第 24 卷第 5 期
2007 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 5
Oct. 2007

文章编号：1000−8152(2007)05−0701−06

# 奇异摄动系统的$H_\infty$控制: 基于奇异系统的方法

钟宁帆[1], 孙敏慧[2], 邹　云[1]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 中国海洋大学 数学系, 山东 青岛 266003)

**摘要**: 实际系统的奇异系统模型往往通过忽略系统的奇异摄动系统模型微分项系数矩阵中的小时间参数得到. 然而, 传统的奇异系统控制器设计很少考虑微分项系数矩阵的摄动. 本文拓展了现有奇异系统输出动态反馈$H_\infty$控制器的设计, 使得当实际闭环系统中存在小时间参数时, 仍然能保持稳定并且满足一定的$H_\infty$性能指标. 仿真算例说明了本文提出方法的有效性.

**关键词**: 奇异系统; 奇异摄动系统; $H_\infty$控制

**中图分类号**: TP13　　**文献标识码**: A

# H-infinity control for singularly perturbed systems: a method based on singular system controller design

ZHONG Ning-fan[1], SUN Min-hui[2], ZOU Yun[1]

(1. College of Automation, Nanjin University of Science and Technology, Nanjin Jiangsu 210094, China;
2. Department of Applied Mathematics, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266003, China)

**Abstract:** The H-infinity control problem for singularly perturbed system is considered in this paper. The conventional design techniques of the output dynamic feedback H-infinity controller for singular systems are improved. It is shown that when such an improved controller is applied to corresponding singularly perturbed systems, the stability and H-infinity performance of the closed-loop system can be guaranteed when there exist singularly perturbed parameters in the derivative-term-matrix. The H-infinity controller design is $\varepsilon$ independent. Matrix inequalities are also proposed to design the controller. Finally, a numerical example is presented to show the effectiveness of the controller.

**Key words:** singular system; singularly perturbed system; H-infinity control

## 1　引言(Introduction)

在系统理论与控制工程中, 对物理系统进行建模往往有较高的阶次；实际系统中存在的很多小时间参数是建模动态阶数较高的一个重要原因. 在实际工程中, 为了简化模型经常通过忽略这些小时间参数来进行控制器设计. 在这类简化模型中, 奇异系统是一种很常见的形式[1].

奇异系统的研究在过去20多年中有很多成果[2], 文献[3∼8]研究了奇异系统$H_\infty$控制器设计的多种方法. 但是就作者所知, 尚未见有文献从奇异系统的角度研究实际带有小参数的系统的控制器设计问题, 这在某些情况下, 将有可能会给奇异系统理论在实际工程中的应用带来了一定的局限性. 实际上, 在很多情况下, 根据奇异系统模型设计的控制器在闭环系统中存在小时间参数时不能达到期望的效果, 比如下面这个例子.

考察带有小时间参数的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \varepsilon\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中$\varepsilon > 0$为实际系统中存在的小时间参数. 由于$\varepsilon$在实际系统中很小, 很难确定其确切取值; 因此在系统建模中往往被忽略掉, 从而将原来含有小时间参数的系统建模为奇异系统. 这里根据奇异系统设计输出反馈控制器$u(t) = 2y(t)$.

当忽略小参数时, 即当$\varepsilon = 0$时, 容易验证闭环奇异系统无脉冲且稳定. 然而, 由于实际系统含有小时间参数, 因此, $\varepsilon > 0$, 闭环系统为二阶系统; 并且当$\varepsilon \to 0^+$时, 存在一个系统特征值趋于正无穷, 因

收稿日期: 2006−01−10; 收修改稿日期: 2006−09−19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474078, 60304001).

此实际闭环系统不稳定, 由上述讨论可以看出, 利用奇异系统作为近似模型研究, 在一定情况下不能得到很好的控制器设计. 因此, 讨论如何改进奇异系统控制器设计方法是非常有意义的问题.

