第 24 卷第 5 期 控 制 理 论 与 应 用 Vol. 24 No. 5
2007 年 10 月 Control Theory & Applications Oct. 2007

文章编号：1000−8152(2007)05−0725−07

基于观测器的受扰非线性系统近似最优跟踪控制

唐功友[1], 高德欣[2], 张宝琳[3]

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 青岛科技大学 自动化与电子工程学院, 山东 青岛 266042;

3. 中国计量学院 数学与信息科学系, 浙江 杭州 310018)

摘要: 研究一类受扰非线性系统的最优输出跟踪控制问题. 给出了有限时域最优输出跟踪控制律的近似设计算法. 首先将求解受扰非线性系统最优跟踪控制问题转换为求解状态向量与伴随向量耦合的非线性两点边值问题, 然后利用逐次逼近方法构造序列将其转化为求解两个解耦的线性微分方程序列问题. 通过迭代求解伴随向量的序列, 可得到由解析的线性前馈-反馈控制部分和伴随向量的极限形式的非线性补偿部分组成的最优输出跟踪控制律. 利用参考输入降维观测器和扰动降维观测器, 解决了前馈控制的物理可实现问题. 最后仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 扰动; 最优控制; 输出跟踪控制; 降维观测器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

An observer-based approximate optimal tracking control for nonlinear systems with persistent disturbances

TANG Gong-you[1], GAO De-xin[2], ZHANG Bao-lin[3]

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;
2. College of Automation and Electronic engineer, Qingdao University of Science & Technology , Qingdao Shandong 266042, China;
3. Department of Information and Mathematics Sciences, China Jiliang University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: The optimal output tracking control (OOTC) problem for a class of nonlinear systems with persistent disturbances is considered. An approximate design algorithm of the OOTC law is presented in the finite time domain. Firstly, the two-point boundary value (TPBV) problem, which is derived from the original OOTC theory, is transformed to a coupled nonlinear TPBV problem in state vectors and adjoint vectors. The coupled TPBV problem is further transformed to two decoupled linear differential sequences via a recently developed successive approximation approach (SAA). By iteratively solving the adjoint vector sequence, the OOTC law can be obtained, which consists of analytic linear feedforward and feedback terms, as well as a nonlinear compensation term determined by the limit of the adjoint vector sequence. Furthermore, a reduced-order reference input observer and a reduced-order disturbance observer are constructed in order to solve the physically realizable problem of feedforward control. Finally, simulation examples show the effectiveness of the presented approach.

Key words: nonlinear systems; disturbances; optimal control; output tracking control; reduced-order observer

1 引言 (Introduction)

受扰系统的跟踪控制问题有很广泛的应用背景, 例如: 飞行目标跟踪控制系统[1], 轮船的自动驾驶系统等[2], 机器人的作业机械手臂的轨迹指令跟踪控制[3]等等. 这些系统在实际运行中或多或少都会受到各种复杂的干扰影响. 因此, 研究外部扰动作用下系统的最优跟踪控制问题有重要的理论及应用价值.

对非线性系统的最优控制, 根据极大值原理会导致求解一个Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程或非线性两点边值问题. 除非很特殊的情形外, 该类问题的解析解往往是不存在的, 所以其近似解法受到人们的重视. 目前, 在非线性系统的最优控制方面, 常见的近似设计方法大致可以概括为4类. 第1类方法是求解HJB方程的Galerkin逐次逼近法[4], 该方法利用迭代过程寻求逼近HJB方程解的序列, 由于HJB方程是一个非线性矩阵微分方程, 变为迭代形式后, 对n阶系统而言将要迭代n阶微分方程组, 计算量大; 第2类方法是求解非线性HJB方程的级数展开法[5,6], 该方法利用级数展开或利用所谓Adomian分解将非线性项进行分解, 由此寻求HJB方程的灵敏度解; 第3类是求解状态依赖的Riccati方程(state de-

收稿日期: 2005−05−30; 收修改稿日期: 2006−06−13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574023); 山东省自然科学重点基金资助项目(Z2005G01); 青岛市自然科学基金项目(05-1-JC-94).

pendent Riccati equation, SDRE)迭代解法[7,8]; 第4类方法是一类开环最优控制的近似方法, 包括准线性化方法、梯度法等迭代方法[9,10]. 近年来, 唐功友等[11~17]提出了一种基于向量微分方程迭代的逐次逼近方法. 该方法将系统的非线性项视为系统的扰动. 通过引进伴随向量, 将最优控制问题转化为求解线性非齐次两点边值问题族. 得到的最优控制律由状态反馈精确项和伴随向量的极限补偿项组成, 其中精确项通过求解Riccati方程和矩阵方程组直接得到, 极限补偿项经由逐次逼近方法求解伴随向量方程得到. 该方法每次迭代仅求解一个n阶微分方程, 避开了Galerkin逐次逼近法直接迭代HJB方程的困难. 该方法与Galerkin逐次逼近法相比计算量小, 易于实现. 另外由于最优控制律中的线性部分是精确值, 所以该方法与Galerkin逐次逼近法相比可以提高收敛速度和迭代精度.

