第 24 卷第 5 期
2007 年 10 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 5
Oct. 2007

文章编号：1000−8152(2007)05−0693−08

广义系统H_∞多步预报器设计

王好谦[1], 张焕水[2], 段广仁[3], 王高才[4]

(1. 清华大学 自动化系, 北京 100084; 2. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061;

3. 哈尔滨工业大学 控制理论与导航技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150010;

4. 清华大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055)

摘要: 基于格林空间中的新息分析方法和卡尔曼滤波理论, 首次给出了广义系统H_∞多步预报器存在的充要条件和一种简单的计算方法. 本文将广义系统的H_∞多步预报问题转化为带有当前观测和时滞观测的格林空间中广义系统最小方差估计问题, 然后引入新息重组序列解决该最小方差估计问题. 通过求解维数与变换后的系统相同的两个黎卡提方程得到了H_∞预报器, 避免了处理带观测时滞系统时常采用的系统增广方法. 数值例子表明利用本文的新息重组方法计算广义系统H_∞多步预报器比用系统增广方法计算量小.

关键词: 广义系统; H_∞多步预报; 格林空间; 新息序列

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Design of H-infinity multi-step predictor for descriptor systems

WANG Hao-qian[1], ZHANG Huan-shui[2], DUAN Guang-ren[3], WANG Gao-cai[4]

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;
3. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150010, China;
4. Graduate School at Shenzhen, Tsinghua University, Shenzhen Guangdong 518055, China)

Abstract: Based on the method of innovation re-organization and the theory of Kalman filtering in Krein space, a sufficient and necessary condition for the existence of an H-infinity multi-step prediction for descriptor systems is given for the first time and a simple computation method is derived in this paper. Firstly, the H-infinity multi-step prediction problem for descriptor system is converted into a Krein space H_2 estimation problem with current and delayed measurements. Then, the latter one is solved by introducing a re-organization innovation sequence. The H-infinity predictor is thus computed by performing two Riccati equations that are with the same dimensions as a transformed system, and the usually used augmentation method for systems with delayed measurements is avoided. Finally, numerical example shows that the calculation burden of the descriptor systems H-infinity multi-step predictor based on re-organization innovation method is lighter than the one based on the method of system augmentation.

Key words: descriptor systems; H-infinity multi-step prediction; Krein space; innovation sequence

1 引言(Introduction)

从20世纪80年代起, H_∞估计开始成为一种重要的估计方法. 所谓的H_∞估值器是指使得信号的估计误差能量与输入噪声的能量之比小于某一给定常数的一类估值器. 由于H_∞估值器具有系统参数不确定的鲁棒性并且适用于输入噪声的统计特性未知的情形, 近年来受到广泛关注, 分别针对连续系统[1,2]和离散系统[3~6]得到大量的结果. 正常系统(非广义系统)H_∞多步预报问题目前还处于研究阶段, 例如离散系统多步预报问题可以通过系统增广来解决, 相应的会导致计算量大大增加. 也有不需要系统增广解决H_∞多步预报问题的结果[7], 但对于预报器存在的充要条件的判别计算量大且判别条件不易验证. 最近文[8]针对连续系统给出了一个比较好的结果, 计算量小且预报器存在的充要条件容易判别.

广义系统的H_∞多步预报问题的结果至今还未见到, 本文将初步探讨该问题. 首先将广义系统的H_∞多步预报问题转化为格林空间[9]中带有当前

收稿日期: 2005−08−15; 收修改稿日期: 2006−09−07.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574016); 广东省自然科学基金资助项目(OB300432).

和滞后观测的广义系统最小方差估计问题, 然后转化为其受限等价系统的估计问题. 针对广义系统的具体特点, 采用格林空间中的射影方法和新息分析方法, 本文给出了广义系统H_∞多步预报器存在的一个充要条件及相应的中心估值器.

在以下各节中, 当格林空间中的元素和欧氏空间中的元素满足相同的约束时, 为减少文中所用符号的数量, 一个符号用黑体来表示其属于格林空间, 而欧氏空间中的符号用正常字体表示, 但两者没有任何关系.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下线性离散定常系统:

$$Mx(k+1)=\varPhi x(k)+\varGamma u(k), \tag{1}$$

$$y(k)=Hx(k)+v(k), \tag{2}$$

$$z(k)=Lx(k), \tag{3}$$

其中: $x(k)\in\mathbb{R}^n,\ u(k)\in\mathbb{R}^r,\ y(k)\in\mathbb{R}^m,\ v(k)\in\mathbb{R}^m,\ z(k)\in\mathbb{R}^p$ 分别是系统(1)～(3)的状态、输入噪声、观测输出、观测噪声和待估计信号, 并且假定输入噪声和观测噪声为有界的确定性信号, $u(k),\ v(k)\in L_2[0,\ N]$, 其中$N>0$是预报的时间范围. $M,\ \varPhi,\ \varGamma,\ H,\ L$是相应维数的常实矩阵, 并且假设系统是正则的, 即rank $M=n_1<n$, 且存在s使得$\det(sM-\varPhi)\neq 0$.

在系统正则性假设下, 存在非奇异矩阵P_1, Q_1满足

$$Q_1MP_1=\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0\\ 0 & M_1\end{bmatrix},\ Q_1\varPhi P_1=\begin{bmatrix} \varPhi_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中$n_1+n_2=n$. M_1为λ_0阶的幂零阵, 即$M_1^{\lambda_0}=0,\ M_1^{\lambda_0-1}\neq 0$. 则系统(1)～(3)受限等价于

$$x_1(k+1)=\varPhi_1x_1(k)+\varGamma_1u(k),\ x_1(0), \tag{5}$$

$$M_1x_2(k+1)=x_2(k)+\varGamma_2u(k), \tag{6}$$

$$y(k)=H_1x_1(k)+H_2x_2(k)+v(k), \tag{7}$$

$$z(k)=L_1x_1(k)+L_2x_2(k), \tag{8}$$

这里$x_1(k)\in\mathbb{R}^{n_1},\ x_2(k)\in\mathbb{R}^{n_2}$, 并且

$$\begin{bmatrix}\varGamma_1\\ \varGamma_2\end{bmatrix}=Q_1\varGamma,\ \begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ L_1 & L_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H\\ L\end{bmatrix}P_1.$$

