

分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计

薛定宇, 赵春娜

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 对于一些复杂的实际系统, 用分数阶微积分方程建模要比整数阶模型更简洁准确. 分数阶微积分也为描述动态过程提供了一个很好的工具. 对于分数阶模型需要提出相应的分数阶控制器来提高控制效果. 本文针对分数阶受控对象, 提出了一种分数阶 PID 控制器的设计方法. 并用具体实例演示了对于分数阶系统模型, 采用分数阶控制器比采用古典的 PID 控制器取得更好的效果.

关键词: 分数阶微积分; 分数阶系统; 分数阶控制器

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Fractional order PID controller design for fractional order system

XUE Ding-yü, ZHAO Chun-na

(Institute of Artificial Intelligence and Robotics, School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Fractional order calculus model could model various real materials more adequately than integer order ones and provides an excellent tool for the description of dynamical processes. These fractional order models need the corresponding fractional order controllers to be proposed. A fractional order PID controller design method is proposed for the fractional order system model in this paper. An example is also given to demonstrate the better response of fractional order PID controller in comparison with the classical PID controller.

Key words: fractional order calculus; fractional order system; fractional order controller

1 引言(Introduction)

分数阶微积分, 指微分、积分的阶次可以是任意的或者说是分数的, 它扩展了大家所熟知的整数阶微积分的描述能力. 在很多方面应用分数阶微积分的数学模型, 可以更准确地描述实际系统的动态响应. 分数阶微积分的数学模型, 可以提高对于动态系统的设计、表征和控制的能力.

分数阶微积分不仅为工程系统提供了新的数学工具, 而且对于复杂的, 成比例的动态系统提供了更完善的数学模型. 第1个应用分数阶微积分解决的工程问题是等时曲线问题^[1]. 1823 年, Abel 发现了一个微分方程的解, 这个微分方程包含了当时分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义. 然而, 分数阶微积分在工程中的应用仍旧受到限制, 因为分数阶微积分算子的不完整, 定义的不统一等. 直到19世纪中期 Liouville (1834)、Riemann (1847)、Grünwald (1867) 和 Letnikov (1868) 发展了分数阶微积分定义

的一般表达式. 然而这些定义在工程问题中的应用也经历了很长时间. 没有唯一的确切定义以及在几何运算中的不确切都引起很多问题, 这就降低了分数阶微积分在科学工程中被接收和应用的速度.

PID 控制是控制系统中应用最广泛、技术最成熟的控制方法. 由于其结构简单、鲁棒性强等特点, 被广泛地应用于冶金、电力和机械等工业过程中, 具有很强的生命力. 将分数阶控制理论和 PID 控制器整定理论相结合, 是一个很新的研究方向. 分数阶 PID 控制器由 I.Podlubny 教授提出^[2], 其一般格式简记为 $PI^\lambda D^\mu$. 由于引入了微分、积分阶次 λ 和 μ , 整个控制器多了两个可调参数, 所以控制器参数的整定范围变大, 控制器能够更灵活地控制受控对象, 可以期望得出更好的控制效果. 可以说, 分数阶 PID 控制器的出现是分数阶控制理论历史上的一个里程碑, 为分数阶控制理论的发展奠定了基础. 分数阶控制的意义就是对于古典的整数阶控制

的普遍化,它可以提供建立更多的模型,得到更鲁棒的控制结果.

近年来,分数阶控制器也越来越受到研究者的关注.文献[3]通过最小化积分平方误差给出了一种分数阶控制器.文献[4]给出了一些分数阶控制器的数值例子.文献[5]设计了一个 PI^α 控制器.文献[6]针对二惯性系统的速度控制提出了一个分数阶的 $PI^\alpha D$ 控制器.大多数研究者考虑将分数阶控制器应用到整数阶系统来提高系统的控制效果.对于现实情况中的各种实际系统,分数阶模型能够比整数阶模型准确,也为一些动态过程的描述提供了很好的工具.针对这些分数阶系统,分数阶控制器能更好体现它的优点.本文针对分数阶系统提出一种设计分数阶控制器.

2 分数阶微积分(Fractional calculus)

分数阶微积分就像一门新的语言一样,有它自己独特的逻辑和语法规则.在分数阶微积分领域里,为了更好地明白那些基本原则需要开发新的定义与原理.在仔细分析的基础上,还要证明对于描述函数、系统的方法和操作是正确的.因此,分数阶微积分不仅是更好的建模工具,而且还可以从数学上精确证明系统的正确性.

