定的一些充分必要条件. 这些结论推广了前人所取得的研究成果.

关键词: Lurie 型控制系统; Popov 频率判据; 绝对稳定性

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Absolute stability of direct control systems of Lurie type

ZHAO Li-ying[1], XIAO Jin-jun[1], LIU He-ping[2]

(1. School of Applied Science, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;
2. School of Information and Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: Lurie control system is a kind of typical nonlinear control systems with wide application background. The absolute stability of direct control systems of Lurie type is studied by Popov frequency criterion in this paper. Without assuming that the system matrix has equal diagonal elements, some necessary and sufficient conditions for absolute stability are obtained.The conclusions thus generalize the corresponding results of existing research.

Key words: Lurie control system; Popov frequency criterion; absolute stability

1 引言(Introduction)

Lurie 型直接控制系统是一类很重要的非线性系统, 对此系统的绝对稳定性的研究一直为许多人关注, 也已有许多研究结果[1~5]. 绝大部分工作采用的方法是 Lyapunov 函数法[4,5]. 文[2,3]利用Popov频率法, 研究了几类特殊的Lurie 型直接控制系统的绝对稳定性, 给出了系统绝对稳定的一些充要条件. 本文讨论了更一般的直接控制系统的绝对稳定性, 推广了文[2,4] 已有的结果.

2 问题准备(Problem preliminaries)

对 Lurie 型直接控制系统

$$\dot{x} = Ax + bf(c^{\mathrm{T}}x), \tag{1}$$

其中: A为稳定阵, $b,c \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$为满足条件 $0 < \sigma f(\sigma) < +\infty$ 及$f(0) = 0$的任意连续函数.

引理 1[1] 对系统 (1), 如果存在一个实数q, 使$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\} \leqslant 0$, 其中$A_{i\omega} = i\omega E - A$, q,ω均为常数, $\omega \geqslant 0$, 则系统 (1) 绝对稳定.

对任意实数$q \geqslant 0$, 记

$$a_j = \begin{cases} c_jb_jq, & \text{if } c_jb_j(q\lambda_j - 1) > 0, \\ c_jb_j/\lambda_j, & \text{if } c_jb_j(q\lambda_j - 1) < 0, \\ c_jb_j/\lambda_j, & \text{if } c_jb_j(q\lambda_j - 1) = 0, c_jb_j \neq 0, \\ 0, & \text{if } c_jb_j(q\lambda_j - 1) = 0, c_jb_j = 0. \end{cases}$$

引理 2[2] 设系统(1) 中, $A=\mathrm{diag}\{-\lambda_1, \cdots, -\lambda_n\}$, a_j 如上定义 ($j = 1, \cdots, n$), 则对任意的$q \geqslant 0$, 有$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$; 若存在$q \geqslant 0$, 使得$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \leqslant 0$, 则系统(1) 的平凡解绝对稳定.

证

$$A_{i\omega} = i\omega E - A,$$

$$c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_jb_j}{i\omega + \lambda_j},$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\} = \mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\sum_{j=1}^{n}\frac{c_jb_j}{i\omega + \lambda_j}\} = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_jb_j(\lambda_j + q\omega^2)}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

收稿日期: 2006−04−06; 收修改稿日期: 2007−05−28.

记$g_j(\omega)=\dfrac{c_jb_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}$, 对$g_j(\omega)$ 求导数:

$$g_j'(\omega)=\left[\frac{c_jb_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}\right]'=\frac{2c_jb_j(q\lambda_j-1)\omega}{(\omega^2+\lambda_j^2)^2}.$$

若$c_jb_j(q\lambda_j-1)>0$, 则函数 $g_j(\omega)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 则

$$g_j(\omega)\leqslant g_j(+\infty)=c_jb_jq.$$

若$c_jb_j(q\lambda_j-1)<0$, 则函数 $g_j(\omega)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 则

$$g_j(\omega)\leqslant g_j(0)=\frac{c_jb_j}{\lambda_j}.$$

若$c_jb_j(q\lambda_j-1)=0, c_jb_j\neq 0$, 则$g_j'(\omega)=0, q=\dfrac{1}{\lambda_j}$, 代入$g_j(\omega)$, 有$g_j(\omega)=\dfrac{c_jb_j}{\lambda_j}$.