由式(6)可得

$$x_2(k)=-\varGamma_2u(k)-\cdots-M_1^{\lambda_0-1}\varGamma_2u(k+\lambda_0-1). \tag{9}$$

可以看到, $x_2(k)$的当前时刻值依赖于当前及将来的输入$u(k),\ \cdots,\ u(k+\lambda_0-1)$, 这也说明了一个一般的广义系统具有非因果性. 众所周知, 离散广义系统和正常系统的区别之一就是广义系统并不是对所有的初值$x(0)$都有解. 在式(9)中, 令$k=0$, 得$x(0)$的容许初始条件

$$[0\ \ I]P_1^{-1}x(0)=-\sum_{i=0}^{\lambda_0-1}M_1^i\varGamma_2u(i), \tag{10}$$

广义系统的H_∞预报问题可描述为:

给定常量$\gamma>0,\ l>0$以及观测序列$\{y(s),\ 0\leqslant s\leqslant k-l\}$, 给出满足如下不等式的待估信号$z(k)$的多步预报器$\check{z}(k\mid k-l)$存在的充要条件, 即满足

$$\sup_{(x_1(0),\ u,\ v)\neq 0}\frac{A(k)}{B(k)}<\gamma^2, \tag{11}$$

并且求解相应的预报器, 其中:

$$A(k)=\sum_{k=0}^{N}[\check{z}(k|k-l)-z(k)]^{\mathrm{T}}[\check{z}(k|k-l)-z(k)],$$

$$B(k)=[x_1(0)-\hat{x}_1(0)]^{\mathrm{T}}\varPi_1^{-1}[x_1(0)-\hat{x}_1(0)]+\sum_{k=0}^{N}u^{\mathrm{T}}(k)u(k)+\sum_{k=0}^{N-l}v^{\mathrm{T}}(k)v(k),$$

$x_1(0)$为式(5)的初值, $\varPi_1$为给定的正定矩阵, 它可用来反映初始状态$x_1(0)$对于输入和观测噪声的相对不确定性.

3 预备知识(Preliminaries)

定义

$$J_{l,N}=x_1^{\mathrm{T}}(0)\varPi_1^{-1}x_1(0)+\sum_{k=0}^{N-1}u^{\mathrm{T}}(k)u(k)+\sum_{k=0}^{N-l}v^{\mathrm{T}}(k)v(k)-\gamma^{-2}\sum_{k=0}^{N}v_z^{\mathrm{T}}(k_l)v_z(k_l), \tag{12}$$

其中定义$k_l\triangleq k-l$及

$$v_z(k_l)=\check{z}(k\mid k_l)-Lx(k),\ k\geqslant 0. \tag{13}$$

研究的H_∞多步预报问题等价于式(12)在状态的初值以及输入不同时为零的情况下有最小值并且估值器使得该最小值为正数[7,8]. 由式(1)(2)以及式(13), 引入如下格林空间中系统:

$$M\mathbf{x}(k+1)=\varPhi\mathbf{x}(k)+\varGamma\mathbf{u}(k), \tag{14}$$

$$\mathbf{y}(k)=H\mathbf{x}(k)+\mathbf{v}(k), \tag{15}$$

并且为上述系统引入假想的观测

$$\check{\mathbf{z}}(k\mid k_l)=L\mathbf{x}(k)+\mathbf{v}_{\mathbf{z}}(k_l),\ k\geqslant 0, \tag{16}$$

式中$\check{\mathbf{z}}(k\mid k_l)$可视为系统状态$\mathbf{x}(k)$在$k-l$时刻的观测, 容易看到假想的观测$\check{\mathbf{z}}(k\mid k_l)$在实际估计过程中对系统的状态估计结果并不起作用. 进一步, 类似于前面介绍的分解得到受限等价系统(5)～(8), 在

格林空间中可以得到相应的系统, 并且在该系统中, $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{v}(k)$, $\mathbf{v_z}(k)$假定为不相关的白噪声

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{u}(i) \\ \mathbf{v}(i) \\ \mathbf{v_z}(i) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{u}(j) \\ \mathbf{v}(j) \\ \mathbf{v_z}(j) \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \varPi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix} \delta_{ij},$$

这里δ_{ij}为Kronecker delta函数, 即当$i = j$时取1, 其余情形下为0. 特别要注意$\mathbf{v_z}(k)$具有负数方差, $\check{\mathbf{z}}(k+l \mid k)$可以视为$k$时刻的"虚拟的"观测.

合并式(15)(16)有

$$\mathbf{y_s}(k) = \begin{cases} \check{\mathbf{z}}(k+l \mid k), & -l \leqslant k < 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \check{\mathbf{z}}(k+l \mid k) \end{bmatrix}, & k \geqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

其中:

$$\mathbf{y_s}(k) = \begin{cases} L\mathbf{x}(k+l) + \mathbf{v_s}(k), & -l \leqslant k < 0, \\ \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k+l) \end{bmatrix} + \mathbf{v_s}(k), & k \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{v_s}(k) = \begin{cases} \mathbf{v_z}(k), & -l \leqslant k < 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{v_z}(k) \end{bmatrix}, & k \geqslant 0. \end{cases}$$

显然, $\mathbf{y_s}(k)$是系统在k时刻的观测而$\mathbf{v_s}(k)$是观测白噪声, 方差为

$$Q_{\mathbf{v_s}}(k) = \langle \mathbf{v_s}(k),\ \mathbf{v_s}(k) \rangle = \begin{cases} -\gamma^2 I_p, & -l \leqslant k < 0, \\ \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}, & k \geqslant 0. \end{cases} \tag{18}$$

经简单代数推导, 容易知道式(12)可以改写为

$$J_{l,N} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ u^N \\ y_s^N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{y_s}^N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{u}^N \\ \mathbf{y_s}^N \end{bmatrix} \right\rangle^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ u^N \\ y_s^N \end{bmatrix},$$

其中:

$$\mathbf{u}^N = \mathrm{col}\left\{\mathbf{u}(0),\ \mathbf{u}(1),\ \cdots,\ \mathbf{u}(N-1)\right\}, \tag{19}$$

$$\mathbf{y_s}^N = \mathrm{col}\left\{\mathbf{y_s}(-l),\ \mathbf{y_s}(1-l), \cdots, \mathbf{y_s}(N-l)\right\}. \tag{20}$$

正常字体的$x_1(0), u(k), y_s(k)$来自式(1)~(3), 而黑体$\mathbf{x}_1(0), \mathbf{u}(k), \mathbf{y_s}(k)$表示格林空间的变量, 并且表达形式与其正常字体时相同. 结合文[8]中的结果, 可以知道本文考虑的H_∞多步预报问题可转化为格林空间相应的带有当前观测和时滞观测的系统(14)~(16)的H_2滤波问题.