若在奇异系统模型中保留小时间参数, 则会得到奇异摄动系统. 奇异摄动系统当$\varepsilon \to 0^+$时的极限系统具有奇异系统的形式[9~11]. 关于奇异摄动系统的研究已有很多结果[12~16]. 其主要思想为当$\varepsilon > 0$很小的时候, 将原系统用快系统和慢系统来近似, 并且以快慢系统为模型来设计原系统控制器；这实质上是一种近似的方法, 而且存在一定的局限性. 文献[15]利用近似Riccati方程研究了奇异摄动系统的$\mathrm{H}_\infty$控制, 通过近似的Riccati等式组给出了奇异摄动系统$\mathrm{H}_\infty$问题可解的界实引理, 以及动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制器设计方法.

本文尝试拓展文献[3]中的奇异系统动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制器设计, 使得该控制器与控制对象组成的闭环系统在实际存在小时间参数的情况下, 依然能够保持稳定并且满足一定的$\mathrm{H}_\infty$性能指标. 本文结果的意义在于一方面拓展了现有的奇异系统$\mathrm{H}_\infty$控制方法；另一方面, 相对于文献[15]中的Riccati等式方法, 本文的结果为奇异摄动系统$\mathrm{H}_\infty$控制器设计提供了与小时间参数无关的矩阵不等式方法.

## 2 预备工作(Preliminary work )

首先, 笔者将回顾并且改进文献[3]中的奇异系统$\mathrm{H}_\infty$控制问题可解的判据. 考察如下奇异系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t), \\ z(t) = C_1x(t), \\ y(t) = C_2x(t). \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{2}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为系统状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$为控制输入, $\omega(t) \in \mathbb{R}^s$为干扰输入, $y(t) \in \mathbb{R}^w$为测量输出, $z(t) \in \mathbb{R}^v$为受控输出, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times s}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{v\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{w\times n}$.

系统矩阵具有形式

$$E = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

并且满足$I_1 \in \mathbb{R}^{p\times p}$,其余矩阵分块具有适当维数.

显然, 奇异系统(2)是如下摄动系统当$\varepsilon \to 0^+$时的极限系统

$$\begin{cases} E_\varepsilon\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t), \\ z(t) = C_1x(t), \\ y(t) = C_2x(t). \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{3}$$

其中: $\varepsilon > 0$为小时间参数, $A, B_i, C_i, i = 1, 2$与系统(2)定义相同, 并且$E_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 \end{bmatrix}$.

首先给出以下几个定义.

**定义 1** 当$(E, A)$同时满足正则稳定无脉冲时, 奇异系统(2)容许.

**定义 2** 设$x_+(t), x_{\varepsilon+}(t)$分别为奇异系统(2)和摄动系统(3)的广义状态解. 若奇异系统正则并且广义状态解满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} x_{\varepsilon+}(t) = x_+(t),$$

则称奇异系统(2)鲁棒保持.

定义2中的广义状态解收敛性在文献[9~11]中都有明确的定义与研究, 下面将根据定义2给出几个引理.

**引理 1** [11] 若奇异系统(2)正则, 则当$A_{22}$特征值均在负半平面时, 摄动系统(3)广义状态解当$\varepsilon \to 0^+$时极限解为奇异系统(2)的广义状态解.

**定义 3** 若奇异系统(2)正则, 并且矩阵$A_{22}$特征值均在负半平面, 则称奇异系统强鲁棒保持.

文献[3]中定理1给出了奇异系统$\mathrm{H}_\infty$控制问题可解的充分必要判据(界实引理). 根据界实引理[3], 本文中定义

$$G_R(X; A, B_1, C_1) \triangleq A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A + C_1^{\mathrm{T}}C_1 + \gamma^{-2}X^{\mathrm{T}}B_1B_1^{\mathrm{T}}X.$$

并且, 按照$A$将$G_R$写为分块形式可得

$$G_R(X; A, B_1, C_1) = \begin{bmatrix} G_{R1} & G_{R2} \\ G_{R2}^{\mathrm{T}} & G_{R3} \end{bmatrix}.$$

下面, 根据定义3将界实引理做了一定的改进, 在满足文[3]中界实引理条件的基础上要求系统(2)同时强鲁棒保持. 因此, 可以得到引理2.