分数阶微积分的基本操作算子为 ${}_a D_t^\alpha$,其中 a 和 t 是操作算子的上下限, α 为微积分阶次^[7],是一个复数,本文假定它为一实数.

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & R(\alpha) > 0, \\ 1, & R(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{(-\alpha)}, & R(\alpha) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

最常用的分数阶微积分定义是 Riemann-Liouville (RL) 定义和 Grünwald-Letnikov (GL) 定义. RL 定义为

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau, \quad (2)$$

式中 $(m-1 < \alpha < m)$, $\Gamma(\cdot)$ 是著名的 Euler Gamma 函数. GL 定义为

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^{(t-a)/h} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(t-kh), \quad (3)$$

可以看到通过引入分数阶操作算子 ${}_a D_t^\alpha$,积分和微分可以被统一在一起.

描述分数阶系统更常用的代数工具是拉氏变换.在 $t=0$ 时刻加入的信号 $x(t)$ 的 $n(n \in \mathbb{R}_+)$ 阶微分的拉氏变换^[8]为

$$L\{D^n x(t)\} = s^n X(s).$$

对于分数阶微积分方程,如果在 $t=0$ 时刻有输入与输出信号 $u(t)$ 和 $y(t)$,传递函数为

$$G(s) = \frac{a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + \cdots + a_{m_A} s^{\alpha_{m_A}}}{b_1 s^{\beta_1} + b_2 s^{\beta_2} + \cdots + b_{m_B} s^{\beta_{m_B}}}, \quad (4)$$

其中 $(a_m, b_m) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_m, \beta_m) \in \mathbb{R}_+^2$, $\forall m \in N$.

3 分数阶 PID 控制器(Fractional order PID controller)

分数阶 PID 控制器的一般形式为 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器,包括一个积分阶次 λ 和微分阶次 μ ,其中 λ 和 μ 可以是任意实数.其传递函数为

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu, (\lambda, \mu > 0), \quad (5)$$

这里积分项是 s^λ ,就是说,在相频的对数图中,它的斜率是 -20λ dB/dec,而不是 -20 dB/dec.

在时域中控制信号 $u(t)$ 可以表示为

$$K_P e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^\mu e(t). \quad (6)$$

古典的整数阶 PID 控制器是分数阶 PID 控制器在 $\lambda=1$ 和 $\mu=1$ 时的特殊情况.当 $\lambda=1$, $\mu=0$ 时,就是 PI 控制器;当 $\lambda=0$, $\mu=1$ 时,就是 PD 控制器.可见,所有这些类型的 PID 控制器都是分数阶 PID 控制器的某一个特殊情况.分数阶 PID 控制器多了两个可调的参数 λ 和 μ .通过合理地选择参数,分数阶 PID 控制器可以提高系统的控制效果.分数阶控制器是古典整数阶控制器的一般化.分数阶 PID 控制器对于用分数阶数学模型描述的动态系统,可以取到很好的控制效果.

4 分数阶控制器参数的设计(Design of fractional order controller parameter)

对于实际情况中的受控对象,可以根据期望的幅值裕量 A_m 和相位裕量 ϕ_m 来设计分数阶 PID 控制器,使其满足系统的性能要求.从幅值裕量 A_m 和相位裕量 ϕ_m 的基本定义出发,动态受控对象 $G_p(s)$ 和控制器 $G_c(s)$ 应该满足下列关系:

$$\phi_m = \arg[G_c(j\omega_g)G_p(j\omega_g)] + \pi, \quad (7)$$

$$A_m = \frac{1}{|G_c(j\omega_p)G_p(j\omega_p)|}, \quad (8)$$

其中 ω_g 为

$$|G_c(j\omega_g)G_p(j\omega_g)| = 1. \quad (9)$$

而 ω_p 满足

$$\arg[G_c(j\omega_p)G_p(j\omega_p)] = -\pi. \quad (10)$$

将 $G_c(s)$ 用等式(5)来代替,则可以得到下列关系:

$$K_P + K_I \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\omega_p^\lambda} + K_D \cos(\frac{\pi\mu}{2} \omega_p^\mu) = R_{mp}, \quad (11)$$

$$K_P + K_I \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\omega_g^\lambda} + K_D \cos \frac{\pi\mu}{2} \omega_g^\mu = R_{mg}, \quad (12)$$

$$-K_I \frac{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\omega_p^\lambda} + K_D \sin \frac{\pi\mu}{2} \omega_p^\mu = I_{mp}, \quad (13)$$

$$-K_I \frac{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\omega_g^\lambda} + K_D \sin \frac{\pi\mu}{2} \omega_g^\mu = I_{mg}. \quad (14)$$