4 广义系统H_∞多步预报器设计(Design of H_∞ multi-step predictor for descriptor systems)

由式(4)的矩阵分解形式以及前面的分析, 容易知道广义系统(14)~(16) 受限等价于如下格林空间中的随机系统

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\varPhi}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\varGamma}\bar{\mathbf{u}}(k), \tag{21}$$

$$\mathbf{y}(k) = \bar{H}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k), \tag{22}$$

$$\check{\mathbf{z}}(k \mid k_l) = \bar{L}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v_z}(k_l), \tag{23}$$

其中$\bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k+\lambda_0+1)$, 且

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}(k)\ \ \mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}(k)\ \ \mathbf{x}_3^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}, \tag{24}$$

$$\mathbf{x}_3(k) = [\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\ \ \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k+1) \cdots \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k+\lambda_0)]^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

$$\bar{\varPhi} = \begin{bmatrix} \varPhi_1 & 0 & \varPhi_2 \\ 0 & 0 & \varPhi_3 \\ 0 & 0 & \varPhi_4 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

式(26)中$\varPhi_1$由式(4)得到, 而

$$\varPhi_2 = [\varGamma_1\, 0 \cdots 0], \varPhi_3 = [0\ -\varGamma_2 \cdots -M_1^{\lambda_0-1}\varGamma_2], \tag{27}$$

$$\varPhi_4 = \begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r(\lambda_0+1)\times r(\lambda_0+1)}, \tag{28}$$

$$\bar{\varGamma} = [0\ \ 0\ \ \varGamma_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \varGamma_3 = [0\ \ 0\ \ \cdots\ \ I_r]^{\mathrm{T}}, \tag{29}$$

$$\bar{H} = [H_1\ \ H_2\ \ 0], \bar{L} = [L_1\ \ L_2\ \ 0]. \tag{30}$$

进一步, 易得

$$\bar{L}\bar{\mathbf{x}}(k) = L\mathbf{x}(k) = [L_1\ L_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

上式中$\mathbf{u}(k), \mathbf{v}(k), \mathbf{v_z}(k)$为格林空间中的元素. 由式(21)和(17), 有系统

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\varPhi}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\varGamma}\bar{\mathbf{u}}(k), \tag{32}$$

$$\mathbf{y_s}(k) = \begin{cases} \bar{L}\bar{\mathbf{x}}(k+l) + \mathbf{v_s}(k), & -l \leqslant k < 0, \\ \begin{bmatrix} \bar{H}\bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{L}\bar{\mathbf{x}}(k+l) \end{bmatrix} + \mathbf{v_s}(k), & k \geqslant 0, \end{cases} \tag{33}$$

式(33)中观测$\mathbf{y_s}(k)$、噪声$\mathbf{v_s}(k)$及方差阵分别如前面式所示.

下面引入观测$\mathbf{y_s}(k)$的新息$\mathbf{w_s}(k)$

$$\mathbf{w_s}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{w_{s_y}}(k) \\ \mathbf{w_{s_z}}(k) \end{bmatrix} = \mathbf{y_s}(k) - \hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{s}}(k \mid k-1), \tag{34}$$

其中$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{s}}(k|k-1)$为$\mathbf{y_s}(k)$在格林空间$L\left\{\mathbf{y_s}(i)_{i=0}^{k-1}\right\}$中的射影. 依定义可以知道$\mathbf{w_s}(k)$是方差为$Q_{\mathbf{w_s}}(k)$的

白噪声序列, 即$\langle \mathbf{w_s}(k),\ \mathbf{w_s}(j)\rangle = Q_{\mathbf{w_s}}(k)\delta_{kj}$.

在随后的分析中将看到新息方差阵$Q_{\mathbf{w_s}}(k)$在广义系统H_∞多步预报问题中所起的重要作用, 它被用来判断待求的估值器$\check{z}(k \mid k_l)$是否存在. 由于观测$\mathbf{y_s}(k)$包括时滞, 下面引入新息重组序列.

4.1 新息重组和黎卡提方程(Innovation reorganization and Riccati equation)

给定观测序列$\{\mathbf{y_s}(-l),\ \cdots,\ \mathbf{y_s}(k_l)\}$, 非标准系统(32)(33)状态向量$\bar{\mathbf{x}}(k)$的最优状态预报器$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k_l)$为给定观测序列生成的线性空间上的射影. 下面为讨论方便起见, 定义$\mathbf{y_z}(i) \triangleq \check{\mathbf{z}}(i|i-l)$. 注意到$-l \leqslant k < 0$时有

$$\mathcal{L}\{\mathbf{y_s}(i)_{i=-l}^{k}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{y_z}(0),\ \cdots,\ \mathbf{y_z}(k+l)\}.$$

当$k \geqslant 0$时, 令

$$\mathcal{L}_f(k,\ k+i) = \mathcal{L}\left\{\{\mathbf{y_f}(s)_{s=0}^{k}\},\ \mathbf{y_z}(k+1),\ \cdots,\ \mathbf{y_z}(k+i)\right\},$$

以及

$$\mathcal{L}_f(k,\ k) = \mathcal{L}\left\{\mathbf{y_f}(i)_{i=0}^{k}\right\},$$

其中:

$$\mathbf{y_f}(s) \triangleq \begin{bmatrix}\mathbf{y}(s)\\ \mathbf{y_z}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{v_f}(s), \tag{35}$$

$$\mathbf{v_f}(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{v}(s)\\ \mathbf{v_z}(s-l)\end{bmatrix}, Q_{\mathbf{v_f}}(s)=\begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & -\gamma^2 I_p\end{bmatrix}. \tag{36}$$

易知线性空间$\mathcal{L}\left\{\mathbf{y_s}(i)_{i=0}^{k}\right\}$可重组为

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{y_s}(i)_{i=-l}^{k}\right\} = \mathcal{L}_f(k,\ k+l), \tag{37}$$

可给出如下定义:

定义 1 $\hat{\varsigma}(k|k,k+i)$定义为$\varsigma(k)$在空间$\mathcal{L}_f(k,k+i), i \geqslant 0$上的射影.