界实引理中$X, Y$按照系统(2)的形式统一写为分块形式可以得到

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中$X_1 \in \mathbb{R}^{p\times p}, X_3 \in \mathbb{R}^{q\times q}, Y_1 \in \mathbb{R}^{p\times p}, Y_3 \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

**引理 2** 设奇异系统(2)满足界实引理[3], 则当文献[3]定理1中矩阵$X$同时满足

$$UXU^{\mathrm{T}} > 0, \tag{5}$$

或$Y$同时满足

$$UYU^{\mathrm{T}} > 0, \tag{6}$$

$U = [0\ \ I_2]$, 时奇异系统(2)容许, $\|G_{\omega z}(s)\| < \gamma$, 并

且系统(2)强鲁棒保持.

**证**　由$UXU^{\mathrm{T}}>0$, 可得$X_3>0$, 又因为

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_1^{\mathrm{T}} & X_2^{\mathrm{T}} \\ 0 & X_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}<0,$$

因此, 容易得到$A_{22}^{\mathrm{T}}X_3+X_3^{\mathrm{T}}A_{22}<0$, 并且$A_{22}$的特征值在负半平面. 因此, 根据引理1可得奇异系统(2)强鲁棒保持.

同理, 当矩阵$Y$满足$UYU^{\mathrm{T}}>0$时, 奇异系统(2)的强鲁棒保持.

根据引理条件奇异系统(2)同时满足界实引理[3], 因此引理2得证.　　证毕.

本节给出了奇异系统鲁棒保持和强鲁棒保持的概念, 并改进了奇异系统的界实引理, 使得满足该引理条件的奇异系统同时具有强鲁棒保持的性质, 这些结果为下面的控制器设计打下了基础.

## 3　主要结果(Main results )

首先考虑奇异系统(2)的$H_\infty$控制器设计, 系统(2)的动态输出反馈$H_\infty$控制器为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}y(t), \\ u(t)=\begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{7}$$

其中: $t\in\mathbb{R}^+, \xi_1(t)\in\mathbb{R}^{p_\xi}, \xi_2(t)\in\mathbb{R}^{q_\xi}, p_\xi+q_\xi=n_\xi$.

在控制器(7)中, 令

$$\hat{E}=\begin{bmatrix} \hat{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \hat{A}=\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\hat{B}=[\hat{B}_1\ \ \hat{B}_2]^{\mathrm{T}},\ \hat{C}=[\hat{C}_1\ \ \hat{C}_2],$$

则式(7)可简单记为

$$\begin{cases} \hat{E}\dot{\xi}(t)=\hat{A}\xi(t)+\hat{B}y(t), \\ u(t)=\hat{C}\xi(t), \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{8}$$

由系统(2)与控制器(11)组成闭环系统

$$\begin{cases} E_c\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_c\omega(t), \\ y(t)=C_cx_c(t), \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{9}$$

其中:

$$E_c=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \hat{E} \end{bmatrix},\ A_c=\begin{bmatrix} A & B_2\hat{C} \\ \hat{B}C_2 & \hat{A} \end{bmatrix},$$
$$B_c=[B_1\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ C_c=[C_1\ \ 0].$$

显然, 闭环系统(9)仍然是奇异系统, 文献[3]定理2对控制器(7)进行了设计. 下面将讨论如何改进文[3]中的设计使得闭环系统(9)容许, 满足$H_\infty$指标, 同时强鲁棒保持.

根据奇异系统界实引理[3]可得闭环系统(9)容许且满足$H_\infty$指标当且仅当存在矩阵$X_c$使得

$$E_c^{\mathrm{T}}X_c=X_c^{\mathrm{T}}E_c,$$
$$A_c^{\mathrm{T}}X_c+X_c^{\mathrm{T}}A_c+C_c^{\mathrm{T}}C_c+\gamma^{-2}X_c^{\mathrm{T}}B_cB_c^{\mathrm{T}}X_c<0,$$