若$c_jb_j(q\lambda_j-1)=0, c_jb_j=0$, 显然$g_j(\omega)=0$. 故由$a_j$ 的取法, 总有: $g_j(\omega)\leqslant a_j$, 因此

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_jb_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}=\sum_{j=1}^{n}g_j(\omega)\leqslant a_j.$$

若存在$q\geqslant 0$, 使得$\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\leqslant 0$, 则

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0.$$

由引理 1 可知, 系统 (1) 的平凡解绝对稳定.

3 主要结果(Main results)

定理 1 设在系统(1)中, A具有形式:

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1\\ 0 & -\lambda_2\end{bmatrix}.$$

其中$\lambda_1\neq\lambda_2$, 且 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$. 若 $-c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\cdot\mathrm{tr}A+c^{\mathrm{T}}b>0$, 则系统 (1) 的平凡解绝对稳定的充分必要条件是: $c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0, c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\geqslant 0$.

证 充分性:

$$A_{i\omega}=\begin{bmatrix}i\omega+\lambda_1 & -1\\ 0 & i\omega+\lambda_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\\&\frac{c_1b_1\lambda_1}{\lambda_1^2+\omega^2}+\frac{q\omega^2c_1b_1}{\lambda_1^2+\omega^2}+\frac{c_1b_2(\lambda_1\lambda_2-\omega^2)}{(\lambda_1^2+\omega^2)(\lambda_2^2+\omega^2)}+\\&\frac{c_1b_2q\omega^2(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_1^2+\omega^2)(\lambda_2^2+\omega^2)}+\frac{c_2b_2\lambda_2}{\lambda_2^2+\omega^2}+\frac{q\omega^2c_2b_2}{\lambda_2^2+\omega^2}=\\&\frac{F(\omega^2)}{(\lambda_1^2+\omega^2)(\lambda_2^2+\omega^2)}.\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}&F(\omega^2)=\\&q(c^{\mathrm{T}}b)\omega^4+[c_1b_1\lambda_1+qc_1b_1\lambda_2^2-c_1b_2+\\&qc_1b_2(\lambda_1+\lambda_2)+c_2b_2\lambda_2+qc_2b_2\lambda_1^2]\omega^2+\\&\lambda_1\lambda_2[\lambda_2c_1b_2+c_1b_2+\lambda_1c_2b_2].\end{aligned}$$

对于任意的$q\geqslant 0$, 由条件

$$c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0,$$
$$c^{\mathrm{T}}A^{-1}b=-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}[\lambda_2c_1b_1+c_1b_2+\lambda_1c_2b_2]\geqslant 0,$$

易知: $F(\omega^2)$ 中ω^4 的系数和常数项的系数都是非正的.

对于 ω^2 的系数:

$$\begin{aligned}&c_1b_1\lambda_1+qc_1b_1\lambda_2^2-c_1b_2+qc_1b_2(\lambda_1+\lambda_2)+\\&c_2b_2\lambda_2+qc_2b_2\lambda_1^2=\\&-c^{\mathrm{T}}Ab-q\lambda_1\lambda_2[-c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\cdot\mathrm{tr}A+c^{\mathrm{T}}b].\end{aligned}$$

1) 若$c^{\mathrm{T}}Ab>0$, 则显然对任意的$q\geqslant 0$, 由条件可知, ω^2的系数是非正的.

2) 若$c^{\mathrm{T}}Ab<0$, 则$-c^{\mathrm{T}}Ab>0$.

由条件知

$$-\lambda_1\lambda_2[-c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\cdot\mathrm{tr}A+c^{\mathrm{T}}b]<0.$$

因此, 一定存在一个充分大的$q>0$, 使得

$$-c^{\mathrm{T}}Ab-q\lambda_1\lambda_2[-c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\cdot\mathrm{tr}A+c^{\mathrm{T}}b]\leqslant 0.$$

综上可知, 不论 $c^{\mathrm{T}}Ab$的符号如何, 总存在$q(>0)$, 使 ω^2的系数是非正的.

由上面的证明过程可知$F(\omega^2)\leqslant 0$, 则有

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0.$$

由引理 1可知, 系统(1)的平凡解是绝对稳定的.

必要性由文[2]知成立.

推论 1 若定理1中, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda>0$, 则系统(1) 的平凡解绝对稳定的充分必要条件是: $c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0, c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\geqslant 0$.

此推论为文[2]中定理2.1的二维情形.