进一步, 引入重组观测序列$\mathbf{y}(k)$和$\mathbf{y_f}(k)$生成的新息序列

$$\mathbf{w}(k,k+i) \triangleq \mathbf{y_z}(k+i)-\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{z}(k+i|k,k+i-1),\ i>0, \tag{38}$$

$$\mathbf{w}(k,k) \triangleq \mathbf{y_f}(k) - \hat{\mathbf{y}}_\mathbf{f}(k|k-1,k-1), \tag{39}$$

其中$\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{f}(0|-1,-1) = [\bar{H}^\mathrm{T}\ \bar{L}^\mathrm{T}]^\mathrm{T}\hat{\bar{\mathbf{x}}}(0 \mid -1,-1) = 0$. 容易知道$\mathbf{w}(k,k)$为标准卡尔曼滤波的观测$\mathbf{y_f}(k)$的新息序列, 因此有如下关系:

$$\mathbf{w}(k,k+i) = \bar{L}\mathbf{e}(k,k+i) + \mathbf{v_z}(k),\ i>0, \tag{40}$$

$$\mathbf{w}(k,k) = [\bar{H}^\mathrm{T}\ \bar{L}^\mathrm{T}]^\mathrm{T}\mathbf{e}(k,k) + \mathbf{v_f}(k), \tag{41}$$

其中:

$$\mathbf{e}(k,k+i) = \bar{\mathbf{x}}(k+i) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k,k+i-1), i \geqslant 1,$$
$$\mathbf{e}(k,k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1,k-1).$$

依定义显然有$\mathbf{e}(k,k+1) = \mathbf{e}(k+1,k+1)$. 下面的引理表明了$\{\mathbf{w}(\cdot,\cdot)\}$实际上是新息序列.

引理 1[10] $\{\mathbf{w}(0,\ 0),\cdots \mathbf{w}(r,\ r),\mathbf{w}(r,\ r+1),\cdots \mathbf{w}(r,s), r \geqslant 0, s \geqslant r\}$为白噪声序列, 且张成与$\mathcal{L}\{\{\mathbf{y_f}(k)_{i=0}^{r}\},\mathbf{y_z}(r+1),\cdots,\mathbf{y_z}(s)\}$相同的线性空间.

说明 1 前面给出了两组不同的新息序列, 一种是重组新息$\mathbf{w}(\cdot,\cdot)$, 另一个就是所谓的标准(正常)新息. 易知重组新息尽管在形式上有别于由式(34)给出的标准新息, 但这两个新息序列张成与$\mathcal{L}\{\mathbf{y_s}(i)_{i=-l}^{k}\}$相同的线性空间. 进一步, 将指出标准新息方差阵可由重组新息方法计算得到.

由式(40)(41), 新息方差阵$Q_\mathbf{w}(k,\ k+i) \triangleq \langle\mathbf{w}(k,\ k+i),\ \mathbf{w}(k,\ k+i)\rangle, i \geqslant 0$, 可计算为

$$Q_\mathbf{w}(k,\ k+i) = \begin{cases}\bar{L}P(k,\ k+i)\bar{L}^{T} - \gamma^2 I_p, & 0<i \leqslant l,\\ \begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}P(k,\ k)\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}^\mathrm{T} + \begin{bmatrix}I_m & 0\\ 0 & -\gamma^2 I_p\end{bmatrix}, & i=0\end{cases} \tag{42}$$

且$P(k,\ k+i) \triangleq \langle\mathbf{e}(k,\ k+i),\ \mathbf{e}(k,\ k+i)\rangle$, $i \geqslant 0$为状态的一步预报误差方差阵.

定理 1 方差阵$P(k,j)$, $j = k+1,\ k+2,\ \cdots$, 可由下式计算:

$$P(k,j+1)=\bar{\Phi}P(k,j)\bar{\Phi}^\mathrm{T}+\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}^\mathrm{T}-\bar{\Phi}P(k,j)\bar{L}^\mathrm{T}\cdot Q_\mathbf{w}(k,j)\bar{L}P(k,j)\bar{\Phi}^\mathrm{T},\ P(k,k), \tag{43}$$

其中初值$P(k,k)$可以计算为

$$P(k+1,k+1)= \bar{\Phi}P(k,k)\bar{\Phi}^\mathrm{T}+\bar{\Gamma}\bar{\Gamma}^\mathrm{T}-\bar{\Phi}P(k,k)\cdot \begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}^\mathrm{T}Q_\mathbf{w}(k,k)\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}P(k,k)\bar{\Phi}^\mathrm{T}P(0,0), \tag{44}$$

新息方差阵$Q_\mathbf{w}(k,k+i)$由式(42)计算, 而$\bar{\Phi}$, $\bar{\Gamma}$和$\bar{L}$分别如式(26)~(30)定义.

证 类似于文[10]中的结果简单推导可得.

说明 2 特别地, 式(44)的初值$P(0,0)$定义为$P(0,0) = \langle\bar{\mathbf{x}}(0),\ \bar{\mathbf{x}}(0)\rangle$, 系统状态初值为$\bar{\mathbf{x}}(0) = [\mathbf{x}_1^\mathrm{T}(0)\ \ \mathbf{x}_2^\mathrm{T}(0)\ \ \mathbf{x}_3^\mathrm{T}(0)]^\mathrm{T}$. 其中初值分量分别由式(5)(9)以及(25)确定.

4.2 新息方差阵$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$(Innovation covariance matrix $Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$)

定义 2 状态$\bar{\mathbf{x}}(k+j)$和状态估计误差$\mathbf{e}(k,k+i)$的协方差阵以及新息$\mathbf{w}(k,k+i)$的增益矩阵分别定义为:

$$R_{k,k+i}^{k+j} \triangleq \langle \bar{\mathbf{x}}(k+j),\ \mathbf{e}(k,k+i)\rangle,\ i \geqslant 0, \tag{45}$$

$$K_{k,k+i}^{k+j} \triangleq \langle \bar{\mathbf{x}}(k+j), \mathbf{w}(k,k+i)\rangle\, Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k,k+i), \tag{46}$$

其中新息$\mathbf{w}(k,k+i)$定义为式(40)(41).

