文章编号: 1000−8152(2007)05−0785−05

多组对策系统非劣Nash策略的最优均衡解算法

余国林[1], 刘三阳[1], 李炳杰[1,2]

(1. 西安电子科技大学 理学院数学系, 陕西 西安 710071; 2. 空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘要: 多组对策系统中求解组与组之间的非劣Nash策略至关重要. 如何针对一般问题解析求出非劣Nash策略还没有有效的方法. 本文阐述了一种利用组与组之间的非劣反应集构造求解非劣Nash策略的迭代算法. 为此首先引进多组对策系统组内部合作对策的最优均衡值和最优均衡解的概念, 然后通过证明最优均衡解是组内部隐含某一权重向量的合作对策的非劣解, 得到求解合作对策的单目标规划问题. 进一步说明在组内部该问题的解不仅是非劣解而且对所有局中人都优于不合作时的Nash平衡策略. 最后给出了验证该算法有效性的一个实际例子.

关键词: 多组对策; 非劣Nash策略; 最优均衡值; 最优均衡解

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Optimal equilibrium solution algorithm for non-inferior Nash strategies in multi-team game systems

YU Guo-lin[1], LIU San-yang[1], LI Bing-jie[1,2]

(1. Department of Mathematics, School of Science, Xidian University Xi'an Shaanxi 710071, China;
2. School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an Shaanxi 710051, China)

Abstract: The solution of non-inferior Nash strategy between the teams plays an important role in multi-team game systems. Unfortunately there is no effective way to obtain an analytic solution for general problems. Motivated by the non-inferior reaction sets of the games, a general construction iterative algorithm for solving non-inferior Nash strategies is proposed. Firstly, the notions called optimal equilibrium payment and optimal equilibrium solution for cooperative games within each team in multi-team game systems are introduced. Then, by proving that the optimal equilibrium solution is a non-inferior solution for cooperative game which implies a certain weight vector within each team, a single objective programming for solving the cooperative games within each team is developed. It is shown that the solution of this programming is not only the non-inferior solution but also the strategy being superior to Nash equilibrium strategies for all the players within each team. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the algorithm.

Key words: multi-team games; non-inferior Nash strategy; optimal equilibrium payment; optimal equilibrium solution

1 引言(Introduction)

多组对策是一类组与组之间不合作而组内部局中人之间合作的复杂对策系统, 该类问题的研究涉及非合作对策和合作对策的诸多理论. 文[1]研究了多组对策系统的非劣Nash策略, 给出了二组矩阵对策以及二组二次对策非劣Nash策略存在的充分必要条件. 针对二组二次对策,优化了含权向量的非劣Nash策略, 得到各组的权向量, 但对一般情形, 这样的非劣Nash策略不易解析求出, 文[1]的方法具有特殊性. 本文利用文[2]的一些结果对文[1]的方法作进一步改进. 文[2] 提出了一种全体决策者具有相同让步的求解群体决策问题的最优均衡解算法, 将一个多目标群体决策问题化为一个单目标规划问题. 本文将文[2]最优均衡解的思想推广到求解组内部合作对策问题中, 并得到相应的带参数(其他组的策略)的单目标规划问题. 该问题的解不但是组内部合作对策的非劣解, 而且组内部所有局中人的支付值均优于不合作时Nash平衡策略的支付值, 无须进一步做利益分配. 并且该方法不必解析求出带权重的组内非劣解, 也无须人为设定权重, 因为求解最优均

收稿日期: 2004−11−24; 收修改稿日期: 2007−03−19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674708); 陕西省自然科学研究资助项目(2004A05).

衡解可同时得到满足群体合理性和个体合理性的隐含某合作权重的非劣解. 本文第2节引进多组对策非劣Nash策略的定义. 利用凸分析理论证明最优均衡解集是组内部合作对策的非劣解集. 第4节给出迭代算法. 第5节给出算例.