本文的目的是讨论具有有限时域二次型性能指标的一类受扰动非线性系统的最优跟踪控制问题. 对受扰非线性系统的最优跟踪控制, 根据极大值原理会导致求解一个非齐次HJB方程或非线性的非齐次两点边值问题. 本文利用逐次逼近方法[11~17]提出一种近似最优跟踪控制律的设计过程.

2 问题描述(Problem statement)

考虑受扰动非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+f(x)+Dv(t), t>0,\\ x(0)=x_0,\\ y(t)=Cx(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$为状态向量, $u\in\mathbb{R}^r$为控制向量, $v\in\mathbb{R}^p$为外部干扰向量, $y\in\mathbb{R}^m$为输出向量, $f(x)$为非线性项, A,B,C和D 为适当维数的常量矩阵.

假设 1 $f(0)=0$且$f(x)$满足Lipschitz条件

$$\|f(x)-f(\hat{x})\|\leqslant\alpha\|x-\hat{x}\|,\ \forall x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

其中α为正常数.

假设 2 外部扰动v的动态特性由下面外系统(Exosystem)描述:

$$\begin{cases}\dot{w}(t)=Gw(t),\\ v(t)=Mw(t).\end{cases} \tag{3}$$

其中: $w\in\mathbb{R}^r$, G 和M为适当维数的常量矩阵, 且rank $M=p$, (G,M)完全可观测.

假设 3 系统(1)的期望输出$\bar{y}$由下面外系统描述:

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=Fz(t),\\ \bar{y}(t)=Hz(t).\end{cases} \tag{4}$$

其中: $z\in\mathbb{R}^q$, $\bar{y}\in\mathbb{R}^m$, F 和H为适当维数的常量矩阵, 且rank $H=m$, (F,H)完全可观测.

选取有限时域的二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\{e^{\mathrm{T}}(t_f)Q_fe(t_f)+\int_0^{t_f}[e^{\mathrm{T}}(t)Qe(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t\}. \tag{5}$$

其中: Q_f,Q和R为适当维数的正定矩阵, $e(t)$为系统的输出误差, 即

$$e(t)=\bar{y}(t)-y(t). \tag{6}$$

最优跟踪控制问题就是寻找最优跟踪控制律$u^*(t)$, 使J取得极小值.

3 主要结果 (Main results)

3.1 两点边值问题的简化(Simplification of TPBV problem)

根据极大值原理得到的最优跟踪控制的必要条件知, 系统(1)和(4)关于性能指标(5)的最优跟踪控制问题导致求解如下两点边值问题:

$$\begin{cases}-\dot{\lambda}(t)=C^{\mathrm{T}}QCx(t)-C^{\mathrm{T}}QHz(t)+A^{\mathrm{T}}\lambda(t)+\\ \qquad f_x^{\mathrm{T}}(x)\lambda(t), 0\leqslant t<t_f,\\ \dot{x}(t)=Ax(t)-S\lambda(t)+f(x)+Dv(t), 0<t\leqslant t_f,\\ \lambda(t_f)=C^{\mathrm{T}}Q_fCx(t_f)-C^{\mathrm{T}}Q_fHz(t_f),\\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{7}$$

其最优跟踪控制律为

$$u(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t). \tag{8}$$

其中:

$$S=BR^{-1}B^{\mathrm{T}}, f_x^{\mathrm{T}}(x)=\frac{\partial f^{\mathrm{T}}(x)}{\partial x}.$$

为了从非线性两点边值问题(7)分离出线性部分, 以求解该问题的近似数值解, 令

$$\lambda(t)=P(t)x(t)+P_1(t)z(t)+P_2(t)v(t)+g(t). \tag{9}$$

其中$g(t)$为伴随向量, 作用是补偿非线性对系统(1)的影响. 对式(9)等号两边分别求导数, 并令$\bar{P}(t)=P_2(t)M$, 将式(7)中第2式代入, 并与式(7)中第1式比较系数可得Riccati矩阵微分方程

$$\begin{cases}-\dot{P}(t)=A^{\mathrm{T}}P(t)+P(t)A-P(t)SP(t)+C^{\mathrm{T}}QC,\\ P(t_f)=C^{\mathrm{T}}Q_fC.\end{cases} \tag{10}$$

矩阵微分方程

$$\begin{cases}-\dot{P}_1(t)=P_1(t)F-P(t)SP_1(t)-\\ \qquad C^{\mathrm{T}}QH+A^{\mathrm{T}}P_1(t),\\ P_1(t_f)=-C^{\mathrm{T}}Q_fH,\end{cases} \tag{11}$$

和

$$\begin{cases}-\dot{\bar{P}}(t)=\bar{P}(t)G-P(t)S\bar{P}(t)+\\ \qquad P(t)DM+A^{\mathrm{T}}\bar{P}(t),\\ \bar{P}(t_f)=0,\end{cases}\tag{12}$$