由上面定义易得

$$K_{k,\ k+i}^{k+j} = R_{k,k+i}^{k+j}\bar{L}^{\mathrm{T}}Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k,k+i),\ i>0, \tag{47}$$

$$K_{k,\ k+i}^{k+j} = R_{k,k+i}^{k+j}\begin{bmatrix}\bar{H}^{\mathrm{T}}\\ \bar{L}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k,k),\ i=0, \tag{48}$$

其中$K_{k,\ k+i}^{k+j}$为卡尔曼滤波增益矩阵, 考虑到前面所述的定义和射影公式有

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+j|k,k+i) =$$
$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+j|k,k+i-1) + K_{k,k+i}^{k+j}\mathbf{w}(k,k+i),$$
$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+j|k,k) = \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+j|k-1,k-1) + K_{k,k}^{k+j}\mathbf{w}(k,k).$$

进一步, 协方差阵$R_{k,k+i}^{k+j},\ i\geqslant 0$可以用下式递推计算:

$$R_{k,k+i}^{k+j} = \begin{cases} R_{k,k+i-1}^{k+j}A^{\mathrm{T}}(k,k+i-1), & i \geqslant j,\\ \bar{\Phi}R_{k,k+i}^{k+j-1}, & i<j,\end{cases} \tag{49}$$

其中:

$$R_{k,k+j}^{k+j} = P(k,k+j),\ R_{k,k+i}^{k+i} = P(k,k+i).$$

方差阵$P(\cdot,\ \cdot)$由式(43)(44)计算, 且$A(k,k+i)$为:

$$A(k,k+i) = \bar{\Phi} - \bar{\Phi}P(k,k+i)\bar{L}^{\mathrm{T}}Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k,k+i)\bar{L}, \tag{50}$$

$$A(k+i,k+i) = \bar{\Phi} - \bar{\Phi}P(k+i,k+i)\cdot \begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k,k+i)\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}. \tag{51}$$

定理 2 新息方差阵$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$可利用下式计算:

$$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k) = \begin{cases} Q_{22}(k), & -l \leqslant k < 0,\\ \begin{bmatrix} Q_{11}(k) & Q_{12}(k)\\ Q_{12}^{\mathrm{T}}(k) & Q_{22}(k)\end{bmatrix}, & k \geqslant 0,\end{cases} \tag{52}$$

其中:

$$Q_{11}(k) = \bar{H}P(k)\bar{H}^{\mathrm{T}} + I_m,$$
$$Q_{12}(k) = \bar{H}R_{k-1,\ k+l}^{k}\bar{L}^{\mathrm{T}},$$
$$Q_{22}(k) = \bar{L}P(k-1,k+l-1)\bar{L}^{\mathrm{T}} - \gamma^2 I_p,$$

而

$$P(k) = R_{k-1,\ k}^{k} - \sum_{i=0}^{l-1}R_{k-1,\ k+i}^{k}\bar{L}^{\mathrm{T}}Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k-1,k+i)\cdot \bar{L}\left[R_{k-1,\ k+i}^{k}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{53}$$

$\bar{\Phi}$, $\bar{\Gamma}$和$\bar{L}$分别如式(26)~(30)定义.

证 当$-l \leqslant k < 0$时, 由于

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{y}_\mathbf{s}(s)_{s=-l}^{k-1}\right\} =$$
$$\mathcal{L}\left\{\check{\mathbf{z}}(0|-l),\cdots,\check{\mathbf{z}}(k+l-1|k-1)\right\},$$

其中$\check{\mathbf{z}}(i+l|i) = \bar{L}\bar{\mathbf{x}}(i+l) + \mathbf{v}_\mathbf{z}(i)$. 因此新息表达式如下:

$$\mathbf{w}_\mathbf{s}(k) = \mathbf{y}_\mathbf{s}(k) - \hat{\mathbf{y}}_\mathbf{s}(k|k-1) =$$
$$\bar{L}\bar{\mathbf{x}}(k+l) - \bar{L}\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k+l-1) + \mathbf{v}_\mathbf{z}(k).$$

令$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k-1,k+l-1) = \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k+l-1)$, 易见方差阵为式(52). 当$k\geqslant 0$时, 新息表达式为

$$\mathbf{w}_\mathbf{s}(k) = \mathbf{y}_\mathbf{s}(k) - \mathbf{y}_\mathbf{s}(k|k-1) =$$
$$\begin{bmatrix}\bar{H}\left[\bar{\mathbf{x}}(k) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1)\right]\\ \bar{L}\left[\bar{\mathbf{x}}(k+l) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k+l-1)\right]\end{bmatrix} + \mathbf{v}_\mathbf{s}(k),$$

其中$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k+l-1)$及$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1)$为状态$k+l$和$k$时刻在$\mathcal{L}\left\{\mathbf{y}_\mathbf{s}(i)_{i=-l}^{k+l-1}\right\}$和$\mathcal{L}\left\{\mathbf{y}_\mathbf{s}(i)_{i=-l}^{k-1}\right\}$上的射影. 应用重组的新息序列可得

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k-1) = \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k-1,k+l-1),$$
$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1) = \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1,k+l-1),$$

这里$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1,k+l-1)$和$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k+l|k-1,k+l-1)$分别表示状态$\bar{\mathbf{x}}(s)$于$k$和$k+l$时刻在空间

$$\mathcal{L}\left\{\mathbf{w}(j,j)_{j=0}^{k-1};\mathbf{w}(k-1,k),\cdots\mathbf{w}(k-1,k+l-1)\right\}$$

上的射影, 令

$$\eta(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k|k-1,k+l-1).$$

利用射影公式及重组新息序列有

$$\eta(k) =$$
$$\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathrm{proj}\left\{\bar{\mathbf{x}}(k)|\mathbf{w}(j,j)_{j=0}^{k-1},\mathbf{w}(k-1,k+j)_{j=0}^{j=l-1}\right\},$$

进一步计算可得

$$\eta(k) = \mathbf{e}(k-1,k) - \sum_{i=0}^{l-1}R_{k-1,\ k+i}^{k}\bar{L}^{\mathrm{T}}\cdot Q_{\mathbf{w}}^{-1}(k-1,k+i)\mathbf{w}(k-1,k+i). \tag{54}$$