其中:

$$-\frac{1}{A_m G_p(j\omega_p)} = R_{mp} + jI_{mp}, \quad (15)$$

$$-\frac{\cos \phi_m - j \sin \phi_m}{G_p(j\omega_g)} = R_{mg} + jI_{mg}. \quad (16)$$

在设计控制器时, 受控对象 $G_p(s)$ 和期望的幅值裕量 A_m 、相位裕量 ϕ_m 都是已知的. 这里有 4 个方程 7 个变量 (ω_p , ω_g , λ , μ , K_I , K_P , K_D). 其余的 3 个参数可以通过使误差平方最小化来决定:

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt. \quad (17)$$

如果参数 ω_p , ω_g , λ , μ 是已知的, 则控制器的系数 K_I , K_P , K_D 就可以唯一地确定出来:

$$K_P = [\omega_p^\lambda R_{mp} - \omega_g^\lambda R_{mg} - \cot \frac{\pi\mu}{2} (\omega_p^\lambda I_{mp} - \omega_g^\lambda I_{mg})] / (\omega_p^\lambda - \omega_g^\lambda) = [\omega_g^\mu R_{mp} - \omega_p^\mu R_{mg} + \cot \frac{\pi\lambda}{2} (\omega_g^\mu I_{mp} - \omega_p^\mu I_{mg})] / (\omega_g^\mu - \omega_p^\mu), \quad (18)$$

$$K_I = \frac{\omega_g^\lambda \omega_p^\lambda (\omega_g^\mu I_{mp} - \omega_p^\mu I_{mg})}{\sin \frac{\pi\lambda}{2} (\omega_p^{\lambda+\mu} - \omega_g^{\lambda+\mu})}, \quad (19)$$

$$K_D = \frac{\omega_p^\lambda I_{mp} - \omega_g^\lambda I_{mg}}{\sin \frac{\pi\mu}{2} (\omega_p^{\lambda+\mu} - \omega_g^{\lambda+\mu})}. \quad (20)$$

基于方程 (18), 决定的变量 λ , μ , ω_p 和 ω_g 应该满足下面的约束条件:

$$(\omega_g^{\lambda+\mu} - \omega_p^{\lambda+\mu})(R_{mp} - R_{mg}) + (\omega_p^{\lambda+\mu} I_{mp} + \omega_g^{\lambda+\mu} I_{mg}) \cot \frac{\pi\mu}{2} + (\omega_p^{\lambda+\mu} I_{mg} + \omega_g^{\lambda+\mu} I_{mp}) \cot \frac{\pi\lambda}{2} - (\cot \frac{\pi\lambda}{2} + \cot \frac{\pi\mu}{2})(\omega_p^\lambda \omega_g^\mu I_{mp} + \omega_g^\lambda \omega_p^\mu I_{mg}) = 0. \quad (21)$$

在最小化指标 (17) 和上面的约束条件下, 可以确定参数 λ , μ , ω_p 和 ω_g . 然后, 根据系统的要求来设计分数阶 PID 控制器. 其设计算法如下:

- 根据系统实际要求确定幅值裕量 A_m 和相位裕量 ϕ_m ;
- 由系统特征与实际经验确定分数阶控制器的阶次;
- 在满足约束条件 (21) 与最小化指标 (17) 的条件下确定分数阶控制器的其余参数.

下面通过例子来形象地说明该方法.

5 仿真实例(Simulation examples)

例 1 文献 [9] 中给出了一个加热炉的例子, 并分别建立了加热炉的整数阶模型和分数阶模型. 加热炉的整数阶模型 (integer order model 简称为 IOM) 是一个二阶的微分方程

$$G_{Ip}(s) = \frac{1}{73043s^2 + 4893s + 1.93},$$

分数阶模型 (fractional order model 简称为 FOM) 为

$$G_{Fp}(s) = \frac{1}{14994s^{1.31} + 6009.5s^{0.97} + 1.69}.$$

加热炉的两个模型的阶跃响应如图 1 所示. 根据他们的输出响应, 得出结论分数阶系统模型要比整数阶模型更准确.