以及伴随向量微分方程

$$\begin{cases}-\dot{g}(t)=[A-SP(t)]^{\mathrm{T}}g(t)\ +P(t)f(x)+\\ \qquad f_x^{\mathrm{T}}(x)[P(t)x(t)+P_1(t)z(t)+\\ \qquad \bar{P}(t)w(t)+g(t)],\\ g(t_f)=0.\end{cases}\tag{13}$$

将(9)代入(7)的第2式, 可得系统(1)的闭环系统形式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=[A-SP(t)]x(t)+[DM-S\bar{P}(t)]w(t)-\\ \qquad SP_1(t)z(t)-Sg(t)+f(x),\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{14}$$

方程(10)是关于$P(t)$的Riccati矩阵微分方程, 有唯一的半正定解. 将$P(t)$代入矩阵微分方程(11)(12)可唯一的解出$P_1(t)$ 与$\bar{P}(t)$. 将式(9)代入式(8)可得最优跟踪控制律为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P(t)x(t)+P_1(t)z(t)+\\ \bar{P}(t)w(t)+g(t)].\tag{15}$$

因此, 通过引入$\lambda(t)$, 两点边值问题(7)被转换为新形式的两点边值问题(13). 虽然问题的形式发生改变, 由于(13)和(14)在变量$x(t)$和$g(t)$上是互相耦合的, 在求解上仍然是很困难的. 但是变换后的两点边值问题有利于引入逐次逼近方法求解最优控制问题.

3.2 预备引理(Preliminary lemmas)

考虑受扰动非线性系统

$$\begin{cases}\dot{z}(t)=G(t)z(t)+h(z(t),t)+Fv(t),\\ z(t_1)=\eta.\end{cases}\tag{16}$$

其中: $z\in\mathbb{R}^n$为状态向量, $v\in\mathbb{R}^m$ 为输入向量, $h:C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_T)\to U$, $h(0,t)\equiv 0$, $G:C^1(R_T)\to\mathbb{R}^{n\times n}$, F为适当维数常量矩阵, η为初始值($t_1=t_0$)或终端值($t_1=t_f$), $R_T=[t_0,\ t_f]$. 假设h 满足Lipschitz条件.

引理 1　定义向量函数序列$\{z^{(k)}(t)\}$ 为

$$\begin{cases}z^{(0)}(t)=\varPhi(t,t_1)\eta+\int_{t_1}^{t}\varPhi(t,r)Fv(r)\mathrm{d}r,\\ z^{(k)}(t)=\varPhi(t,t_1)\eta+\int_{t_1}^{t}\{\varPhi(t,r)[Fv(r)+\\ \qquad h(z^{(k-1)}(r),r)]\}\mathrm{d}r,\\ k=1,\ 2,\cdots,\quad t\in\mathbb{R}_T,\end{cases}\tag{17}$$

其中$\varPhi(t,t_1)$是系统(16)对应于矩阵$G(t)$ 的状态转移矩阵, 则当$t_1=t_0$ 时, 函数向量序列$\{z^{(k)}(t)\}$ 一致收敛于系统(16)的解.

证　将$\{z^{(k)}(t)\}$视为$C^N(\mathbb{R}_T)$ 的一个序列, 由式(17)得

$$z^{(1)}(t)-z^{(0)}(t)=\int_{t_0}^{t}\varPhi(t,r)h(z^{(0)}(r),r)\mathrm{d}r.\tag{18}$$

由于h满足Lipschitz条件, 所以有

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_T}\|\varPhi(t,t_f)\|=M,\|\eta\|=\gamma,\\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_T}\|h(z,t)\|\leqslant\alpha\|z\|,z\in U,\\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_T}\|h(z,t)-h(\hat{z},t)\|\leqslant\beta\|z-\hat{z}\|,z,\hat{z}\in U,\end{cases}\tag{19}$$

其中M,γ, α ,和β是正常数.

由$\|\varPhi(t_0,t_0)\|=\|I\|=1$, 可知$M\geqslant 1$. 又由式(18)得

$$\left\|z^{(1)}(t)-z^{(0)}(t)\right\|\leqslant M\alpha\int_{t_0}^{t}\left\|z^{(0)}(r)\right\|\mathrm{d}r\leqslant\\ M^2\alpha\gamma(t-t_0).\tag{20}$$

又由式(17)得

$$z^{(2)}(t)-z^{(1)}(t)=\\ \int_{t_0}^{t}\varPhi(t,r)[h(z^{(1)}(r),r)-h(z^{(0)}(r),r)]\mathrm{d}r.\tag{21}$$

从而有

$$\left\|z^{(2)}(t)-z^{(1)}(t)\right\|\leqslant\\ M\int_{t_0}^{t}\left\|h(z^{(1)}(r),r)-h(z^{(0)}(r),r)\right\|\mathrm{d}r\leqslant\\ \beta M\int_{t_0}^{t}\left\|z^{(1)}(r)-z^{(0)}(r)\right\|\mathrm{d}r\leqslant\\ \frac{1}{2!}\alpha\beta\gamma M^3(t-t_0)^2.\tag{22}$$