因此新息方差阵$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$可以由下式计算, 即

$$\mathbf{w}_\mathbf{s}(k) = \begin{bmatrix}\bar{H} & 0\\ 0 & \bar{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(k)\\ \mathbf{e}(k-1,k+l)\end{bmatrix} + \mathbf{v}_\mathbf{s}(k),$$

$$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k) = \langle \mathbf{w}_\mathbf{s}(k),\ \mathbf{w}_\mathbf{s}(k) \rangle . \tag{55}$$

注意到$\mathbf{e}(k-1,k+l)$与$\mathbf{w}(k-1,k+i), i=0,1,\cdots,l-1$不相关, 可以得到

$$\begin{aligned}&\langle \eta(k),\ \mathbf{e}(k-1,\ k+l)\rangle = \\ &\langle \mathbf{e}(k-1,\ k+l),\ \mathbf{e}(k-1,\ k+l)\rangle = \\ &\left\langle \bar{\mathbf{x}}(k)-\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k|k-1,k+l-1),\ \mathbf{e}(k-1,\ k+l)\right\rangle = \\ &\langle \bar{\mathbf{x}}(k),\ \mathbf{e}(k-1,\ k+l)\rangle = R^k_{k-1,\ k+l}.\end{aligned}$$

进一步由式(54), $\eta(k)$与$\mathbf{w}(k-1,k+i), i=0,1,\cdots,l-1$不相关, 因此有

$$\begin{aligned}&\langle \eta(k),\eta(k)\rangle + \sum_{i=0}^{l-1} R^k_{k-1,\ k+i}\bar{L}^{\mathrm{T}} Q^{-1}_{\mathbf{w}}(k-1,k+i)\cdot \\ &\bar{L}\left[R^k_{k-1,\ k+i}\right]^{\mathrm{T}} = R^k_{k-1,\ k}.\end{aligned}$$

直接可得式(53), 由此新息方差阵$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$可由式(52)给出. 证毕.

4.3 主要结果(The main results)

定理 3 考虑正则的广义系统(1)～(3)以及相应的性能指标(11), 误差方差阵的递推式(43)及(44)有界, 有如下结果:

1) 给定常数$\gamma>0$, 满足指标的H_∞估值器$\check{\mathbf{z}}(k+l\mid k)$存在当且仅当$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$和$Q_{\mathbf{v}_\mathbf{s}}(k)$在任意$k=-l,\ -l+1,\ \cdots,\ N$具有相同正惯性指数, $Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$, $Q_{\mathbf{v}_\mathbf{s}}(k)$分别由(52)和(18)给出.

2) 容许中心估值器$\check{z}(k+l\mid k)$在数值上等于格林空间的H_∞预报器$\check{\mathbf{z}}(k+l\mid k)$, 且

$$\check{\mathbf{z}}(k+l|k) = \bar{L}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+l\mid k,k+l-1), \tag{56}$$

其中$\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+l\mid k,k+l-1)$为状态$\bar{\mathbf{x}}(k+l)$在线性空间$L_f(k,k+l-1)$上的射影且由下式给出:

$$\begin{aligned}&\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+i+1\mid k,k+i) = \\ &\bar{\varPhi}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+i\mid k,k+i-1)+\bar{\varPhi}P(k,k+i)\bar{L}^{\mathrm{T}}Q^{-1}_{\mathbf{w}}(k,k+i) \\ &[\check{\mathbf{z}}(k+i\mid k_l+i)-\bar{L}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+i\mid k,k+i-1)],\end{aligned} \tag{57}$$

上式中$P(k,k+i)$由式(43)递推计算, 初值$\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+1\mid k,k)$的计算为

$$\begin{cases}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+1|k,k) = \\ \bar{\varPhi}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k|k-1,k-1)+\bar{\varPhi}P(k,k)\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot \\ Q^{-1}_{\mathbf{w}}(k,k)[\mathbf{y}_\mathbf{f}(k)-\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{L}\end{bmatrix}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k|k-1,k-1)], \\ \hat{\hat{x}}(0|-1,-1)=0,\end{cases} \tag{58}$$

式中$P(k,k)$由式(44)递推计算, $\bar{\varPhi},\bar{\varGamma}$和$\bar{L}$分别如式(26)～(30)定义, 而$\mathbf{y}_\mathbf{f}(k), Q_\mathbf{w}(k,k)$分如(35)(42)定义.

证 首先注意到满足性能指标(11)的广义系统H_∞多步预报器$\check{\mathbf{z}}(k+l|k)$存在的充要条件是$J_{l,N}$关于$(\mathbf{x}_1(0),\mathbf{u}^N)$有最小值$J^0_{l,N}({\mathbf{y}_\mathbf{s}}^N)$且选取的估值器要满足该最小值大于零. 类似于文[11]的思想, 最小值可以写为新息$\mathbf{w}_\mathbf{s}(k)$的表达式, 即

$$J^0_{l,N}({\mathbf{y}_\mathbf{s}}^N) = \sum_{t=-l}^{N} {\mathbf{w}_\mathbf{s}}^{\mathrm{T}}(k)Q^{-1}_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k){\mathbf{w}_\mathbf{s}}^{\mathrm{T}}(k),$$

而该最小值存在的充要条件是$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$和$Q_{\mathbf{v}_\mathbf{s}}(k)$具有相同的正惯性指数.

其次, 根据式(52), 在$k\geqslant 0$时有

$$\begin{aligned}&Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k) = \\ &\begin{bmatrix}\bar{H}P(k)\bar{H}^{\mathrm{T}}+I_m & \bar{H}R^k_{k-1,k+l}\bar{L}^{\mathrm{T}} \\ \bar{L}[R^k_{k-1,k+l}]^{\mathrm{T}}\bar{H}^{\mathrm{T}} & \bar{L}P(k-1,k+l)\bar{L}^{\mathrm{T}}-\gamma^2 I_p\end{bmatrix} \triangleq \\ &\begin{bmatrix}Q_{11}(k) & Q_{12}(k) \\ Q^{\mathrm{T}}_{12}(k) & Q_{22}(k)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

分解得

$$\begin{aligned}Q_{w_s}(k) = &\begin{bmatrix}I_m & 0 \\ Q^{\mathrm{T}}_{12}(k)Q^{-1}_{11}(k) & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_{11}(k) & 0 \\ 0 & \Delta(k)\end{bmatrix}\cdot \\ &\begin{bmatrix}I_m & Q^{-1}_{11}(k)Q_{12}(k) \\ 0 & I_p\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$\Delta(k) = Q_{22}(k) - Q^{\mathrm{T}}_{12}(k)Q^{-1}_{11}(k)Q_{12}(k).$$

