

非线性不确定系统的鲁棒滑模观测器设计

张袅娜^{1,2}, 冯 勇², 邱 东¹

(1. 长春工业大学 自动化系, 吉林 长春 130012; 2. 哈尔滨工业大学 电气学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 对非线性不确定性系统, 提出一种鲁棒滑模观测器. 所提出的鲁棒滑模观测器通过滑模与相应的控制策略来实现, 设计参数的选取不要求解大量方程, 同时能保证对系统的非线性不确定项具有鲁棒性. 通过设计滑模, 可以调整观测器跟踪系统状态的收敛速度, 使状态估计达到预期的指标. 仿真结果验证了提出方法的有效性.

关键词: 观测器; 滑模; 鲁棒性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust sliding mode observer design of nonlinear uncertain systems

ZHANG Niao-na^{1,2}, FENG Yong², QIU Dong¹

(1. Department of Automation, Changchun University of Technology, Changchun Jilin 130012, China;

2. Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: A robust sliding mode observer for nonlinear and uncertain systems is proposed in this paper. Firstly, the state observer problem is formulated. Then, the sliding mode and control strategy are designed, which guarantees the robustness of the observer with the nonlinearities or uncertainties of systems. The convergence rate between the observer and the system can also be adjusted by choosing suitable sliding mode manifold, so as to attain the desired performances. Finally, simulation results are presented to validate the design.

Key words: observer; sliding mode; robustness

1 引言(Introduction)

在控制系统设计中, 很多控制器的设计是建立在被控系统的所有状态可直接获得的假定上的. 但在众多场合, 系统的状态是不能完全测得的, 因此一个很自然的问题就是如何利用被控系统输入、输出的信息设计观测器, 对系统状态实现重构.

Luenberger在1971年提出一种用于确定的线性系统中的观测器, 利用观测器输出与系统输出之间的偏差修正观测器的估计值, 使得观测器状态与系统状态之间的偏差渐近趋于零^[1]. 但实际中, 更普遍的情况是系统中存在非线性不确定性, 而Luenberger观测器不具有鲁棒性, 在这种情况下, 不能很好的估计出系统的状态. Walcott和Zak等人采用变结构技术, 提出了Walcott-Zak观测器, 对系统中的非线性不确定性均具有鲁棒性, 并且不需要知道非线性项的具体信息, 只需要非线性不确定性满足匹配条件且有上界^[2~4]. 但设计过程中, 设计参数矩阵必须满足严格的假设条件: 即存在一矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 使得矩阵 $A_0 = A - GC$ 有稳定的特征根, 并且对于某个设计参数矩阵 F ,

存在一Lyapunov对 (P, Q) , 满足“ $C^T F^T = PB$; $A_0^T P + P A_0 = -Q$ ”; 且 P 对称. 在设计过程中, 需要大量不等式计算, 设计过程繁琐, 当系统维数较高时, 难以设计^[5].

本文提出一种鲁棒滑模观测器, 解决了上述问题. 通过采用新的观测器的控制策略, 使设计参数的选取不要求解大量方程, 极大简化了设计过程, 同时能保证对系统的非线性不确定项具有鲁棒性. 通过设计滑模, 可以调整观测器跟踪系统状态的收敛速度, 使状态估计达到预期的指标. 仿真结果验证了提出方法的有效性.

2 非线性不确定系统的鲁棒滑模观测器设计(Robust sliding mode observer design of nonlinear uncertain system)

2.1 非线性不确定性系统的模型(Dynamic model of nonlinear uncertain system)

考虑如下非线性不确定性系统^[4,6]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $m \leq p \leq n$, 假设矩阵 B , C 满秩, (A, C) 能观. 未知函数 $f(t, x, u)$ 表示系统的非线性不确定性, 且满足匹配条件 $f = B\xi(t, x, u)$. 式中, 未知函数 $\xi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ 有界, 即满足下式:

$$\|\xi(t, x, u)\| < r_1 \|u(t)\| + \alpha(t, y), \quad (3)$$

式中: r_1 为已知正实数; $\alpha(t, y)$ 为已知函数.