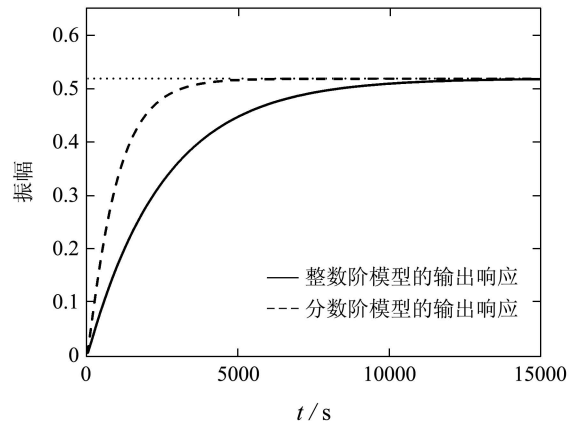


图 1 加热炉的阶跃响应图

Fig. 1 Unit step response of the heating furnace

对于加热炉的整数阶模型先设计一个整数阶 PID 控制器. 首先将其近似为一阶滞后加延迟系统

$$G_{Ip}(s) = \frac{0.51813}{2520.2609s + 1} e^{-14.97s}.$$

根据 Murrill 提出的最小化 IAE 算法, 设计的整数阶控制器 (integer order controller 简称为 IOC) 为

$$G_{Ic}(s) = 310.96 + \frac{5.04}{s} + 1113.24s.$$

图 2 显示了将整数阶 PID 控制器分别应用到整数阶模型和分数阶系统模型的结果. 从图中可以看出, 将整数阶控制器应用到分数阶系统模型的效果比将其应用到整数阶模型的效果还要差. 闭环的分数阶系统的调节时间和上升时间都要比整数阶系统慢, 只是超调量有点降低.

基于整数阶 PID 控制器的参数和加热炉的分数阶模型, 选取 $\phi_m = \pi/3$, $A_m = 1.5$. 将 λ 和 μ 选定在 (0.1, 0.9) 范围内, 步长为 0.1. 图 3 显示了不

同的 λ 和 μ 组合得到的 9×9 组控制器控制分数阶模型的阶跃响应曲线. 对应的 Bode 图如图 4 所示.

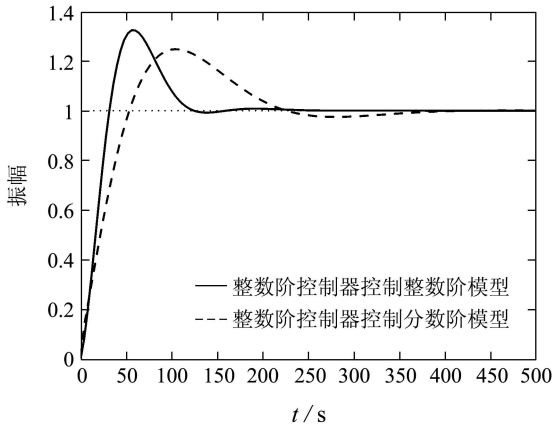


图2 整数阶控制器分别控制整数阶模型和分数阶模型的闭环阶跃响应的比较

Fig. 2 Comparison of unit step response of the closed-loop integer order model and the closed-loop fractional order system with the same integer order controller

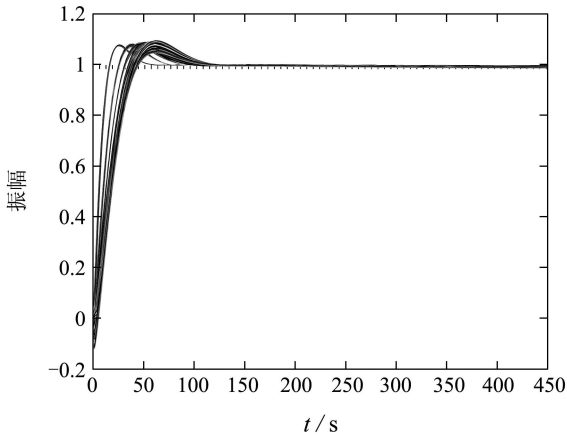


图3 不同分数阶控制器控制分数阶系统的阶跃响应
Fig. 3 Step responses of the closed-loop fractional order model with different fractional order controllers