由新息$\mathbf{w}_\mathbf{s}(k)$的前面所给定义以及最小值的新息表达式, 并应用上面的分解有

$$\begin{aligned}J^0_{l,N}({\mathbf{y}_\mathbf{s}}^N) =&\sum_{t=0}^{-1}{\mathbf{w}_\mathbf{s}}^{\mathrm{T}}(k)Q^{-1}_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k){\mathbf{w}_\mathbf{s}}^{\mathrm{T}}(k)+ \\ &\sum_{k=0}^{N}[\mathbf{y}(k)-\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)]^{\mathrm{T}}Q^{-1}_{11}(k)[\cdot]+ \\ &\sum_{k=0}^{N}{\mathbf{z}_\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(k)\Delta^{-1}(k)\mathbf{z}_\mathbf{y}(k),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_\mathbf{y}(k) =&\check{\mathbf{z}}(k+l|k)-\hat{\mathbf{z}}(k+l|k-1)- \\ &Q^{\mathrm{T}}_{12}(k)Q^{-1}_{11}(k)[\mathbf{y}(k)-\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)].\end{aligned}$$

由于最小值存在的充要条件是$Q_{\mathbf{w}_\mathbf{s}}(k)$和$Q_{\mathbf{v}_\mathbf{s}}(k)$具有相同的正惯性指数, 因此由$Q_{11}(k)>0$可得$\Delta(k)<0$. 则多步预报器的获取可以选择使得$\mathbf{z}_\mathbf{y}(k)=0$, 即

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{z}}(k+l|k)=&\hat{\mathbf{z}}(k+l|k-1,\ k+l-1)+Q^{\mathrm{T}}_{12}(k)\cdot \\ &Q^{-1}_{11}(k)[\mathbf{y}(k)-\hat{\mathbf{y}}(k|k-1)].\end{aligned} \tag{59}$$

进一步考虑到

$$Q_{12}(k)=\left\langle \mathbf{w}_{\mathbf{s}_\mathbf{y}}(k),\mathbf{w}_{\mathbf{s}_\mathbf{z}}(k)\right\rangle=\left\langle \mathbf{w}_{\mathbf{s}_\mathbf{y}}(k),\check{\mathbf{z}}(k+l|k)\right\rangle,$$

$$Q_{11}(k)=\langle \mathbf{w}_{\mathbf{s_y}}(k),\ \mathbf{w}_{\mathbf{s_y}}(k)\rangle = Q_{\mathbf{w_y}}(k),$$

分别代入式(59)中可得

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{z}}(k+l|k) =& L\hat{\mathbf{x}}(k+l|k,k+l-1) = \\ & \bar{L}\hat{\hat{\mathbf{x}}}(k+l|k,k+l-1).\end{aligned}$$

式(57)和(58)用类似文[8]中的方法推导可得.

4.4 计算量的比较(Comparison of computational burden)

针对系统(21)~(23), 考虑并推广文[12]系统增广方法, 引入如下状态增广的系统:

$$\begin{aligned}&\bar{x}_a(k+1) = \bar{\varPhi}_a\bar{x}_a(k) + \bar{\varGamma}_a u(k),\\ &y(k-l) = \bar{H}_a\bar{x}_a(k) + v(k-l),\\ &\check{z}(k|k_l) = \bar{L}_a\bar{x}_a(k) + v_z(k_l),\end{aligned}$$

其中:

$$\bar{x}_a(k) = [\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\ \bar{x}^{\mathrm{T}}(k-1)\ \cdots\ \bar{x}^{\mathrm{T}}(k-l)]^{\mathrm{T}},$$

$$\varPhi_a = \begin{bmatrix}\varPhi & 0 \cdots 0\\ I_n & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots\ \vdots\\ 0\ 0 & I_n\ 0\end{bmatrix}, \bar{\varGamma}_a = \begin{bmatrix}\bar{\varGamma}\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}, \bar{L}_a = \begin{bmatrix}\bar{L}^{\mathrm{T}}\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{H}_a = \begin{cases}0, & 0\leqslant k<l,\\ [0\ 0\ \cdots\ \bar{H}], & k\geqslant l,\end{cases}$$

类似于文[12], 有如下增广方法计算H$_\infty$多步预报器的结果.

引理 2 考虑系统(21)~(23)和相关的性能指标(11), 给定量$\gamma>0$, 满足指标的H$_\infty$估值器$\check{z}(k\mid k-l)$存在的充要条件是黎卡提方程:

$$\begin{aligned}&P_a(k+1) = \bar{\varGamma}_a\bar{\varGamma}_a^{\mathrm{T}} + \bar{\varPhi}_a\varSigma_a(k)\bar{\varPhi}_a^{\mathrm{T}},\\ &\varSigma_a(k)=P_a(k)\left\{I+[\bar{H}_a^{\mathrm{T}}\bar{H}_a-\gamma^{-2}\bar{L}_a^{\mathrm{T}}\bar{L}_a]P_a^{\mathrm{T}}(k)\right\}^{-1},\\ &\varSigma_a(0) = \mathrm{diag}\{P(0,0),0\},\end{aligned}$$

有使得$\varSigma_a(k)\geqslant 0$的解$(0<k\leqslant N)$, $P(0,0)$如前说明2中定义. 此时H$_\infty$多步预报器为

$$\check{z}(k\mid k-l) = \bar{L}_a\check{x}_a(k),$$

其中$\check{x}_a(k)$由如下方程计算为

$$\begin{aligned}\check{x}_a(k+1)=&\bar{\varPhi}_a\check{x}_a(k)+\bar{\varPhi}_aP_a(k)\bar{H}_a^{\mathrm{T}}[I+\bar{H}_aP_a(k)\cdot\\ &\bar{H}_a^{\mathrm{T}}]^{-1}[y(k-l+1)-\bar{H}_a\bar{\varPhi}_a\check{x}_a(k)].\end{aligned}$$