依次类推可得

$$\left\|z^{(k)}(t)-z^{(k-1)}(t)\right\|\leqslant\alpha\beta^{k-1}\gamma M^{k+1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}.\tag{23}$$

由三角不等式知, 对任意的j 和k 有

$$\left\|z^{(k)}(t)-z^{(k-j)}(t)\right\|\leqslant\\ \sum_{i=k+1}^{k+j}\alpha\beta^{i-1}\gamma M^{i+1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\leqslant\\ \frac{\alpha\gamma\beta^kM^{k+2}(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^{(\beta M(t-t_0))},\\ t\in\mathbb{R}_T,k=1,2,\cdots.\tag{24}$$

注意到式(24)满足

$$\lim_{k\to\infty}\left\|z^{(k)}(t)-z^{(k-j)}(t)\right\|=0,\ \forall j>0.\tag{25}$$

所以$\{z^{(k)}(t)\}$ 是$C^N(R_T)$ 中的Cauchy序列, 即这个序列是一致收敛的. 因j是任意的, 故该序列的极限是系统(16)的解.

证毕.

引理 2 定义向量函数序列$\{z^{(k)}(t)\}$为

$$\begin{cases} z^{(0)}(t)=\varPhi(t,t_f)\eta+\int_{t_f}^{t}\varPhi(t,r)Fv(r)\mathrm{d}r,\\ z^{(k)}(t)=\varPhi(t,t_f)\eta+\int_{t_f}^{t}\{\varPhi(t,r)[Fv(r)+\\ \qquad h(z^{(k-1)}(r),r)]\}\mathrm{d}r,\\ k=1,\ 2,\cdots,t\in\mathbb{R}_T. \end{cases} \tag{26}$$

则当$t_1=t_f$时, 函数向量序列$\left\{z^{(k)}(t)\right\}$一致收敛于系统(16)的解.

引理2证明同引理1, 此处证略.

3.3 最优输出跟踪控制律设计(Design of the OOTC law)

关于由系统(1)和(4)描述的系统关于性能指标(5)的最优跟踪控制问题, 给出如下结果:

定理 1 系统(1)和(4)关于性能指标(5)的最优跟踪控制律由下式确定:

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P(t)x(t)+P_1(t)z(t)+\\ \bar{P}(t)w(t)+g^{(\infty)}(t)]. \tag{27}$$

其中: $P(t)$是矩阵微分方程(10)的唯一半正定解, $P_1(t)$和$\bar{P}(t)$是矩阵微分方程(11)和(12)的唯一解, $g^{(\infty)}(t)=\lim\limits_{k\to\infty}g^{(k)}(t)$, 伴随向量$g^{(k)}(t)$为如下积分序列的解:

$$\begin{cases} g^{(0)}(t)=-\int_{t}^{\infty}\varPhi^{\mathrm{T}}(t,r)f_x^{\mathrm{T}}(0)\left[P_1(r)z(r)+\right.\\ \qquad \left.\bar{P}(r)w(r)\right]\mathrm{d}r,\\ g^{(0)}(t_f)=0,\\ g^{(k)}(t)=-\int_{t}^{\infty}\varPhi^{\mathrm{T}}(t,r)\left\{P(r)f(x^{(k-1)}(r))+\right.\\ \qquad f_x^{\mathrm{T}}(x^{(k-1)}(r))[P(r)x^{(k-1)}(r)+\\ \qquad \left.P_1(r)z(r)+\bar{P}(r)w(r)+g^{(k-1)}(r)]\right\}\mathrm{d}r,\\ g^{(k)}(t_f)=0,k=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{28}$$

其中$x^{(k)}(t)$满足

$$\begin{cases} x^{(0)}(t)=\varPhi(t,0)x_0+\int_{0}^{t}\varPhi(t,r)\left\{[DM-S\bar{P}(r)]\times\right.\\ \qquad \left.w(r)-SP_1(r)z(r)-Sg^{(0)}(r)\right\}\mathrm{d}r,\\ x^{(0)}(0)=x_0,\\ x^{(k)}(t)=\varPhi(t,0)x_0+\int_{0}^{t}\varPhi(t,r)\left\{[DM-S\bar{P}(r)]\times\right.\\ \qquad w(r)-SP_1(r)z(r)-Sg^{(k)}(r)+\\ \qquad \left.f(x^{(k-1)}(r))\right\}\mathrm{d}r,\\ x^{(k)}(0)=x_0,k=1,\ 2,\cdots. \end{cases} \tag{29}$$

这里$\varPhi(t,r)$为矩阵$A-SP(t)$的状态转移矩阵.