定理 2 系统(1) 中, 设A 具有形式:

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1 & \\ & -\lambda_2 & \\ & & -\lambda_3\end{bmatrix},\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0.$$

记

$$A_1=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1\\ & -\lambda_2\end{bmatrix},\ A_2=[-\lambda_3],$$
$$\underline{c}^{\mathrm{T}}=(c_1,c_2),\ \underline{b}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2).$$

1) 若$-\underline{c}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\underline{b}\,\mathrm{tr}A_1+\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{b}>0$, 则系统(1) 的平凡解绝对稳定的充分条件是: $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{b}\leqslant 0, \underline{c}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\underline{b}\geqslant 0, c_3b_3<0$.

2) 若 $c^{\mathrm{T}}A^2b-c^{\mathrm{T}}b\cdot\mathrm{tr}A^2>0, c^{\mathrm{T}}(A^{-1})^2b<0$, 则系统(1)的平凡解绝对稳定的充分必要条件是: $c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0, c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\geqslant 0$.

证 1) 易知

$$c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b=\underline{c}^{\mathrm{T}}A_{1i\omega}^{-1}\underline{b}+c_3A_{2i\omega}^{-1}b_3,$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\underline{c}^{\mathrm{T}}A_{1i\omega}^{-1}\underline{b}\}+\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c_3A_{2i\omega}^{-1}b_3\}.$$

由条件和定理 1的证明过程可知, 存在$q\geqslant 0$, 使得 $\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\underline{c}^{\mathrm{T}}A_{1i\omega}^{-1}\underline{b}\}\leqslant 0$. 而

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c_3A_{2i\omega}^{-1}b_3\}=\frac{c_3b_3\lambda_3}{\lambda_3^2+\omega^2}+\frac{q\omega^2c_3b_3}{\lambda_3^2+\omega^2}=\frac{c_3b_3(\lambda_3+q\omega^2)}{\lambda_3^2+\omega^2}.$$

因此, 由条件 $c_3b_3<0$ 可知, 则对任意的 $q\geqslant 0$, 有 $\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c_3A_{2i\omega}^{-1}b_3\}\leqslant 0$.

综上可知, 存在实数 $q\geqslant 0$, 使得

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0.$$

由引理 1 可知, 系统 (1) 的平凡解绝对稳定.

2) 必要性显然, 下证充分性.

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\frac{F(\omega^2)}{(\lambda_1^2+\omega^2)(\lambda_2^2+\omega^2)(\lambda_3^2+\omega^2)}.$$

这里

$$F(\omega^2)=q(c^{\mathrm{T}}b)\omega^6+[-c^{\mathrm{T}}Ab-q(c^{\mathrm{T}}A^2b-c^{\mathrm{T}}b\cdot\mathrm{tr}A^2)]\omega^4+[(-c^{\mathrm{T}}Ab\cdot\mathrm{tr}A^2+c^{\mathrm{T}}A^3b)+q\lambda_2^2\lambda_3^2c^{\mathrm{T}}(A^{-1})^2b]\omega^2-\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2(c^{\mathrm{T}}A^{-1}b).$$

对于任意的$q\geqslant 0$, 由条件

$$c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0, c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\geqslant 0$$

可知, ω^6的系数和常数项都是非正的.

由条件

$$c^{\mathrm{T}}A^2b-c^{\mathrm{T}}b\cdot\mathrm{tr}A^2>0,\ c^{\mathrm{T}}(A^{-1})^2b<0$$

可知, 一定存在一个充分大的$q(>0)$, 使得

$$-c^{\mathrm{T}}Ab-q(c^{\mathrm{T}}A^2b-c^{\mathrm{T}}b\cdot\mathrm{tr}A^2)<0,$$

且

$$(-c^{\mathrm{T}}Ab\cdot\mathrm{tr}A^2+c^{\mathrm{T}}A^3b)+q\lambda_2^2\lambda_3^2c^{\mathrm{T}}(A^{-1})^2b<0.$$

从而ω^4 和ω^2的系数为非正的.

从上面证明可知 $F(\omega^2)\leqslant 0$, 即有

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0.$$

由引理 1可知, 系统(1)的平凡解是绝对稳定的.