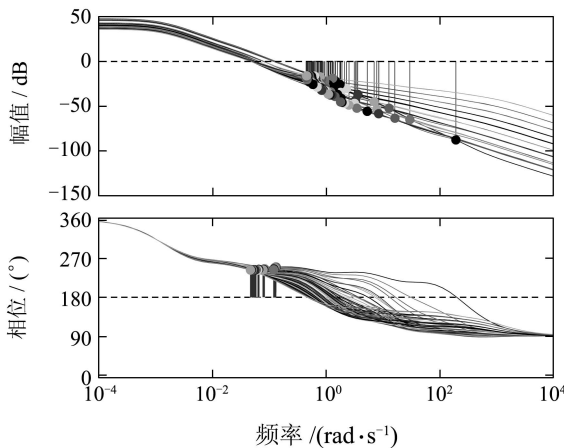


图4 不同分数阶控制器控制分数阶系统的 Bode 图
Fig. 4 Bode plots of fractional order model with different fractional order controllers

选择微积分的阶次分别为: $\lambda = 0.6$, $\mu = 0.3$. 得到的分数阶 PID 控制器的另外3个参数为 $K_P = 822.3831$, $K_I = -0.6526$, $K_D = -842.4372$, 因此分数阶控制器 (fractional order controller 简称为 FOC) 为

$$G_{Fc}(s) = 875.6661 - \frac{0.8191}{s^{0.6}} - 835.1394s^{0.3}.$$

图 5 中比较了整数阶控制器分别控制整数阶模型和分数阶模型, 分数阶控制器控制分数阶模型的 Bode 图. 从图中可以看出, 将分数阶控制器应用到分数阶模型后, 控制效果有明显提高. 不仅超调量变小, 上升时间也很快, 系统响应变快, 又有较大的带宽.

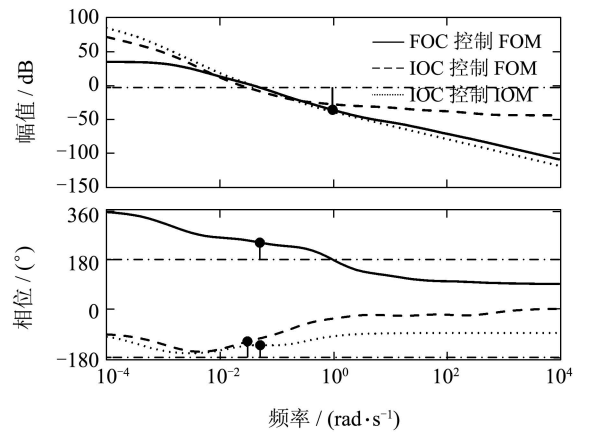


图5 分数阶控制器和整数阶控制器分别控制分数阶模型和整数阶模型的 Bode 图

Fig. 5 Comparison of bode diagrams of the fractional order model with the fractional order PID controller, and the same model with the integer order controller, the integer order model with the integer order controller

例 2 文献 [10] 也给出了一个分数阶系统的例子. 其分数阶系统的传递函数为:

$$G_{Fp}(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1}. \quad (22)$$

用最小方差法, 得到了该分数阶系统的整数阶近似:

$$G_{Ip}(s) = \frac{1}{0.7414s^2 + 0.2313s + 1}. \quad (23)$$

图 6 中显示了式 (22) 和式 (23) 所描述的系统的单位阶跃响应曲线. 可以看出, 该近似化本身也存在一定的误差.

Podlubny 等人针对系统设计了分数阶 PD^μ 控制器和整数阶 PD 控制器^[10]. 整数阶 PD 控制器为

$$G_c(s) = 20.5 + 2.7343s, \quad (24)$$

分数阶 PD^μ 控制器的传递函数为

$$G_c(s) = 20.5 + 3.7343s^{1.15}. \quad (25)$$

分别将这两个控制器应用于分数阶受控系统, 图 7 中比较了它们的阶跃响应. 可以看出分数阶 PD^μ 控制器能够取得比整数阶控制器更好的效果. 但也应该指出, 由于没有积分项, 稳态误差不可能为零.