证 为求解由式(13)和式(14)确定的两点边值问题, 根据两式构造下列伴随向量微分方程序列

$$\begin{cases} -g^{(0)}(t)=[A-SP(t)]^{\mathrm{T}}g^{(0)}(t)+f_x^{\mathrm{T}}(0)\\ \qquad [P_1(t)z(t)+\bar{P}(t)w(t)],\\ -\dot{g}^{(k)}(t)=[A-SP(t)]^{\mathrm{T}}g^{(k)}(t)+P(t)f(x^{(k-1)})+\\ \qquad f_x^{\mathrm{T}}(x^{(k-1)}(t))[P(t)x^{(k-1)}(t)+\\ \qquad P_1(t)z(t)+\bar{P}(t)w(t)+g^{(k-1)}(t)],\\ g^{(k)}(t_f)=0,k=1,2,\cdots; \end{cases} \tag{30}$$

状态方程序列

$$\begin{cases} x^{(0)}(t)=[A-SP(t)]x^{(0)}(t)+[DM-S\bar{P}(t)]\\ \qquad w(t)-SP_1t)z(t)\ -Sg^{(0)}(t),\\ \dot{x}^{(k)}(t)=[A-SP(t)]x^{(k)}(t)+[DM-S\bar{P}(t)]\\ \qquad w(t)-SP_1(t)z(t)-Sg^{(k)}(t)+f(x^{(k-1)}),\\ x^{(k)}(0)=x_0,k=1,2,\cdots; \end{cases} \tag{31}$$

及相应的控制序列

$$u^{(k)}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P(t)x^{(k)}(t)+P_1(t)z(t)+\\ \bar{P}(t)w(t)+g^{(k)}(t)]. \tag{32}$$

分别求解微分方程(30)(31), 可得积分方程序列(28)(29). 注意到k在序列(30) (31)和(32)中意义与引理1与引理2中意义相同. 很明显, 由于$g^{(0)}(t)$已知, 可以解得$x^{(0)}(t)$, 而积分方程序列(28)与(29)是一个迭代求解过程, 当$k\geqslant 1$必定可以交替解得$g^{(k)}(t)$与$x^{(k)}(t)$的值, 进而对第k次优化问题, 可以求得$u^{(k)}(t)$的值.

现在证明控制序列$\left\{u^{(k)}(t)\right\}$的收敛性. 为方便讨论迭代逐次求解收敛性, 分别将$\left\{x^{(k)}(t)\right\}$和$\left\{g^{(k)}(t)\right\}$视为$C^N[0,t_f]$一个序列. 根据引理1与引理2, 积分方程序列(28)和(29)的解序列$\left\{g^{(k)}(t)\right\}$和$\left\{x^{(k)}(t)\right\}$是一致收敛的, 即

$$\lim_{k\to\infty}g^{(k)}(t)=g(t),\lim_{k\to\infty}x^{(k)}(t)=x(t). \tag{33}$$

由式(32)知序列$\left\{u^{(k)}(t)\right\}$是与$\left\{x^{(k)}(t)\right\}$和$\left\{g^{(k)}(t)\right\}$相关的, 所以它也是一致收敛的. 注意到当$k\to\infty$时, 状态向量序列$\left\{x^{(k)}(t)\right\}$的极限$x^*(t)$即为最优状态轨线, 所以控制向量序列$\left\{u^{(k)}(t)\right\}$的极限$u^*(t)$即为最优跟踪控制律(27).

最后证明$u^*(t)$的唯一性. 由于$u^*(t)$的唯一性由$P(t)$, $P_1(t)$与$\bar{P}(t)$唯一确定的, 所以只需证明(10)(11)和(12)有唯一解即可. 因为(10)是矩阵微分方程, 由线性系统最优控制理论知, Riccati方程(10)有唯一半正定解$P(t)$. 又因为$P(t)$为已知的半正定时变矩阵, 显然(11)与(12)满足Lipschitz条件, 故矩阵微分方程(11)和(12)必定分别有唯一解$P_1(t)$和$\bar{P}(t)$. 定理1证毕.

注 1 在实际系统最优跟踪控制律的设计中, 伴随方程解序列$\{g^{(k)}(t)\}$ 的极限$g^{(\infty)}(t)$ 一般是无法精确求出的, 通常可通过伴随方程的第k 次迭代值来近似其精确解, 从而得到第k 阶次优跟踪控制律

$$u_k(t)=-R^{-1}B^{\mathrm T}[P(t)x(t)+P_1(t)z(t)+\bar P(t)w(t)+g^{(k)}(t)]. \tag{34}$$

注 2 式(33)中的第1项的$x(t)$是状态向量的精确解, 所以式(34)中的次优跟踪控制律$u_k(t)$要优于式(32)定义的第k阶跟踪控制律$u^{(k)}(t)$.

在实际应用中, 可以根据具体工艺控制精度要求确定k 的取值. 下面根据性能指标的相对精度标准给出一种迭代求解有限时域k阶近似最优跟踪控制律的实用算法.