通过受限等价变换, 可以直接讨论系统矩阵具有如下形式的闭环系统(9)

$$E_c=\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_c=\begin{bmatrix} A_{11} & B_{21}\hat{C}_1 & A_{12} & B_{12}\hat{C}_2 \\ \hat{B}_1C_{21} & \hat{A}_{11} & \hat{B}_1C_{22} & \hat{A}_{12} \\ A_{21} & B_{22}\hat{C}_1 & A_{22} & B_{22}\hat{C}_2 \\ \hat{B}_2C_{21} & \hat{A}_{21} & \hat{B}_2C_{22} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$B_c=[B_{11}^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ B_{12}^{\mathrm{T}}\ \ 0]^{\mathrm{T}}, C_c=[C_{11}\ \ 0\ \ C_{12}\ \ 0].$$

因此, 根据前面奇异系统界实引理[3], 考虑$H_\infty$指标判据时可以直接假设$X_c$具有如下形式

$$X_c=\begin{bmatrix} X_{c1} & 0 \\ X_{c2} & X_{c3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{c11} & X_{c12} & 0 & 0 \\ X_{c13} & X_{c14} & 0 & 0 \\ X_{c21} & X_{c22} & X_{c31} & X_{c32} \\ X_{c23} & X_{c24} & X_{c33} & X_{c34} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

这样可以得到下面的主要定理.

**定理 1**　对于奇异系统(2), 若存在矩阵$X$, $Y$, $F$, $G$满足文献[3]中定理2条件并且$UXU^{\mathrm{T}}>0, UYU^{\mathrm{T}}>0$, $\gamma^2(UY^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}})^{-1}-UXU^{\mathrm{T}}>0$(这里$U=[0\ \ I_2]$)则闭环系统(9)容许, 满足$\|C_c(sE_c-A_c)^{-1}B_c\|_\infty<\gamma, \gamma>0$, 同时闭环系统强鲁棒保持.

**证**　首先根据定理条件可知$X, Y$具有结构(4)并且满足$X_3>0, Y_3>0$.

令$\varDelta=\gamma^2Y^{-\mathrm{T}}-X$, 则

$$\varDelta=\begin{bmatrix} \varDelta_1 & 0 \\ \varDelta_2 & \varDelta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & \gamma^2Y_3^{-\mathrm{T}}-X_3 \end{bmatrix}.$$

由于控制器(7)首先满足文献[3]定理2条件, 因此闭环系统(9)容许且满足给定$H_\infty$指标. 下面需要进一步证明在定理条件下闭环系统是强鲁棒保持的.

闭环系统中记

$$C_{c2}=\begin{bmatrix} C_{12} & 0 \end{bmatrix}, B_{c2}=\begin{bmatrix} B_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \varTheta=\begin{bmatrix} A_{22} & B_{22}\hat{C}_2 \\ \hat{B}_2C_{22} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},$$

其中, 根据文[3]定理2可得

$$\hat{A}_{22}=A_{22}+B_{22}\hat{C}_2-\hat{B}_2C_{22}+\gamma^{-2}B_{12}B_{12}^{\mathrm{T}}X_3-\varDelta_3^{-\mathrm{T}}\cdot$$
$$\hat{C}_2^{\mathrm{T}}B_{22}^{\mathrm{T}}X_3+\varDelta_3^{-\mathrm{T}}G_{R3}(X;A+B_2F,B_1,C_1).$$

显然, 要证明闭环系统(9)强鲁棒保持只需要证明$\Theta$特征值均在负半平面.

构造$\Psi=\begin{bmatrix}\gamma^2Y_3^{-\mathrm{T}} & -\Delta_3\\ -\Delta_3 & \Delta_3\end{bmatrix}$, 根据定理条件容易得到$\Psi>0$. 于是令

$$g_r=\Psi^{\mathrm{T}}\Theta+\Theta^{\mathrm{T}}\Psi+C_{c2}^{\mathrm{T}}C_{c2}+\gamma^{-2}\Psi^{\mathrm{T}}B_{c2}B_{c2}^{\mathrm{T}}\Psi,$$

由于$\Psi>0$, 因此要证明$\Theta$特征值均在负半平面, 只需要证明$g_r<0$即可.