推论 2 在系统(1)中, 设A具有形式

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1 & & \\ & -\lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 0\\ & & & -\lambda_n\end{bmatrix},\ \lambda_i>0(i=1,\cdots,n).$$

记

$$A_1=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1\\ & -\lambda_2\end{bmatrix},$$

$$A_2=\mathrm{diag}\{-\lambda_3,\cdots,-\lambda_n\},$$

$$\underline{c}^{\mathrm{T}}=(c_1,c_2),\ \overline{c}^{\mathrm{T}}=(c_3,\cdots,c_n),$$

$$\underline{b}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2),\ \overline{b}^{\mathrm{T}}=(b_3,\cdots,b_n).$$

1) 若$\underline{c}^{\mathrm{T}}A_1\underline{b}\geqslant 0, -\underline{c}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\underline{b}\cdot\mathrm{tr}A_1+\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{b}>0$, 则系统(1)的平凡解绝对稳定的充分条件为: $\underline{c}^{\mathrm{T}}\underline{b}\leqslant 0, \underline{c}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\underline{b}\geqslant 0$, 且存在$q\geqslant 0$, 使得$\sum\limits_{j=3}^{n}a_j\leqslant 0$.

2) 若$c^{\mathrm{T}}=(0,c_2,\cdots,c_n)$, 则系统(1)的平凡解绝对稳定的充分必要条件为: 存在$q\geqslant 0$, 使得$\sum\limits_{j=2}^{n}a_j\leqslant 0$.

证 1)

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\underline{c}^{\mathrm{T}}A_{1i\omega}^{-1}\underline{b}\}+\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\overline{c}^{\mathrm{T}}A_{2i\omega}^{-1}\overline{b}\}=\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)\underline{c}^{\mathrm{T}}A_{1i\omega}^{-1}\underline{b}\}+\sum_{j=3}^{n}\frac{c_jb_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}\leqslant 0+\sum_{j=3}^{n}a_j\leqslant 0.$$

故由引理 1可知, 系统(1)的平凡解绝对稳定.

2) 充分性:

$$c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b=\sum_{j=2}^{n}\frac{c_jb_j}{i\omega+\lambda_j}=\sum_{j=2}^{n}\frac{c_jb_j(\lambda_j-i\omega)}{\omega^2+\lambda_j^2},$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm{T}}A_{i\omega}^{-1}b\}=\sum_{j=2}^{n}\frac{c_jb_j(\lambda_j+q\omega^2)}{\omega^2+\lambda_j^2}\leqslant\sum_{j=2}^{n}a_j\leqslant 0(\text{由引理2}).$$

故由引理 1可知, 系统(1)的平凡解绝对稳定.

此推论推广了文[2]中的定理.

定理 3 在系统(1)中, 设A具有形式:

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda_1 & 1 & 0\\ & -\lambda_2 & 1\\ & & -\lambda_3\end{bmatrix},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$. 若 $c^{\mathrm{T}}A^2b-c^{\mathrm{T}}b\cdot\mathrm{tr}A^2>0$, $c^{\mathrm{T}}(A^{-1})^2b<0$, 则统 (1) 的平凡解绝对稳定的充分必要条件是: $c^{\mathrm{T}}b\leqslant 0, c^{\mathrm{T}}A^{-1}b\geqslant 0$.

证 充分性:

$$A_{i\omega}=\begin{bmatrix} i\omega+\lambda_1 & -1 & 0\\ 0 & i\omega+\lambda_2 & -1\\ 0 & 0 & i\omega+\lambda_3\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm T}A_{i\omega}^{-1}b\}=\frac{F(\omega^2)}{(\omega^2+\lambda_1^2)(\omega^2+\lambda_2^2)(\omega^2+\lambda_3^2)}.$$

这里

$$\begin{aligned}F(\omega^2)=\ & qc^{\mathrm T}b\omega^6+[c_1b_1\lambda_1+qc_1b_1(\lambda_2^2+\lambda_3^2)-c_1b_2+ qc_1b_2(\lambda_1+\lambda_2)c_2b_2\lambda_2+qc_2b_2(\lambda_1^2+\lambda_3^2)-\\ & c_2b_3+qc_2b_3(\lambda_2+\lambda_3)-qc_1b_3+c_3b_3\lambda_3+ qc_3b_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]\omega^4+[c_1b_1\lambda_1(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\\ & qc_1b_1\lambda_2^2\lambda_3^2+c_1b_2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2)+qc_1b_2(\lambda_1+ \lambda_2)\lambda_3^2+c_2b_2\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_3^2)+qc_2b_2\lambda_1^2\lambda_3^2+\\ & c_2b_3(\lambda_2\lambda_3-\lambda_1^2)+qc_2b_3(\lambda_2+\lambda_3)\lambda_1^2+ qc_1b_3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)-c_1b_3(\lambda_1+\\ & \lambda_2+\lambda_3)+c_3b_3\lambda_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+qc_3b_3\lambda_1^2 \lambda_2^2]\omega^2+(c_1b_1\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2+c_2b_2\lambda_2\lambda_1^2\lambda_3^2+\\ & c_3b_3\lambda_3\lambda_1^2\lambda_2^2+c_1b_2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2+c_2b_3\lambda_2\lambda_3\lambda_1^2+ c_1b_3\lambda_1\lambda_3\lambda_2^2)=\\ & qc^{\mathrm T}b\omega^6+[-c^{\mathrm T}Ab-q(c^{\mathrm T}A^2b-c^{\mathrm T}b\cdot\mathrm{tr}A^2)] \omega^4+[(-\mathrm{tr}A^2\cdot c^{\mathrm T}Ab+c^{\mathrm T}A^3b)+q\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2c^{\mathrm T} (A^{-1})^2b]\omega^2-\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2c^{\mathrm T}A^{-1}b.\end{aligned}$$