算法 1

1) 由式(4)求出期望输出$\bar y(t)$, 分别由式(10)～(12)求出$P(t)$, $P_1(t)$与$\bar P(t)$, 令$k=0$, J_{-1}取一充分大的正数, $\sigma>0$;

2) 由式(28)求出$g^{(k)}(t)$, 并代入式(34)求出$u_k(t)$, 进一步由式(1)得到系统输出, 然后由式(6)求出$e(t)$;

3) 令$M=k$, 根据

$$J_M=\frac12\{e^{\mathrm T}(t_f)Q_fe(t_f)+\int_0^{t_f}[e^{\mathrm T}(t)Qe(t)+u_M^{\mathrm T}(t)Ru_M(t)]\mathrm dt\}. \tag{35}$$

求出J_M;

4) 如果

$$|(J_M-J_{M-1})/J_M|<\sigma \tag{36}$$

成立, 则停止计算, 输出控制律$u_M(t)$;

5) 否则, 由(29)求出$x^{(k)}(t)$, 令$k=k+1$, 转至2).

3.4 控制律的物理可实现问题(Physically realizable problem of the control law)

由于最优跟踪控制律(27)中的$w(t)$和$z(t)$分别是外系统(3)和(4)的状态向量, 所以最优跟踪控制律(27)中的前馈部分$\{-R^{-1}B^{\mathrm T}[P_1(t)z(t)+\bar P(t)w(t)]\}$ 是物理不可实现的. 在本节中, 通过构造参考输入降维观测器和扰动降维观测器分别对$w(t)$和$z(t)$进行重构, 从而得到动态输出跟踪控制律.

笔者知道对于外系统动态特性方程(3)和(4)中的满秩矩阵M和H, 必存在常量矩阵$N\in\mathbb R^{(r-p)\times r}$和$L\in\mathbb R^{(q-m)\times q}$, 使得矩阵$[M^{\mathrm T}\ \ N^{\mathrm T}]\in\mathbb R^{r\times r}$和$[H^{\mathrm T}\ L^{\mathrm T}]\in\mathbb R^{q\times q}$非奇异. 分别令

$$\begin{cases}O=[M\ \ N]^{-\mathrm T}=[O_1\ \ O_2],\\ O^{-1}GO=\begin{bmatrix}G_1 & G_{12}\\ G_{21} & G_2\end{bmatrix},\end{cases} \tag{37}$$

和

$$\begin{cases}T=[H\ \ L]^{-\mathrm T}=[T_1\ \ T_2],\\ T^{-1}FT=\begin{bmatrix}F_1 & F_{12}\\ F_{21} & F_2\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{38}$$

其中: $O_1\in\mathbb R^{r\times p}$, $O_2\in\mathbb R^{r\times(r-p)}$, $G_1\in\mathbb R^{p\times p}$, $G_{12}\in\mathbb R^{p\times(r-p)}$, $G_{21}\in\mathbb R^{(r-p)\times p}$, $G_2\in\mathbb R^{(r-p)\times(r-p)}$; $T_1\in\mathbb R^{q\times m}$, $T_2\in\mathbb R^{q\times(q-m)}$, $F_1\in\mathbb R^{m\times m}$, $F_{12}\in\mathbb R^{m\times(q-m)}$, $F_{21}\in\mathbb R^{(q-m)\times m}$和$F_2\in\mathbb R^{(q-m)\times(q-m)}$均为常量矩阵. 引入线性变换$w=O\bar w$和$z=T\bar z$, 并定义$\bar w^{\mathrm T}=[\bar w_1^{\mathrm T}\ \ \bar w_2^{\mathrm T}]$和$\bar z^{\mathrm T}=[\bar z_1^{\mathrm T}\ \ \bar z_2^{\mathrm T}]$, 且$\bar w_1\in\mathbb R^p$, $\bar w_2\in\mathbb R^{(r-p)}$, $\bar z_1\in\mathbb R^m$和$\bar z_2\in\mathbb R^{(q-m)}$, 则外系统动态特性方程(3)和(4)可表示为

$$\begin{cases}\dot{\bar w}_1(t)=G_1\bar w_1(t)+G_{12}\bar w_2(t),\\ \dot{\bar w}_2(t)=G_{21}\bar w_1(t)+G_2\bar w_2(t),\\ v(t)=\bar w_1(t)\end{cases} \tag{39}$$

和

$$\begin{cases}\dot{\bar z}_1(t)=F_1\bar z_1(t)+F_{12}\bar z_2(t),\\ \dot{\bar z}_2(t)=F_{21}\bar z_1(t)+F_2\bar z_2(t),\\ \bar y(t)=\bar z_1(t).\end{cases} \tag{40}$$

由式(39)(40)可知, $\bar w_1(t)$和$\bar z_1(t)$分别为$v(t)$和$\bar y(t)$. 因此现在只需构造关于$\bar w_2(t)$和$\bar z_2(t)$ 的观测器即可.