2 多组对策的非劣Nash策略(Non-inferior Nash strategies for multi-team games)

不失一般性, 本文仅考虑两组对策问题, 对多于两组的情形, 类似处理. 假设组1有n个局中人, 组2有m个局中人, 组1第i人的控制变量为x_i,$i = 1,2,\cdots,n$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$; 组2第i人的控制变量为y_i, $i=1,2,\cdots,m$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$. $D_1=D_1^1\times D_2^1\times\cdots\times D_n^1$, $D_2=D_1^2\times D_2^2\times\cdots\times D_m^2$分别表示容许集合. 两组对策问题为

$$\min_x(f_1(x,y),f_2(x,y),\cdots,f_n(x,y)), \tag{1}$$

$$\min_y(g_1(x,y),g_2(x,y),\cdots,g_m(x,y)), \tag{2}$$

组1内部局中人寻求权向量$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$(其中: $0\leqslant\xi_i\leqslant 1$, $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n=1$)以及非劣对策$\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)$为问题

$$\min_x\sum_{i=1}^n\xi_i f_i(x,y)$$

的最优解. 类似于组1, 在组2中寻求权向量$\varpi=(\varpi_1,\varpi_2,\cdots,\varpi_m)$及非劣对策$\hat{y}=(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\cdots,\hat{y}_m)$为问题

$$\min_y\sum_{i=1}^m\varpi_i g_i(x,y)$$

的解.

对组1给出的任意对策$x\in D_1$, 组2选择相应的策略$y\in D_2$, 即存在映射$\varphi: D_1\to D_2$, 使得对一切$y\in D_2$有

$$\sum_{i=1}^m\varpi_i g_i(x,\varphi(x))\leqslant\sum_{i=1}^m\varpi_i g_i(x,y).$$

一般情况下, 映射φ是多值映射. 称$\{y|y=\varphi(x),(x,y)\in D_1\times D_2\}$为组2的非劣理性反应集. 同理, 对组2的任意对策$y\in D_2$, 组1作出非劣理性反应. 假设其相应的映射为$\psi: D_2\to D_1$, 非劣Nash策略$(\hat{x},\hat{y})$是非劣理性反应集的交集中的元素. 故$(\hat{x},\hat{y})$一定同时满足$\hat{x}=\psi(\hat{y})$和$\hat{y}=\varphi(\hat{x})$.

定理 1 若容许集合$D=D_1\times D_2$是凸紧集合, 所有支付函数关于(x,y)连续且对任意$y\in D_2$关于x是严格凸函数, 对任意$x\in D_1$关于y也是严格凸函数, 则对任意权向量(ξ,ϖ)存在非劣Nash策略$(\hat{x},\hat{y})$(依赖于权向量(ξ,ϖ)).

证 略, 参见文献[1]Theorem 3.1.

证毕.

3 组内部合作对策的非劣解(Non-inferior solutions for cooperative games within each team)

先考虑组内部合作对策问题, 以第2组为例, 对给定的第1组控制变量x(本节始终考虑x为固定向量), 定义下列组内部合作对策问题(P)

$$\min_{y_i} g_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_m), i=1,2,\cdots,m. \tag{3}$$

定义 1 设$(x,\bar{y})\in D$, 如果存在实数$s\geqslant 0$对任意$(x,y)\in D$满足

$$g_i(x,\bar{y})-g_i(x,y)\leqslant s,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{4}$$

则称$(x,\bar{y})\in D$为问题(P)的s均衡解, 称s为均衡值.

均衡值s是组内部每位局中人针对自己的支付函数给出的统一让步值. 不难证明, 如果$(x,\bar{y})$为s均衡解,则对任意$s'>s$, $(x,\bar{y})$也为s'均衡解.

定义 2 称集合$\bar{G}=\{s|g_i(x,\bar{y})-g_i(x,y)\leqslant s,\forall(x,y)\in D,i=1,2,\cdots,m\}$为策略$(x,\bar{y})\in D$的均衡集合.

定义 3 称$G=\bigcup_{(x,\bar{y})\in D}\bar{G}$为集合$\{x\}\times D_2$的均衡值集合, 其中$\bar{G}$为点$(x,\bar{y})\in D$的均衡集合.

定义 4 设s^*是G的最小值, 如果$(x,y^*)\in D$对任意$(x,y)\in D$满足

$$g_i(x,y^*)-g_i(x,y)\leqslant s^*,\ \ i=1,2,\cdots,m,$$

则称$(x,y^*)\in D$是问题(P)的s^*最优均衡解, s^*是问题(P)的最优均衡值.

注 1 最优均衡值s^*是组内部每位局中人的统一最小让步值, 统一让步体现了公平性. 由文献[2], 如果集合D是凸紧集合, g_i $(i=1,2,\cdots,m)$关于y是连续函数, 则最优均衡值s^*惟一存在.