本文的设计目标为: 对于非线性不确定系统(1), 设计鲁棒滑模状态观测器, 快速、准确地估计出系统的状态, 且设计的观测器应对系统(1)的非线性不确定性部分 $f(t, x, u)$ 具有鲁棒性.

2.2 鲁棒滑模观测器设计(Robust sliding mode observer design)

对于非线性不确定系统(1), 本文提出如下形式的鲁棒滑模观测器:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + Bv, \quad (4)$$

式中: $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为观测器估计的系统状态, $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 设计参数矩阵, $v(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^m$ 为观测器的控制输入. 定义非线性不确定系统(1)的状态与观测器(4)的状态的偏差为 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, 由式(1)和式(4)得到偏差系统方程

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) - B\xi(t, x, u) + Bv, \quad (5)$$

式中 $A_0 = A - GC$. 若偏差系统(5)的状态变量渐进或有限时间收敛到原点, 则实现了系统的状态估计.

为了设计鲁棒滑模观测器(4), 首先, 将滑模设计为如下的线性滑模形式:

$$s = Me = FCe = F(C\hat{x} - y), \quad (6)$$

式中: $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$, C 为系统(1)的输出矩阵, 故滑模(6)设计问题即归结为参数矩阵 F 的设计.

对于非线性不确定系统(1)的鲁棒滑模观测器(4), 本文提出如下滑模策略 v :

$$v = \begin{cases} 0, & \|s^T MB\| = 0, \\ -\frac{(s^T MB)^T}{\|s^T MB\|} (\rho \|s\| \|MB\| + \Delta), & \text{其他}, \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\Delta = \eta(\frac{1}{2})^\beta \|s\|^{2\beta}$, 设计参数 $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$ 为正实数, $\rho = r_1 \|u(t)\| + \alpha(t, y)$.

对应的鲁棒滑模观测器系统结构图如图1所示, 图中的函数为式(7)的滑模策略 v .

为了下面的定理证明方便, 令 $e = [e_1; e_2]$, 将偏差系统(5)写为如下分块形式:

$$\dot{e}_1(t) = A_{011}e_1(t) + A_{012}e_2(t), \quad (8)$$

$$\dot{e}_2(t) = A_{021}e_1(t) + A_{022}e_2(t) - B_2\xi + B_2v, \quad (9)$$

式中:

$$\begin{aligned} [A_{011}, A_{012}; A_{021}, A_{022}] &= A, A_{012} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}, \\ A_{011} &\in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}, A_{021} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, \\ A_{022} &\in \mathbb{R}^{m \times m}, [0; B_2] = B. \end{aligned}$$

将滑模(6)写为分块的形式

$$s = M_1 e_1 + M_2 e_2, \quad (10)$$

式中: $M = [M_1, M_2]$, $M_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. 为了后面说明方便, 定义如下矩阵:

$$A_M = A_{011} - A_{012}M_2^{-1}M_1, \quad (11)$$

$$A_s = 2^{-1}(M^T M A_0 + A_0^T M^T M). \quad (12)$$

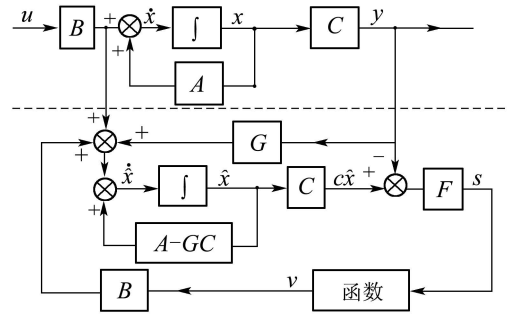


图1 鲁棒滑模观测器系统结构图

Fig. 1 Portrait of robust sliding mode observer

下面给出关于鲁棒滑模观测器(4)设计的定理1, 该观测器对系统(1)中的非线性不确定性部分 $f(t, x, u)$ 具有鲁棒性, 并且可以渐近估计出系统(1)的状态.