下面, 令$\tilde{S}=\tilde{T}=\begin{bmatrix}I & 0\\ I & I\end{bmatrix}$其中$I$是与$X_3$, $Y_3$维数相同的单位矩阵, 则分别可以得到

$$\tilde{\Theta}=\tilde{S}^{-1}\Theta\tilde{T}=\begin{bmatrix}A_{22}+B_{22}\hat{C}_2 & B_{22}\hat{C}_2\\ \hat{A}_{22}-B_{22}\hat{C}_2-A_{22}+\hat{B}_2C_{22} & \hat{A}_{22}-B_{22}\hat{C}_2\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Psi}=\tilde{S}^{\mathrm{T}}\Psi\tilde{T}=\begin{bmatrix}X_3 & 0\\ 0 & \Delta_3\end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_{c2}=\tilde{S}^{-1}B_{c2}=\begin{bmatrix}B_{12}^{\mathrm{T}} & -B_{12}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{C}_{c2}=C_{c2}\tilde{T}=\begin{bmatrix}C_{12} & 0\end{bmatrix}.$$

同时, 令

$$\bar{S}=\begin{bmatrix}I & \gamma^{-2}Y_3\Delta_3^{\mathrm{T}}\\ 0 & I\end{bmatrix},\bar{T}=\begin{bmatrix}I & \gamma^{-2}Y_3^{\mathrm{T}}\Delta_3\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

其中$I$是与$X_3$, $Y_3$维数相同的单位矩阵, 则分别可以得到

$$\bar{\Psi}=\bar{S}^{\mathrm{T}}\Psi\bar{T}=\begin{bmatrix}\gamma^2Y_3^{-\mathrm{T}} & 0\\ 0 & *\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Theta}=\bar{S}^{-1}\Theta\bar{T}=\begin{bmatrix}A_{22}-\gamma^{-2}Y_3\Delta_3^{\mathrm{T}}\hat{B}_2C_{22} & *\\ * & *\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{c2}=\bar{S}^{-1}B_{c2}=\begin{bmatrix}B_{12}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{C}_{c2}=C_{c2}\bar{T}=\begin{bmatrix}C_{12} & \gamma^{-2}C_{12}Y_3^{\mathrm{T}}\Delta_3\end{bmatrix}.$$

记$\tilde{g}_r=\tilde{T}^{\mathrm{T}}g_r\tilde{T}$, $\bar{g}_r=\bar{T}^{\mathrm{T}}g_r\bar{T}$, 则可以将$\tilde{g}_r$与$\bar{g}_r$写为如下分块形式

$$\tilde{V}=\begin{bmatrix}\tilde{V}_1 & \tilde{V}_2\\ \tilde{V}_2^{\mathrm{T}} & \tilde{V}_3\end{bmatrix}=\tilde{g}_r,\bar{V}=\begin{bmatrix}\bar{V}_1 & \bar{V}_2\\ \bar{V}_2^{\mathrm{T}} & \bar{V}_3\end{bmatrix}=\bar{g}_r.$$

通过将$g_r$各部分矩阵代入并计算可以得到$\tilde{V}_2=\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_3=\bar{V}_1-\tilde{V}_1+\tilde{V}_2+\tilde{V}_2^{\mathrm{T}}$, $\tilde{V}_1<0$, 且$\bar{V}_1<0$. 因此

$$\tilde{g}_r=\begin{bmatrix}\tilde{V}_1 & \tilde{V}_1\\ \tilde{V}_1 & \bar{V}_1+\tilde{V}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{V}_1 & 0\\ 0 & \bar{V}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & I\\ 0 & I\end{bmatrix}<0,$$

其中$I$为适当维数的单位矩阵. 由上述证明可知$\Theta$的所有特征值均在负半平面. 根据定义3, 可知闭环系统(9)强鲁棒保持.

综上, 在定理条件下, 动态输出反馈控制器(9)使得闭环系统(9)容许, 满足$\mathrm{H}_\infty$性能指标并且强鲁棒保持.

证毕.