定理 2[2] 设问题$\min_{y\in D_2}g_i(x,y)$的最优值为$g_i^*(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 则(x,y^*)是问题(P)的s^*最优均衡解的充分必要条件是$((x,y^*),s^*)$是问题($\bar{\mathrm{P}}$)

$$\min\ \ s, \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\ \ g_i(x,y)-g_i^*(x)\leqslant s, i=1,2,\cdots,m \tag{6}$$

的最优解和最优目标值.

定义 5 称$y^0\in D_2$关于问题(P)是非劣的(或Pareto最优的), 如果不存在$y\in D_2$使得对所有$i=1,2,\cdots,m$有$g_i(x,y)\leqslant g_i(x,y^0)$, 且对某一$k\in\{1,2,\cdots,m\}$有$g_i(x,y)<g_i(x,y^0)$.

定理 3 设集合D_2是凸紧集合, $g_i(x,y)(i=

$1,2,\cdots,m$)关于y是连续的凸函数, 则由所有s^*最优均衡解构成的集合是凸紧集合, 并且任意s^*最优均衡解是问题(P)的非劣解. 如果$g_i(x,y)(i=1,2,\cdots,m)$关于y是严格凸函数, 则问题(P)存在惟一的s^*最优均衡解.

证　设(x,y_1^*), (x,y_2^*)是问题(P)的s^*最优均衡解, 由于$\{x\}\times D_2$是凸紧集, $g_i(x,y)(i=1,2,\cdots,m)$关于y是连续的凸函数, 则对任意$\beta\in(0,1)$有

$$
\begin{aligned}
&\beta(x,y_1^*)+(1-\beta)(x,y_2^*)\in\{x\}\times D_2,\\
&g_i(\beta(x,y_1^*)+(1-\beta)(x,y_2^*))\leqslant\\
&\beta(s^*+g_i(x,y))+(1-\beta)(s^*+g_i(x,y))=\\
&s^*+g_i(x,y),
\end{aligned}
$$

所以$\beta(x,y_1^*)+(1-\beta)(x,y_2^*)$也是问题(P)的$s^*$最优均衡解, 故$s^*$最优均衡解构成的集合是凸紧集合. 以下证明$s^*$最优均衡解是非劣解.

由于g_i关于y是凸函数, D_2是凸紧集合, 故问题$\min\limits_{y\in D_2}g_i(x,y)$存在最优值$g_i^*$, 设$(x,y^*)=(x,y_1^*,y_2^*,\cdots,y_m^*)$是问题(P)的$s^*$最优均衡解, 如果$s^*=0$, 则$g_i(x,y^*)=g_i^*\ (i=1,2,\cdots,m)$, 即$(x,y^*)$是绝对最优解, 因此, (x,y^*)一定是非劣解.

如果$s^*>0$, 则$g_i^*\leqslant g_i(x,y^*)\leqslant g_i^*+s^*$. 假设$(x,y^*)$不是非劣解, 则存在$y^{**}\in D_2$使得$g_i(x,y^{**})\leqslant g_i(x,y^*)$, 并且至少存在一个$k\in\{1,2,\cdots,m\}$(不妨设$k=1$)使得$g_1(x,y^{**})<g_1(x,y^*)$. 定义集合$Q_i=\{(x,y)|g_i(x,y)<g_i(x,y^*)\}\ (i=1,2,\cdots,m)$, 易证明$Q_1$是开的非空集合. 对任意$\beta\in(0,1)$有

$$
\begin{aligned}
&g_1(\beta(x,y^{**})+(1-\beta)(x,y^*))\leqslant\\
&\beta g_1(x,y^{**})+(1-\beta)g_1(x,y^*)<g_1(x,y^*),\\
&g_i(\beta(x,y^{**})+(1-\beta)(x,y^*))\leqslant\\
&\beta g_i(x,y^{**})+(1-\beta)g_i(x,y^*)\leqslant g_1(x,y^*),\\
&\quad i=2,3,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