定理1 对于非线性不确定系统(1)的鲁棒滑模观测器(4), 采用滑模(6)和控制策略(7), 设计参数矩阵 G , 使得误差系统(5)中的 A_0 为Hurwitz矩阵, 设计滑模参数矩阵 M 使得式(11)中的 A_M 为Hurwitz矩阵, 并且 $\lambda_{\max}(A_s) \leq 0$, 式中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵最大特征值. 则鲁棒滑模观测器(4)对系统(1)的非线性不确定性部分 $f(t, x, u)$ 具有鲁棒性, 可以渐近估计出系统(1)的状态. 误差系统(5)的收敛速度由 A_M 的特征值确定.

证 选取如下Lyapunov函数:

$$V = 2^{-1} s^T s = 2^{-1} e^T M^T M e.$$

沿偏差系统(5), $V(s)$ 对时间的一阶导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} = e^T M^T M \dot{e} = \\ &= e^T M^T M (A_0 e - B\xi + Bv) = \\ &= 2^{-1} e^T (M^T M A_0 + A_0^T M^T M) e - s^T M B \xi + s^T M B v \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(A_s) \|e\|^2 - s^T M B \xi + s^T M B v \leq \\ &\leq \|s\| \|M B\| \|\xi\| - (\rho \|s\| \|M B\| + \eta(2^{-1})^\beta \|s\|^{2\beta}). \end{aligned}$$

由式(3)和(7)可知, 设计参数 $\rho \geq \|\xi\|$. 因此

$$\dot{V} \leq -\eta 2^{-\beta} \|s\|^{2\beta} \leq -\eta V^\beta, \forall t \geq 0, V(0) \geq 0.$$

根据文献[7], 偏差系统(5)将在有限时间 t_r 内到达滑模面 $s = 0$, t_r 为

$$t_r = [\eta(1 - \beta)]^{-1} V^{1-\beta}(0).$$

当偏差系统(5)到达滑模面 $s = 0$ 后, 系统(5)的动态性能由线性滑模(6)决定. 由式(10)得 $s = M_1 e_1 + M_2 e_2 = 0$, 即 $e_2 = -M_2^{-1} M_1 e_1$, 代入偏差系统(9), 得到滑模上降阶后的系统方程:

$$\dot{e}_1(t) = (A_{011} - A_{012} M_2^{-1} M_1) e_1(t) = A_M e_1. \quad (13)$$

设计滑模的参数矩阵 M 保证 A_M 为Hurwitz矩阵, 系统(13)渐近稳定, 即偏差系统(5)到达滑模 $s = 0$ 以后将渐近收敛到平衡点 $e = 0$. 收敛的速度由 A_M 的特征值确定. 因此, 本文提出的鲁棒滑模观测器(4)对系统(1)中的非线性不确定性部分具有鲁棒性, 可以渐近估计出系统(1)的状态.

3 仿真实例(Simulation)

3.1 仿真实例1(Simulation 1)

考虑如式(1)的三阶系统, 系统矩阵为: $A = [-1, -1, 0; 0, -2, -1; 0, 0, -3]$, $B = [-1, 0; 0, 1; 0, 0]$, $C = [0, 1, -1; 1, 0, 0]$, 控制输入 $u = 0$, 非线性项 $f(t, x, u)$ 满足匹配条件, 非线性函数 $\xi = [0.2 \sin(2\pi t), 0.5 \cos(2\pi t)]$. 系统和观测器的初值分别为: $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 0.3$, $x_3(0) = 1$; $\hat{x}_1(0) = 0$, $\hat{x}_2(0) = 0$, $\hat{x}_3(0) = 0.2$.

1) 鲁棒滑模观测器设计.

根据定理1, 选择矩阵 A_0 为Hurwitz矩阵, 特征值为 $\{-2, -2, -2\}$, 则矩阵 $G = [1, 0; 0, 3; -7, 0]$, 参数矩阵 F 设计为 $F = [2, 1; 1, 0]$, 求得 $\lambda_{\max}(A_s) = 0$, 满足定理1的设计条件. 因此求得滑模面为:

$$s_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3; s_2 = e_2 - e_3.$$

2) 与Walcott-Zak观测器设计方法的比较.