定理1实质上改进了文献[3]定理2的控制器设计, 进一步将利用改进后的控制器(7)与受控对象构成闭环系统, 将证明闭环系统在存在小时间参数的情况下仍然能保持期望特性. 于是可以得到下面的定理2.

**定理 2** 假设动态输出反馈控制器(7)使得闭环系统(9)容许, 满足$\|C_c(sE_c-A_c)^{-1}B_c\|_\infty<\gamma$, $\gamma>0$, 并且强鲁棒保持. 设奇异摄动系统(3)的动态输出反馈控制器在实际存在小时间参数时为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1(t)\\ \varepsilon\dot{\xi}_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ \hat{B}_2\end{bmatrix}y(t),\\ u(t)=\begin{bmatrix}\hat{C}_1 & \hat{C}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{11}$$

其中$t\in\mathbb{R}^+$, 控制器中各个矩阵根据定理1加以设计, 则闭环系统

$$\begin{cases}E_c(\varepsilon)\dot{x}_c(t)=A_cx_c(t)+B_c\omega(t),\\ y(t)=C_cx_c(t),\end{cases}\tag{12}$$

其中$t\in\mathbb{R}^+$. 当$\varepsilon$充分小时稳定并且满足给定的$\mathrm{H}_\infty$指标.

**证** 显然$E_c=E_c(0)$, 根据定理条件, 闭环系统(9)容许, 强鲁棒保持. 并且, 由$g_r<0$, $\Theta$稳定可得$g_r(X;\Theta,B_{c2},C_{c2})=0$存在镇定解. 因此, 根据文[5]中命题1, 当$\varepsilon$充分小时$\|C_c(sE_c(\varepsilon)-A_c)^{-1}B_c\|_\infty<\gamma$. 因此当$\varepsilon$充分小时闭环系统(9)稳定并且满足$\mathrm{H}_\infty$指标.

证毕.

通过定理1和定理2可以看出, 当奇异系统(2)满足定理1条件时, 其动态输出反馈$\mathrm{H}_\infty$控制器(7)通过改进, 就能够在实际系统具有充分小时间参数时依然有效. 实际上, 当定理1条件满足时, 可以通过求解定理1中的Riccati不等式得到定理2中控制器(7)的结构参数.

矩阵不等式方法是求解矩阵不等式的常用方法[17], 根据前面的讨论, 将讨论如何利用矩阵不等式的方法求取控制器(7)参数.

**定理 3** 下面两个判据是等价的:

I) 满足定理1条件的矩阵不等式有解$X,Y,F,G$;

II) 存在可逆矩阵$W,Z$, 矩阵$Q,R$同时满足如下

矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} Z^{\mathrm T}A^{\mathrm T}+AZ+R^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}+B_2R & Z^{\mathrm T}C_1^{\mathrm T} & B_1 \\ C_1Z & -I & 0 \\ B_1^{\mathrm T} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0,$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}W^{\mathrm T}+WA+C_2^{\mathrm T}Q^{\mathrm T}+QC_2 & WB_1 & C_1^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T}W^{\mathrm T} & -I & 0 \\ C_1 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0,$$

$$-[I\ \ 0]Z\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}<0, -[0\ \ I]Z\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}<0,$$

$$-[I\ \ 0]W\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}<0, -[0\ \ I]W\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}<0,$$

$$-[0\ \ I](\gamma^2W^{\mathrm T}-Z^{-1})\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}<0,$$

$$E^{\mathrm T}(\gamma^2W^{\mathrm T}-Z^{-1})\leqslant 0.$$

**证**　I)⇒II): 容易得到满足定理条件的矩阵$X, Y$均非奇异, 因此可得

$$(A+B_2F)^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}(A+B_2F)+$$
$$C_1^{\mathrm T}C_1+\gamma^{-2}X^{\mathrm T}B_1B_1^{\mathrm T}X<0,$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X^{-\mathrm T}((A+B_2F)^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}(A+B_2F)+$$
$$C_1^{\mathrm T}C_1+\gamma^{-2}X^{\mathrm T}B_1B_1^{\mathrm T}X)X^{-1}<0,$$
$$\Leftrightarrow$$
$$X^{-\mathrm T}A^{\mathrm T}+AX^{-1}+X^{-\mathrm T}F^TB_2^{\mathrm T}+B_2FX^{-1}+$$
$$X^{-\mathrm T}C_1^{\mathrm T}C_1X^{-1}+\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm T}<0.$$

令$Z=X^{-1}, R=FZ$, 则根据Schur引理以及定理条件可以得到II).