根据$MO=[I_p\ \ 0]$, $HT=[I_m\ \ 0]$, 及(G,M)和(F,H)能观测性容易证明, (G_2,G_{21}) 和(F_2,F_{12})能观测.

故可构造如下形式的Luenberger降维观测器

$$\begin{cases}\dot n(t)=\hat Gn(t)+\hat Mv(t),\\ \hat w_2(t)=n(t)+K_1v(t),\end{cases} \tag{41}$$

和

$$\begin{cases}\dot m(t)=\hat Fm(t)+\hat H\bar y(t),\\ \hat z_2(t)=m(t)+K_2\bar y(t),\end{cases} \tag{42}$$

其中: $n\in\mathbb R^{(r-p)}$, $m\in\mathbb R^{(q-m)}$分别为降维观测器的状态向量, $\hat w_2(t)$和$\hat z_2(t)$ 分别为$\bar w_2(t)$和$\bar z_2(t)$的观测值, $\hat G=G_2-K_1G_{12}$, $\hat M=G_2K_1-K_1G_{12}K_1+G_{21}-K_1G_1$, $\hat F=F_2-K_2F_{12}$, $\hat H=F_2K_2-K_2F_{12}K_2+F_{21}-K_2F_1$, K_1和K_2 为待定的系数矩阵.

为了保证降维观测器的收敛速度, 可通过选取适当K_1和K_2值, 使$G_2-K_1G_{12}$和$F_2-K_2F_{12}$的特征值位于指定点处. 由式(41)和式(42)可得到外系统动态特性方程(3)和(4)中$w(t)$和$z(t)$的观测值分别为

$$\hat w(t)=O_2n(t)+(O_1+O_2K_1)v(t), \tag{43}$$

$$\hat z(t)=T_2m(t)+(T_1+T_2K_2)\bar y(t). \tag{44}$$

则相应的带参考输入降维观测器和扰动降维观测器的动态跟踪控制律为

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = \hat{F}m(t) + \hat{H}\bar{y}(t), \\ \dot{n}(t) = \hat{G}n(t) + \hat{M}v(t), \\ u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P(t)x(t) + P_1(t)T_2m(t) + \\ \qquad P_1(t)(T_1+T_2K_1)\bar{y}(t) + \bar{P}(t)O_2n(t) + \\ \qquad \bar{P}(t)(O_1 + O_2K_1)v(t) + g^{(\infty)}(t)]. \end{cases} \tag{45}$$

注 3 由于动态跟踪控制律(45)中含有参考输入和扰动状态的观测方程, 所以不能保证具备最优输出跟踪控制律(27)的控制效果. 但是现在可以通过适当地选择观测器增益矩阵K_1和K_2 使的控制效果尽可能地接近最优跟踪控制.

4 仿真示例 (Simulation examples)

考虑由(1)描述的非线性系统, 其中:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{46}$$

外部扰动由外系统(3)描述, 其中:

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 0.8 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

参考输入外系统(4)的参数为

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

系统的性能指标(5)的参数为

$$Q_f = 1, Q = 5, R = 1, t_f = 10. \tag{49}$$

选取控制精度$\sigma = 0.01$. 当$|(J_k - J_{k-1})/J_k| < \sigma$时, 认为已获得满足精度要求的最优跟踪控制律, 系统仿真曲线如图1、图2所示.

由表1可看出$J_0 > J_2 > \cdots > J_8$, 即性能指标值随迭代次数增加而减小, 并趋于一个稳定的最优性能指标J^*. 从表1也可看出随着迭代次数增加, 性能指标相对误差逐渐减小. 当$k = 8$时, 满足控制精度要求, 因此可以把$u_8(t)$作为近似最优跟踪控制律.