为了说明文中所提出的鲁棒滑模观测器设计的特点, 利用1)中鲁棒滑模观测器的参数矩阵 G 和 F , 与采用Walcott-Zak观测器设计方法进行比较. 根据文献[2]的Walcott-Zak观测器设计步骤:

第1步 为了进行比较, 矩阵 A_0 的谱同样选择为 $\{-2, -2, -2\}$, 计算相应的矩阵 $G = [1, 0; 0, 3; -7, 0]$, 可见 G 与1)中鲁棒滑模观测器的设计值相同.

第2步 下面设计 F 的各个分量, 并保证满足Walcott-Zak观测器的设计条件. 令 $F = [f_{11}, f_{12}; f_{21}, f_{22}]$, $P = [p_{11}, p_{12}, p_{13}; p_{21}, p_{22}, p_{23}; p_{31}, p_{32}, p_{33}]$, 根据Walcott-Zak观测器设计条件“ $C^T F^T = PB$ ”, 用 F 的分量表示 P 如下: $P = [f_{12}, f_{22}, f_{11}; f_{11}, f_{21},$

$-f_{21}; -f_{11}, -f_{21}, p_{33}]$, 将1)中 F 值带入, 求得 $p_{11} = 1, p_{12} = 0, p_{21} = 2, p_{22} = 1, p_{31} = -2, p_{32} = -1$, 显然 $p_{12} \neq p_{21}$, 不能满足Walcott-Zak观测器另一个设计条件: “ P 对称”, 因此Walcott-Zak观测器不能用上述鲁棒滑模观测器的设计参数对本系统进行设计. 即Walcott-Zak观测器的参数矩阵选择需严格满足引言中提到的设计条件.

由设计过程可见, Walcott-Zak鲁棒观测器设计方法需要的计算量大, 当系统阶数高时, 难以实现. 本文提出的鲁棒滑模观测器简化了设计过程, 而且不需满足严格的设计条件. 这也是本文与Walcott-Zak鲁棒观测器设计方法的本质区别.

采用本文提出滑模观测器对系统进行仿真, 结果如图2、图3所示. 图2为系统状态与滑模观测器估计值之间的偏差, 图3为滑模观测器的控制输入.

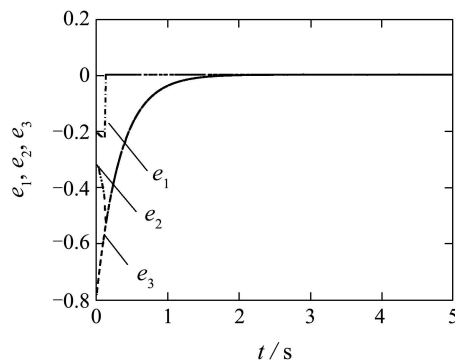


图2 观测误差 e_1, e_2, e_3

Fig. 2 Observe error e_1, e_2, e_3

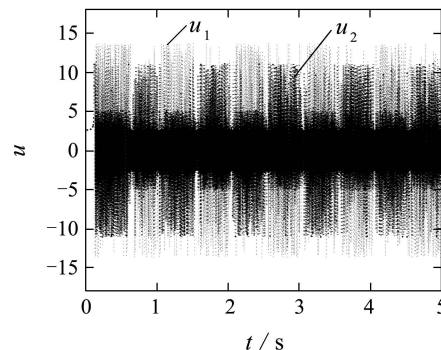


图3 观测器控制输入 u_1, u_2

Fig. 3 Observer control input u_1, u_2

3.2 仿真实例2(Simulation 2)

考虑Genesio混沌系统: $A = [0, 1, 1; 0, 0, 1; -1.1, -1, -0.44]$, $B = [0; 0; 1]$, 非线性函数 $\xi = 0.2 \sin(2\pi t) + x_1^2$. 系统和观测器的初值为: $x_1(0) = -0.3$, $x_2(0) = -0.5$, $x_3(0) = 0.6$; $\hat{x}_1(0) = 1.6$, $\hat{x}_2(0) = 2$, $\hat{x}_3(0) = 1.2$. 系统的输出矩阵设计为 $C = [0, 1, 1.1]$, 根据定理1选择矩阵 A_0 的特征值为 $\{-10, -1, -3\}$, 求得 $G = [-36.0547; 8.8927; 4.2430]$, 考虑鲁

棒状态滑模观测器(5), 参数矩阵 F 设计为 $F = 0.01$. 求得 $\lambda_{\max}(A_s) = 0$, 满足定理1的设计条件. 因此滑模面 $s = 0.01(e_1 + e_2)$. 仿真结果如图4~6所示.