如果$Q_1\bigcap Q_2$是空集, 则有$g_2(\beta(x,y^{**})+(1-\beta)(x,y^*))=g_2(x,y^*)=g_2^*<g_2^*+s^*$, 即存在$s_2^*<s^*$使得$g_i(\beta(x,y^{**})+(1-\beta)(x,y^*))\leqslant g_i^*+s_2^*$, $i=1,2$. 如果$Q_1\bigcap Q_2$是非空集, 则显然存在$(x,y)\in Q_1\bigcap Q_2$以及$s_2^*<s^*$使得$g_i(x,y)\leqslant g_i^*+s_2^*$, $i=1,2$. 因此, 无论$Q_1\bigcap Q_2$非空与否, 皆存在$(x,y)\in Q_1$以及$s_2^*<s^*$满足$g_i(x,y)\leqslant g_i^*+s_2^*$, $i=1,2$. 同理可证, 无论$(Q_1\bigcap Q_2)\bigcap Q_3$非空与否, 皆存在$(x,y)\in Q_1$以及$s_3^*<s^*$满足$g_i(x,y)\leqslant g_i^*+s_3^*$, $i=1,2,3$. 依次类推, 存在$(x,y)\in Q_1$以及$s_m^*<s^*$满足$g_i(x,y)\leqslant g_i^*+s_m^*, i=1,2,\cdots,m$. 故$(x,y^*)$不是问题(P)的最优均衡解, 矛盾. 所以, (x,y^*)是问题(P)的非劣解. 定理的最后一个结论是显然的.

证毕.

定理 4　设D_2是凸紧集合, $g_i\ (i=1,2,\cdots,m)$关于y是连续可微的凸函数, 如果(x,y^*)是问题(P)的最优均衡解, 则存在非负权向量$w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$, 使得$y^*\in D_2$是问题$\min\limits_{y\in D_2}\{\sum\limits_{i=1}^m w_ig_i(x,y)\}$的解.

证　对定理2中的问题($\bar{\text{P}}$)引入Lagrange 乘子以及Lagrange函数

$$L(s,y,\lambda)=s-\sum_{i=1}^m\lambda_i(s-g_i(x,y)-g_i^*).$$

由定理2, 如果$y^*\in D_2$, $s^*\in R_+$是问题($\bar{\text{P}}$)的解, 则(s^*,y^*)一定是问题($\bar{\text{P}}$)的Karush-Tucker点[3], 即(s^*,y^*)满足$\nabla_{s,y}L(s,y,\lambda)=0$, 且$\lambda_i\geqslant 0$(因为所有约束为积极约束), 故有$1-\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i=0$以及$\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i\nabla_y g_i(x,y)=0$, 这里$\nabla$为梯度算子. 显然, y^*是问题$\min\limits_{y\in D_2}\{\sum\limits_{i=1}^m\lambda_ig_i(x,y)\}$的解, 而Lagrange乘子$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$是相应的权重向量. 最优均衡解是隐含某合作权重的非劣解.

证毕.

4　迭代算法(Iterative algorithm)

定义 6　设$y^0\in D_2$, $y^1\in D_2$, 如果对所有$i=1,2,\cdots,m$, 有$g_i(x,y^1)\leqslant g_i(x,y^0)$, 且对某一$k\in\{1,2,\cdots,m\}$有$g_k(x,y^1)<g_k(x,y^0)$, 则称策略$y^1$优超策略$y^0$或$y^1$不劣于$y^0$. 称所有优超于$y^0$的策略集合为$y^0$的严格优超策略集.

如果组内部局中人之间不合作, 则在定理3和定理4的条件下必然存在组内部局中人的Nash平衡策略. 而非劣解只是就整体组而言优于Nash平衡策略的解[4,5], 非劣解只满足群体合理性, 而对某些个体来讲, 非劣解对应的支付值不一定优于Nash平衡策略对应的支付值, 即非劣解不一定满足个体合理性, 因此, 对非劣解对应的支付值需做进一步分配, 常用分配方法是Shapley方法. 本文试图避开非劣解支付值的再分配, 直接构造一个单目标规划找到即是组内部合作对策的非劣解, 又是对所有个体而言都优于组内部不合作对策的Nash平衡策略的解, 这样的解是同时满足群体合理性和个体合理性的非劣解.

定义 7　令y^0为组内部不合作对策的Nash平衡

策略, 则称严格优超于y^0的策略为优超谈判策略. 如果该策略又是非劣的, 则称该策略为非劣优超谈判策略[4,5].

问题($\bar{\mathrm{P}}$)的解是非劣的, 但不一定是优超谈判策略, 以下对($\bar{\mathrm{P}}$)做进一步改进.