II)⇒I): 由II)可知$Z, W$均可逆, 通过I)⇒II)的逆推导可以直接得到I).

证毕.

由定理3可以通过MATLAB的LMI工具箱求解动态输出反馈控制器(11), 这样就方便了控制器设计.

## 4　仿真算例(Simulation example)

本节中, 将通过一个实际算例说明本文控制器设计的有效性. 在奇异摄动系统(3)中, 令

$$E_\varepsilon=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}^{\mathrm T}, C_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

并且取$H_\infty$指标为$\gamma=1$, 通过求解定理3中的矩阵不等式可得

$$X=\begin{bmatrix} 0.2257 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.2673 & 0.2971 & -0.1402 \\ 0.1256 & -0.1402 & 0.1722 \end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix} 0.2257 & -2.3756 & 1.7575 \\ 0.0000 & 0.2971 & -0.1402 \\ 0.0000 & -0.1402 & 0.1722 \end{bmatrix},$$

$$(\gamma^2Y^{-\mathrm T}-X)=\begin{bmatrix} 4.2057 & 0.0000 & 0.0000 \\ 23.1529 & 5.1705 & 4.5920 \\ -26.7149 & 4.5920 & 9.2594 \end{bmatrix}.$$

容易验证所求得结果满足定理1的条件, 进一步根据定理1可得到控制器(7)参数矩阵. 下面通过仿真计算列表进行分析.

表 1　开环系统与闭环系统性能比较

Table 1　Comparison between open-loop system and closed-loop system

| | 开环系统 | | 闭环系统 | |
|---|---|---|---|---|
| | 稳定性 | $H_\infty$范数 | 稳定性 | $H_\infty$范数 |
| $\varepsilon=0.001$ | 不稳定 | 无 | 稳定 | 0.16923 |
| $\varepsilon=0.01$ | 不稳定 | 无 | 稳定 | 0.23835 |
| $\varepsilon=0.05$ | 不稳定 | 无 | 稳定 | 4.7725 |
| $\varepsilon=0.1$ | 不稳定 | 无 | 稳定 | 无 |

首先, 根据仿真结果容易知道在上述情况下, 开环奇异摄动系统都是不稳定的. 而加入控制器后构成的闭环系统在$\varepsilon$充分小时稳定并且满足给定的$H_\infty$性能指标; 然而当$\varepsilon$取值比较大时, 比如当$\varepsilon=0.05$时闭环系统虽然稳定但是不满足$H_\infty$性能指标, 当$\varepsilon=0.1$时闭环系统不稳定. 仿真结果与本文前面的理论分析是一致的. 因此, 算例表明控制器设计是有效的.

同时, 利用文献[3]中的设计方法设计奇异系统$H_\infty$控制器; 容易验证, 当闭环系统带小时间参数时不稳定. 根据上面的仿真比较可以看到, 本文提出的方法的确是对已有方法的有益的补充.

## 5　结论(Conclusion )

本文尝试拓展已有的奇异系统动态输出反馈$H_\infty$控制器的设计方法, 使得当实际闭环系统中存在小时间参数时, 也能保持稳定并且满足$H_\infty$性能指标. 本文的结果表明, 利用拓展后的奇异系统动态输出反馈$H_\infty$控制器与原系统构成的闭环系统, 在实际存在充分小时间参数时, 依然能够能达到有效的控制效果. 进一步, 本文给出了一种矩阵不等式方法进行控制器设计.

## 参考文献(References):


[1] VERGHESE G C, LEVY B C, KAILATH T. A generalized state-space for singular systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(4): 811 – 831.