由条件

$$c^{\mathrm T}b\leqslant 0, c^{\mathrm T}A^{-1}b\geqslant 0,$$

可知对任给的$q\geqslant 0$, ω^6的系数和常数项都是非正的.

由条件

$$c^{\mathrm T}A^2b-c^{\mathrm T}b\cdot\mathrm{tr}A^2>0,\ c^{\mathrm T}(A^{-1})^2b<0$$

可知, 一定存在一个充分大的$q(>0)$, 使得

$$-c^{\mathrm T}Ab-q(c^{\mathrm T}A^2b-c^{\mathrm T}b\cdot\mathrm{tr}A^2)\leqslant 0,$$

且

$$(-\mathrm{tr}A^2\cdot c^{\mathrm T}Ab+c^{\mathrm T}A^3b)+q\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2c^{\mathrm T}(A^{-1})^2b\leqslant 0.$$

从而可知ω^4和ω^2 的系数也是非正的.

因此, $F(\omega^2)\leqslant 0$, 即

$$\mathrm{Re}\{(1+i\omega q)c^{\mathrm T}A_{i\omega}^{-1}b\}\leqslant 0.$$

由引理1可知, 系统(1)的平凡解是绝对稳定的.

推论 3 若定理3中$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda>0$, 且$c^{\mathrm T}A^2b-c^{\mathrm T}b\cdot\mathrm{tr}A^2>0$, 则系统(1) 的平凡解绝对稳定的充分必要条件是

$$c^{\mathrm T}b\leqslant 0, c^{\mathrm T}A^{-1}b\geqslant 0.$$

参考文献(References):

[1] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999.
(LIAO Xiaoxin. *Theoretical Methods and Applications of Stability*[M]. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 1999.)

[2] 张维. Lurie型直接控制系统的绝对稳定性准则[J]. 应用数学和力学, 1989, 10(10): 910 – 915.
(ZHANG Wei. The criteria for absolute stability of direct control systems of Lurie type[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, 10(10): 910 – 915.)

[3] 徐慧, 张孟秋, 王艳群. 四阶直接控制系统绝对稳定的充分必要条件[J]. 数学理论与应用, 2002, 22(3): 118 – 120.
(XU Hui, ZHANG Mengqiu, WANG Yanqun. Necessary and sufficient conditions for the absolute stability of some 4th order direct control systems[J]. *Mathematical Theory & Applications*, 2002, 22(3): 118 – 120.)

[4] 张孟秋, 章联生. 一类直接控制系统绝对稳定的充分必要条件[J]. 贵州大学学报(自然科学), 2002, 19(3): 200 – 201.
(ZHANG Mengqiu, ZHANG Liansheng. Necessary and sufficient conditions for absolute stability of a class of direct control systems[J]. *J of Guizhou Unversity(Natural Science)*, 2002, 19(3): 200 – 201.)

[5] NARENDRE K S, TAYLOR J H. *Frequency Domain Criteria for Abosolute Stability*[M]. New York: Academic, 1973.

作者简介:

赵立英 (1965—), 女, 副教授, 目前研究方向为时滞系统、广义系统的鲁棒控制, E-mail: liyingzhao0909@126.com;

肖劲军 (1981—), 男, 硕士, 目前研究方向为非线性控制系统的稳定性;

刘贺平 (1951—), 男, 教授, 北京科技大学博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、过程控制和自适应控制.