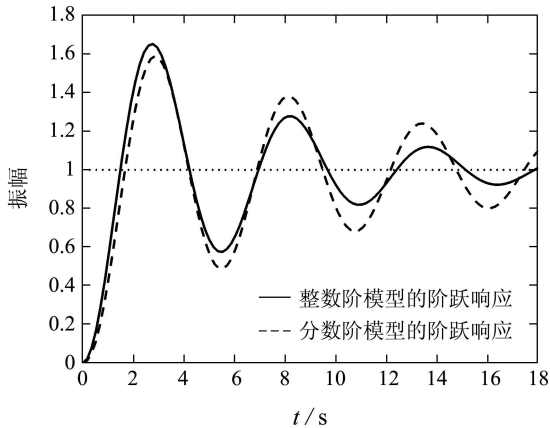


图 6 整数阶模型与分数阶模型的阶跃响应图

Fig. 6 Comparison of unit step response of the integer order model and the fractional order system

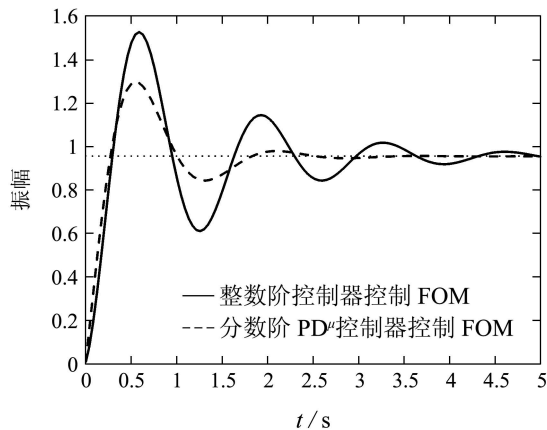


图 7 整数阶控制器和分数阶 PD^μ 控制器分别控制分数阶模型的阶跃响应

Fig. 7 Comparison of unit step response of the closed-loop fractional order model with the integer order PD controller and with fractional order PD^μ controller

对于分数阶系统 (22), 应用本文提出的方法设计分数阶 PID 控制器. 参照式 (25) 分数阶 PD^μ 控制器及分数阶系统的自身特点, 选取 $\phi_m = \pi/4$, $A_m = 1.5$. 通过大量搜寻, 选择微机分的阶次为 $\lambda = 0.2$, $\mu = 1.1$. 得到 $K_P = 138.1817$, $K_I = 2.8914$, $K_D = 12.3820$. 设计的分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器为:

$$G_c(s) = 138.1817 + \frac{2.8914}{s^{0.2}} + 12.3820s^{1.1}. \quad (26)$$

分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器控制分数阶系统的闭环阶跃响应曲线如图 8 所示. 闭环系统的响应时间更快.

图 9 中比较了分数阶 PD^μ 控制器和分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器分别用于分数阶系统的 Bode 图. 可以看出, 对于分数阶受控对象, 本文设计的分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器能够取得比其他控制器更好的效果.

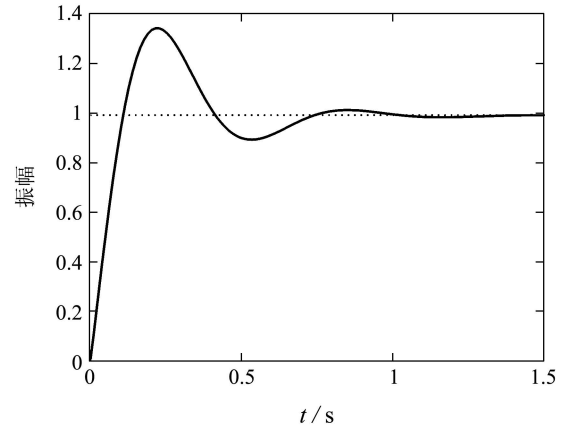


图 8 分数阶控制器控制分数阶系统的阶跃响应图

Fig. 8 Step response of the closed-loop fractional order model with fractional order PID controller

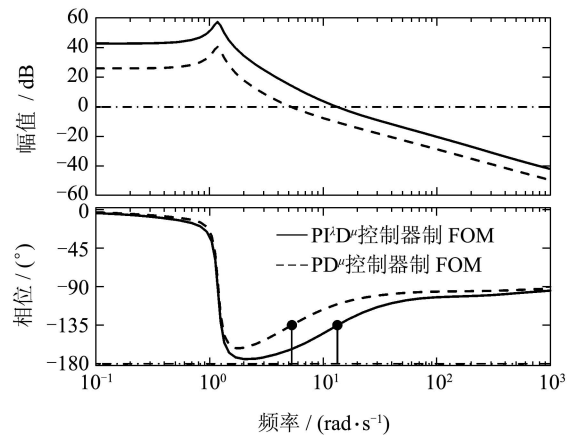


图 9 控制器 PD^μ 和 $PI^\lambda D^\mu$ 分别控制分数阶模型的 Bode 图

Fig. 9 Comparison of bode diagrams of the fractional order model with the fractional order PD^μ controller, and with the fractional order $PI^\lambda D^\mu$ controller