考虑到矩阵加法运算量远远小于乘法和除法, 因此只是把乘法和除法做为运算量, 每一步递推运算的计算量用MD_{aug}表示, 且乘、除法的运算方向均为从右向左, 可得

$$\begin{aligned}MD_{\mathrm{aug}} =& 3[n+r(\lambda_0+1)]^3(l+1)^3+m^3+\\ &(3m+p)[n+r(\lambda_0+1)]^2(l+1)^2+\\ &4[n+r(\lambda_0+1)]^2(l+1)^2+\\ &2m[n+r(\lambda_0+1)](l+1)+m^2.\end{aligned}$$

类似的, 基于本文给出的算法, 可得利用新息重组方法的计算量, 每一步递推的计算量用MD_{re}表示, 并定义$\nabla = n+r(\lambda_0+1)$, 则有

$$\begin{aligned}MD_{\mathrm{re}} =& (5l+5)\nabla^3+r(l+1)\nabla^2+3\nabla^2(m+p)+\\ &2\nabla(m+p)^2+3l\nabla^2p+2l\nabla p^2+\\ &2(l-1)\nabla p+p^2(l-1)+3l\nabla^2+\\ &2(m+p)\nabla+(m+p)^2.\end{aligned}$$

例 1 考虑系统(1)~(3), 假设$n=5,\ \lambda_0=3,$ $m=r=p=1$,分别考虑预报步长为1, 3, 5时, 两种方法在计算预报器时的运算量比较如表1所示.

表 1 例1中两种方法运算量的比较

Table 1 Computational burden comparison of the two approaches in example 1

l	1	3	5
MD_{aug}	20126	150410	495830
MD_{re}	8554	17052	25550

5 数值例子(Numerical example)

例 2 考虑形如(1)~(3)的广义系统, 其中

$$M = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \varPhi = \begin{bmatrix}0.709 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \varGamma = \begin{bmatrix}0.709\\0\end{bmatrix},$$
$$H = [-2\ \ 3],\ L = [0\ \ 1].$$

易知系统满足正则性要求, 则相应受限等价系统(5)~(8)中矩阵分别为

$$\begin{aligned}&\varPhi_1 = 0.709, \varGamma_1 = 0.709,\ \varGamma_2 = 0,\ M_1 = 0,\\ &H_1 = -2,\ H_2 = -3,\ L_1 = 0,\ L_2 = 1,\end{aligned}$$

容许初值为$x(0) = [*\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 符号"*"表示任意常数, 幂零指数$\lambda_0 = 1$. 利用本文的方法可判断满足性能指标(11)的H$_\infty$多步预报器$\check{z}(k\mid k_l)$存在.

进一步对应于式(21)~(23)各式中矩阵分别为

$$\bar{\varPhi} = \begin{bmatrix}0.709 & 0 & 0.709 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \bar{\varGamma} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$\bar{H} = [-2\ 3\ 0\ 0],\ \bar{L} = [0\ 1\ 0\ 0],$$

最后给出预报步长l分别为2和5时求解H$_\infty$多步预报

器的计算量比较. 注意到本例中, $n = 2,\ m = r = p = 1,\ \lambda_0 = 1$, 利用上一节得到的运算量计算公式, 可得两种方法的计算量的比较如下表所示.

表 2 例2两种方法运算量的比较

Table 2 Computational burden comparison of the two approaches in example 2

l	2	5
$MD_{\rm aug}$	6362	46130
$MD_{\rm re}$	1373	2720

参考文献(References):

[1] NAGPAL K M, KHARGONEKAR P P. Filtering and smoothing in an $\rm H_\infty$ setting[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(2): 152 – 166.

[2] SHAKED U, YAESH I. A simple method for deriving J-spectral factors[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(12): 891 – 895.

[3] COLANERI P, MARONI M, SHAKED U. $\rm H_\infty$ prediction and smoothing for discrete time systems: a J-spectral factorization approach[C]// *Proc of the 37th IEEE Conf on Decision and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 1998: 2836 – 2842.

[4] COLANERI P, FERRANTE A. A J-spectral factorization approach for $\rm H_\infty$ estimation problem in discrete time[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 2108 – 2113.

[5] GRIMBLE M J. $\rm H_\infty$ optimal multichannel linear deconvolution filters, predictors and smoothers[J]. *Int J Control*, 1996, 63(3): 519 – 533.

[6] SHAKED U. $\rm H_\infty$ optimal estimation–old and new result[C]// *Proc of the 21th Barzilian Automatic Control Conf*. Uberlandia, MG, Brasil: [s.n.], 1998.

[7] HASSIBI B, SAYED A H, KAILATH T. Indefinite quadratic estimation and control: A unified approach to $\rm H_2$ and $\rm H_\infty$ theories[M]// *SIAM Studies in Applied Mathematics Series*. New York: SIAM, 1998.

[8] ZHANG H S, ZHANG D, XIE L H. An innovation approach to $\rm H_\infty$ prediction for continuous-time systems with application to systems with delayed measurements[J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1253 – 1261.

[9] ISTRATESCU V I. *Inner Product Structures, Theory and Applications*[M]. Dordrecht, Holland: Reidel, 1987.

[10] ZHANG H S, XIE L H, SOH Y C. A unified approach to linear estimation for discrete-time systems – part I: $\rm H_2$ estimation[C]// *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2001: 2917 – 2922.

[11] ZHANG H S, XIE L H, SOH Y C. A unified approach to linear estimation for discrete-time systems – part I: $\rm H_\infty$ estimation[C]// *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control* Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2001: 2923 – 2928.

[12] THEODOR Y, SHAKED U. Game theory approach to $\rm H_\infty$ optimal discrete-time fixed-point and fixed-lag smoothing[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1944 – 1948.

作者简介:

王好谦 (1977—), 男, 在清华大学自动化系做博士后研究工作, 主要研究方向为最优滤波、多模型控制, E-mail: wanghaoqian@tsinghua.edu.cn;

张焕水 (1963—), 男, 1997年获得博士学位, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为最优滤波、鲁棒滤波、优化控制、无线通讯和信号处理, E-mail: hszhang@sdu.edu.cn;

段广仁 (1962—), 男, 1989年获得博士学位, 国家杰出青年基金获得者、长江学者、特聘教授、博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制、广义线性系统理论及其应用, E-mail: grduan@iee.org;

王高才 (1976—), 男, 在清华大学深圳研究生院做博士后研究工作, 主要研究方向为分布式计算, E-mail: wanggc@sz.tsinghua.edu.cn.