假定组内部局中人之间不合作的Nash平衡策略的支付值为$\bar{g}_i$, 则求解非劣优超谈判策略时只须再加上约束条件$g_i(x,y)-\bar{g}_i\leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$即可, 该条件不但不影响解的非劣性, 而且仍具有相同让步, 仍体现了公平性, 只是非劣解隐含的权重变了, 但为了得到该约束条件, 须先求Nash平衡策略对应的支付值$\bar{g}_i$, 这是很不方便的, 在定理4的假设条件下, 如果Nash平衡策略位于D_2的内部, 可得到求解非劣优超谈判策略的规划($\bar{\mathrm{P}}'$)

$$\begin{cases}\min s,\\ \text{s.t. } g_i(x,y)-g_i^*\leqslant s, i=1,2,\cdots,m,\\ \qquad \dfrac{\partial g_i(x,\bar{y})}{\partial y_i}=0, i=1,2,\cdots,m,\\ \qquad g_i(x,y)-g_i(x,\bar{y})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{7}$$

然而, 值得强调的是, 如果不能确定Nash平衡策略位于D_2的内部, 则不得不先求Nash平衡策略对应的支付值$\bar{g}_i$, 此时, 求解问题($\bar{\mathrm{P}}'$)归结为求解问题($\bar{\mathrm{P}}$).

以上对组1给出的任一策略$x\in D_1$, 构造了组2内部合作情形下寻求非劣优超谈判策略的单目标规划($\bar{\mathrm{P}}'$). 同理, 对组2给出的任一策略$y\in D_2$, 对组1也可做类似处理.

假设对任意$y\in D_2$, 构造组1寻求非劣优超谈判策略的单目标规划为($\bar{\mathrm{P}}_1{}'$), 对任意$x\in D_1$, 构造组2对应的单目标规划为($\bar{\mathrm{P}}_2{}'$). 由于组与组之间是不合作的, 可利用组与组之间非劣理性反应集构造求解两组对策问题非劣Nash策略的交互式迭代算法[6].

算法1

Step1 任意给定初始对策$x^{(1)}\in D_1$, $y^{(1)}\in D_2$, 数值精度$\epsilon\geqslant 0$, $k:=1$.

Step2 对给定对策$x^{(k)}\in D_1$, 求解问题($\bar{\mathrm{P}}_2{}'$)得到最优解$y^{(k+1)}\in D_2$. 对给定对策$y^{(k+1)}\in D_2$, 求解问题($\bar{\mathrm{P}}_1{}'$)得到最优解$x^{(k+1)}\in D_1$.

Step3 判断是否

$$\|(x^{(k)},y^{(k)})-(x^{(k+1)},y^{(k+1)})\|_\infty\leqslant\epsilon,$$

如果是, 则$(x^{(k+1)},y^{(k+1)})$是二组对策问题的非劣Nash策略, 否则, $k:=k+1$, 转Step2.

5 算例(Example)

考虑企业联盟A和B的二组对策问题, 企业联盟A有3个部门(局中人), 联盟B有两个部门, 各联盟(组)追求最大利润. 市场价格由5个部门的生产能力决定, 具体参数如表1所示. 其中, 市场价格$p=p_0-(x_1+x_2+x_3+y_1+y_2)$, $p_0=240$, $a_1=1, a_2=50, a_3=1, b_1=1.5, b_2=60, c_3=20$. 取初始值$x^{(1)}=(30,30,30)$, $y^{(1)}=(30,30)$执行算法1将迭代结果记录于表2. 其中S_1, S_2分别表示第k次迭代时问题($\bar{\mathrm{P}}_1{}'$)与问题($\bar{\mathrm{P}}_2{}'$)对应的最优均衡值.

表1 企业联盟A和B的市场竞争参数

Table 1 Parameters for market competition between corporation coalition A and B

组	部门	生产能力	生产能力约束	生成成本	利润函数
A	A_1	x_1	(0, 50)	$a_1x_1^2$	$f_1^1=px_1-a_1x_1^2$
	A_2	x_2	(0, 50)	a_2x_2	$f_2^1=px_2-a_2x_2$
	A_3	x_3	(0, 50)	$a_3x_3^2-c_3x_3$	$f_3^1=px_3-a_3x_3^2+c_3x_3$
B	B_1	y_1	(0, 50)	$b_1y_1^2$	$g_1^2=py_1-b_1y_1^2$
	B_2	y_2	(0, 50)	b_2y_2	$g_2^2=py_2-b_2y_2$