6 结论(Conclusion)

本文针对分数阶动态系统提出了一种分数阶 PID 控制器的设计方法. 并通过实例验证了对于分数阶受控对象, 分数阶 PID 控制器可以得到比其他控制器更好的控制效果.

参考文献(References):

- [1] RICBARD L. Magin. Fractional calculus in bioengineering[J]. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 2004, 32(1): 1 – 193.
- [2] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [3] LV Z F. *Time-domain simulation and design of siso feedback control systems*[D]. Taiwan: National Cheng kung University, 2004.

- [4] CAPONTTO R, FORTUNA L, PORTO D. A new tuning strategy for a non integer order pid controller[C] // *IFAC2004*, Bordeaux, France: [s.n.], 2004.
- [5] MONJE C A, VINAGRE B M, CHEN Y Q, et al. Proposals for fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ tuning[C] // *The First IFAC Symposium on Fractional*. Bordeaux, France: [s.n.], 2004.
- [6] MA C B, HORI Y. Design of fractional order pid controller for robust two-inertia speed control to torque saturation and load inertia variation[C] // *IPEMC*. Xi'an, China: [s.n.], 2003.
- [7] XUE D Y, CHEN Y Q. A comparative introduction of four fractional order controllers[C] // *Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2002: 3228 – 3235.
- [8] PODLUBNY I. The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order[J]. *Fractional calculus Applied Analysis*, 1997: 365 – 386.
- [9] PODLUBNY I, DORCAK L, KOSTIAL I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic system and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers[C] // *Proc of the 36th IEEE CDC*. San Diego: [s.n.], 1999.
- [10] PODLUBNY I. Fractional-order systems and fractional-order controllers[C] // *UEF-03-94 The Academy of Sciences Institute of Experimental Physics*. Kosice: [s.n.], 1994.

作者简介:

薛定宇 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为控制系统CAD、分数阶控制、系统建模与仿真等, E-mail: xuedingyu@mail.neu.edu.cn;

赵春娜 (1978—), 女, 博士, 东北大学博士后流动站, 主要研究方向为分数阶系统控制与模式识别, E-mail: chunnazhao@163.com.

下 期 要 目

基于T-S模型的轮式移动机器人轨迹跟踪控制	高兴泉, 陈 虹
实际输入饱和的一类非完整运动学系统的镇定	刘 毅, 王朝立
基于马氏决策过程的概率离散事件系统最优控制	王 飞, 冯祖仁, 胡奇英
高速车辆结构振动的独立模态空间控制	陆正刚, 胡用生
T-S模糊系统的稳定性分析与镇定控制器设计	周林娜, 张庆灵, 胡跃冰, 杨春雨
静态混成自动电压控制的研究	胡 伟, 张雪敏, 梅生伟, 卢 强
基于自适应观测器的无速度传感器感应电机控制	黄志武, 桂卫华, 年晓红, 单勇腾, 刘心昊
蚁群协同模式搜索算法及其收敛性分析	冯远静, 俞 立, 冯祖仁
基于神经网络的非线性系统预测函数控制	张日东, 王树青
无线传感网络中覆盖能效动态控制优化策略	王 雪, 马俊杰, 王 晟
考虑铁损的电动汽车用感应电机矢量控制及其能量优化策略	李 珂, 张承慧, 崔纳新
卡尔曼滤波焊缝跟踪控制	高向东, 陈永平, 袁弱男, 李桂华, 陈章兰
基于小波包分析及神经网络的汽轮机转子振动故障诊断	梁 平, 白 蕾, 龙新峰, 范立莉
简化E.Coli觅食优化算法及其在非线形模型参数辨识中的应用	刘益剑, 方彦军, 孙 冀, 张建明
基于HPSO的钢坯加热过程炉温优化设定	廖迎新, 吴 敏, 余锦华, 曹卫华