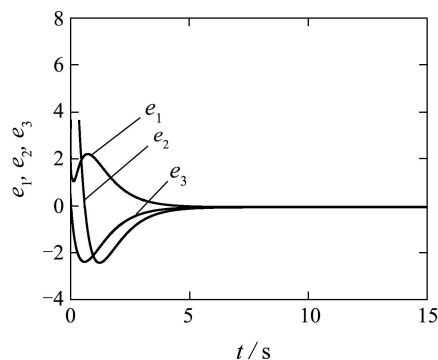


图4 观测误差 e_1, e_2, e_3

Fig. 4 Observe error e_1, e_2, e_3

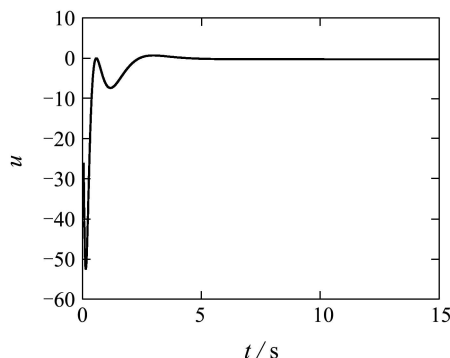


图5 观测器控制输入 u

Fig. 5 Observer control input u

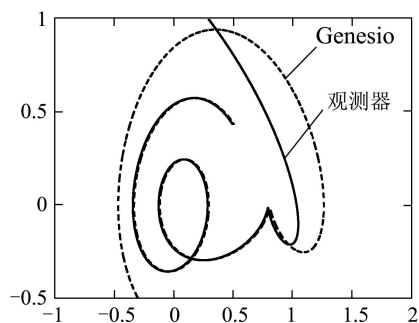


图6 $x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2$ 的相图

Fig. 6 Phase trajectory of $x_1, \hat{x}_1, x_2, \hat{x}_2$

4 结论(Conclusion)

本文提出了一种鲁棒滑模状态观测器, 通过滑模与相应的控制策略来设计观测器. 保证对系统的非线性/不确定性具有鲁棒性, 观测器的参数选取不需要求解大量方程, 只需要配置误差系统特征值, 简化了设计过程. 通过设计滑模, 可以调整观测器跟踪系统状态的收敛速度, 使状态估计达到预期的指标. 仿真结果验证了提出方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] LUENBERGER D G. An introduction to observers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1971, 16(6): 596 – 602.
- [2] WALCOTT B L, ZAKS H. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(2): 166 – 170.
- [3] WALCOTT B L, CORLESS M J, ZAK S H. Comparative study of non-linear state-observation techniques[J]. *Int J of Control*, 1987, 45(6): 2109 – 2132.
- [4] WALCOTT B L, ZAK S H. Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications[J]. *IEEE Trans on Systems Man and Cybernetics*, 1988, 18(1): 88 – 104.
- [5] CHRISTOPHER E, SARAH K S. *Random Process*[M]. UK: Taylor and Francis Ltd, 1998: 127 – 154.
- [6] 向峥嵘, 吴晓蓓, 陈庆伟. 非线性MIMO系统的降维状态观测器[J]. *控制理论与应用*, 2000, 17(1): 89 – 95.
(XIANG Zhengrong, WU Xiaolei, CHEN Qingwei. Reduced-order state observer for MIMO nonlinear[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 89 – 95.)
- [7] TANG Y. Terminal sliding mode control for rigid robots[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 51 – 56.

作者简介:

张袅娜 (1972—), 女, 副教授, 目前研究方向为非线性系统控制, E-mail: zhangniaona@163.com;

冯 勇 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为变结构控制、鲁棒控制等, E-mail: yfeng@hope.hit.edu.cn;

邱 东 (1969—), 男, 副教授, 目前研究方向为故障诊断, E-mail: qiudong@mail.ccut.edu.cn.