表2 算法1(以第2组初值开始)的迭代结果记录

Table 2 Records of iterative results for algorithm 1 (starting from initial value of team 2)

k	x	y	S_1	S_2
1	(30.00, 30.00, 30.00)	(30.00, 30.00)		
2	(21.54, 30.36, 4.30)	(21.40, 34.67)	2063.00	1188.21
3	(22.09, 30.94, 14.86)	(21.15, 34.22)	2153.27	1164.02
4	(22.19, 31.04, 14.95)	(21.99, 32.64)	2169.25	1239.33
5	(22.20, 31.09, 14.90)	(21.11, 34.14)	2203.16	1159.64
6	(22.21, 31.06, 14.97)	(21.10, 34.12)	2172.12	1158.92
7	(22.21, 31.06, 14.97)	(21.10, 34.12)	2172.12	1158.92

经过7次迭代, 计算精度已达到10^{-2}, 二组对策的非劣Nash策略为: 企业A三个部门的生产能力是: 22.21, 31.06, 14.97, 利润分别为2095.2, 2066.3, 1221.3. 企业B两个部门的生产能力是: 21.10, 34.12, 利润分别为1792.00, 1930.00. 对企业B给出的对策$y=(21.10,34.12)$, 如果企业A三个部门之间不合作, 则A组内部的Nash平衡策略为(30.18, 40.54, 23.51), 利润分别为1821.97, 1643.90, 1105.91. 同样, 对企业A给出的对策$x=(22.21,31.06,14.97)$, 如果企业B两个部门之间不合作, 则Nash平衡策略为(25.75, 43), 利润分别为1657.92, 1849.43. 由此显然验证了本文算法1得到的非劣Nash策略对应的支

付值在A, B两组所有局中人中均优于组内不合作的Nash平衡策略, 因此组内的合作是有意义的, 而且非劣Nash策略是两组内部的非劣优超谈判策略. 事实上, 在迭代过程中, 每一步得到的对策都是当前迭代点处组内局中人的非劣优超谈判策略. 经过上机验证, 如果取其他不同的初始值迭代, 所得结果完全相同.

注 2 该算例的数学模型来源于文献[1, 7].

注 3 求解单目标约束规划问题的软件为Lingo8.0.

6 结论(Conclusion)

本文研究了多组对策系统的非劣Nash策略问题, 给出了求解该策略的迭代算法. 利用最优均衡解的概念, 不设权重便可得到组内部合作对策的非劣优超谈判策略, 该非劣解隐含了合适的权向量, 避开了寻找权重的麻烦, 不具有主观性. 本文算法不同于文献[1], 它可求解一般性质的非线性多组对策. 并为所有组内局中人找到公平的、具有相同让步的、满足个体合理性和群体合理性的最好解.

参考文献(References):

[1] LIU Y, SIMAAN M A．Non-inferior Nash strategies for multi-team systems[J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2004, 120(1): 29 – 51.

[2] 孟志青, 胡奇英, 胡毓达. 群体决策问题的一种最优均衡解[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 28 – 33.
(MENG Zhiqing, HU Qiying, HU Yuda. An optimal equilibrium solution for group decision making problem[J]．*J of Systems Science and Mathematical Science*, 2004, 24(1): 28 – 33.)

[3] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
(YUAN Yaxiang, SUN Wenyu．*Optimization Theory and Method*[M]. Beijing: Academic Press, 2001.)

[4] YU J, XIANG S W．On essential components of the Nash equilibrium points[J]. *Nonlinear Analysis*, 1999, 38(2): 259 – 264.

[5] YANG H, YU J．On essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points[J]. *Applied Mathematic Letter*, 2002, 15(3): 553 – 560.

[6] BARD J F. Convex two level optimization[J]. *Mathematical Programming*, 1988, 40(1): 15 – 27.

[7] SALENT S W, SHAFFER G. Optimal asymmetric strategies in research joint ventures[J]. *Int J of Industrial Organization*, 1998, 16(2): 195 – 208.

作者简介:

余国林 (1974—), 男, 讲师, 博士研究生, 研究领域为最优化理论与最优控制理论, E-mail: guolin_yu@126.com;

刘三阳 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为最优化理论与最优控制理论, E-mail: liusanyang@263.net;

李炳杰 (1963—), 男, 教授, 博士研究生, 研究领域为分布参数最优控制数值算法, E-mail: libingjie45@yahoo.com.cn.