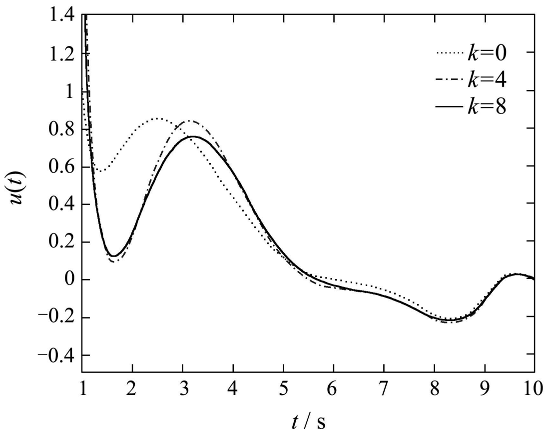

图 1 $u(t)$控制向量仿真比较曲线

Fig. 1 Simulation comparative curves of $u(t)$

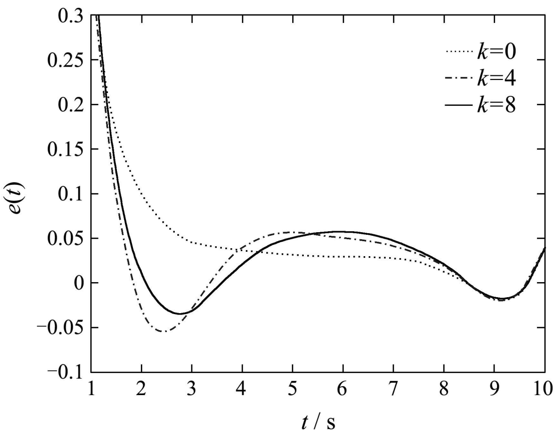

图 2 $e(t)$跟踪误差仿真比较曲线

Fig. 2 Simulation comparative curves of $e(t)$

表 1 各阶性能指标值及控制精度

Table 1 Performance index values and errors

迭代次数k	性能指标J_k	$\lvert(J_k - J_{k-1})/J_k\rvert$
0	96.2657	–
1	76.1005	0.0655
4	72.5054	0.0268
6	69.4447	0.0183
7	68.5784	0.0125
8	68.0342	0.0079

5 结论 (Conclusion)

本文讨论了受扰动非线性系统在有限时间二次型性能指标约束下的最优输出跟踪控制问题. 利用逐次逼近法设计了一种基于参考输入降维观测器和扰动降维观测器的动态跟踪近似最优控制律. 该方法避免了直接求解HJB方程问题, 与Galerkin逐次逼近法相比计算量小, 易于实现. 用该方法得到的最优控制律中线性部分是精确值, 而在迭代中只需迭代非线性项, 所以可以提高收敛速度和迭代精度.

参考文献(References):

[1] SHARMA R, TEWARI A. Optimal nonlinear tracking of spacecraft attitude maneuvers[J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2004, 12(5): 677 – 682.

[2] NO T S, MIN B M, STONE R H, et al. Control and simulation of arbitrary trajectory-tracking[J]. *Control Engineering Practice*, 2005, 13(5): 601 – 612.

[3] GRABBE M T, DAWSON D M. Application of optimal control theory to the trajectory tracking of rigid robot manipulators[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1994, 15(4): 237 – 249.

[4] BEARD R W, SARIDIS G N, WEN J T. Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. *Automatica*, 1997, 33(12): 2159 – 2177.

[5] KURINA G A. Asymptotic expansion of solutions of optimal control problems for discrete weakly controllable systems[J]. *J of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 66(2): 201 – 213.

[6] GARRARD W L, ENNS D F, SNELL S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft[J]. *Int J of Control*, 1992, 56(4): 799 – 812.

[7] MCCAFFREY D, BANKS S P. Lagrangian manifolds and asymptotically optimal stabilizing feedback control[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(3): 219 – 224.

[8] COSTANZA V, NEUMAN C E. Flexible operation through optimal tracking in nonlinear processes[J]. *Chemical Engineering Science*, 2000, 55(16): 3113 – 3122.

[9] MARKMAN J, KATZ I N. An iterative algorithm for solving Hamilton-Jacobi type equations[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2000, 22(1): 312 – 329.

[10] MARKMAN J, KATZ I N. Cpnvergence of an iterative algorithm for solving Hamilton-Jacobi type equations[J]. *Mathematics of Computation*, 2002, 237(71): 77 – 103.

[11] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.

[12] TANG G Y, WANG H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153 – 161.

[13] TANG G Y, MA H, ZHANG B L. Successive-approximation approach of optimal control for bilinear discrete-time systems[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(6): 636 – 644.

[14] TANG G Y, SUN L. Optimal control for nonlinear interconnected large-scale systems: a successive approximation approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(2): 248 – 254.

[15] 唐功友, 高德欣. 带有持续扰动非线性系统的前馈-反馈最优控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 366 – 371.
(TANG Gongyou, GAO Dexin. Feedforward and feedback optimal control for nonlinear systems with persistent disturbances[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(4): 366 – 371.)

[16] 唐功友, 马慧, 张宝琳. 受扰线性离散系统的前馈-反馈最优控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 266 – 370.
(TANG Gongyou, MA Hui, ZHANG Baolin. Feedforward and feedback optimal control for discrete linear systems with disturbances[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(3): 266 – 370.)

[17] 唐功友, 刘鹏, 谢楠. 具有持续扰动的时滞系统前馈-反馈最优控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 505 – 515.
(TANG Gongyou, LIU Peng, XIE Nan. Feedforward and feedback optimal control for time-delay systems with persistent disturbances[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(5): 505 – 515.)

作者简介:

唐功友 (1953—), 男, 中国海洋大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统、时滞系统、网络控制系统及大系统理论与应用, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;

高德欣 (1978—), 男, 青岛科技大学自动化与电子工程学院讲师, 博士, 研究方向为非线性系统、计算机控制系统的分析与综合, E-mail: gaodexin@qust.edu.cn;

张宝琳 (1972—), 男, 中国计量学院 数学与信息科学系讲师, 博士, 研究方向为非线性系统、奇异摄动系统的分析与综合, E-mail: hiblzhang@gmail.com.