[2] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. New York: Springer-Verlag, 1984.

[3] MASUBUCHI I, KAMITANCE Y, OHARA A, et al. $H_\infty$ Control for descriptor systems: a matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 – 673.

[4] TAKABA K, MORIHIRA N, KATAYAMA T. $H_\infty$ Control for descriptor systems: a J-spectral factorization approach[C]// *Proc of the 33rd IEEE Conf on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL: [s.n.], 1994: 2251 – 2256.

[5] 周绍生, 李洪亮, 冯纯伯. 一类带有时滞的广义系统的$H_\infty$控制:一种LMI方法[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(3): 324 – 328.
(ZHOU Shaosheng, LI Hongliang, FENG Chunbo. $H_\infty$ suboptimal control for a class of singular systems with time-delay:an LMI approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(3): 324 – 328.)

[6] 徐胜元, 牛玉刚, 杨成梧. 参数不确定性奇异系统的鲁棒$H_\infty$控制[J]. 自动化学报, 2004, 30(1): 397 – 400.
(XU Shengyuan, NIU Yugang, YANG Chengwu. Robust $H_\infty$ control for singular systems with parameter uncertainty[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 397 – 400.)

[7] 陈跃鹏, 张庆灵, 翟丁. 基于观测器的具有反馈增益变化的广义系统$H_\infty$控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(3): 151 – 154.
(CHEN Yuepeng, ZHANG Qingling, ZHAI Ding. $H_\infty$ control based observer with additive feedback gain variations for descriptor systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 151 – 154.)

[8] LIN C, WANG J, YANG G. $H_\infty$ Control for a class of descriptor systems with uncertainties in the derivative matrix[C]// *Proc of the American Control Conference*. San Diego, California: [s.n.], 1999.

[9] FRANCIS B A. Convergence in the boundary layer for singularly perturbed equations[J]. *Automatica*, 1982, 18(2): 57 – 62.

[10] 邹云, 杨成梧. 奇异摄动系统的极限解[J]. 自动化学报, 1993, 19(3): 356 – 360.
(ZOU Yun, YANG Chengwu. On the interpretations for the solutions of differential equations with singular coefficients[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1993, 19(3): 356 – 360.)

[11] 钟宁帆, 邹云. 奇异摄动系统极限解存在的代数判据[J]. 控制与决策, 2006, 21(6): 717 – 720.
(ZHONG Ningfan, ZOU Yun. Algebraic criteria for the convergence of the solution of singularly perturbed system in distribution topology[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(6): 717 – 720.)

[12] 许可康. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
(XU Kekang. *Singular Perturbation in Control Theory*[M]. Beijing: Science Press, 1986.)

[13] KOKOTOVIC P V. Applications of singular perturbation techniques to control problems[J]. *SIAM Review*, 1984, 26(4): 501 – 550.

[14] ZORAN G. High accuracy techniques for singularly perturbed optimal control and filtering problems[C]// *Plenary Lecture at the Int Conf on Continuous, Discrete & Impulsive Systems*. [S.l]: [s.n.], 2001: 1 – 55.

[15] TAN W, LEUNG T, TU Q. $H_\infty$ control for singularly perturbed systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(2): 255 – 260.

[16] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 基于迭代线性矩阵不等式的奇异摄动系统同时镇定[J]. 自动化学报, 2004, 30(1): 1 – 7.
(LIU Huaping, SUN Fuchun, HE Kezhong, et al. Simultaneous stabilization for singularly perturbed systems via iterative linear matrix inequalities[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(1): 1 – 7.)

[17] 俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control–Linear Martrix Inequation Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)


## 作者简介:


**钟宁帆** (1979—), 男, 博士生, 研究方向为奇异摄动、奇异系统, E-mail: zningfan2004@163.com;

**孙敏慧** (1980—), 女, 讲师, 研究方向为鲁棒控制、随机系统, E-mail: sunny_mh@163.com;

**邹 云** (1962—), 男, 教授、博士生导师, 主要研究方向为奇异系统、2-D系统、电力系统稳定性分析等, E-mail: zouyun@vip.163.com.