

混沌吕系统的约束控制

宋运忠^{1,2}, 赵光宙², 齐冬莲²

(1. 河南理工大学 电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000; 2. 浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

摘要: 根据最小值原理为混沌吕系统设计了约束控制器, 该控制器能将混沌吕系统的两个不稳定的平衡点镇定; 针对控制作用施加的3个不同位置, 推导了约束控制的3种不同的切换控制曲线. 所得到的控制规律前两个是 bang-bang 控制; 最后一个根据混沌运动的遍历性特点, 引入范围可以调节的捕获区, 得到 bang-bang 控制和逻辑判断相结合的复合控制规律. 通过施加闭环控制后对系统状态变化的仿真结果证明了所建议方法的正确性.

关键词: 混沌系统; 混沌控制; 吕系统; 最小值原理; bang-bang 控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Constrained control of chaotic Lü system

SONG Yun-zhong^{1,2}, ZHAO Guang-zhou², QI Dong-lian²

(1. College of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454000, China;

2. College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: Constrained control is designed in this paper for chaotic Lü system based on the Minimum Principle. The two equilibria of Lü system, which are essentially unstable, can be stabilized by the constrained control action. In case of clarity and completeness, all three different switching surfaces or curves which are depending on the imposed positions of the control signal are derived. The first two of them among the resulted control laws are proved to be bang-bang ones. In order to overcome the constraint of the bang-bang control in the third one, we employed a captured zone with adjustable range according to the ergodicity of chaotic motion, so another control law is a compound one, consisting of bang-bang action and logic switching. Finally, the effectiveness of the suggested scheme is demonstrated and verified by the simulation results of a ultimate closed-control system.

Key words: chaotic system; chaos control; Lü system; minimum principle; bang-bang control

1 引言 (Introduction)

吕金虎和陈关荣于2002年通过混沌反控制得到了如下的混沌吕系统^[1,2], 它的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - bx_2. \end{cases} \quad (1)$$

其中参数 $a = 36, b = 3, c = 20$. 系统(1)具有3个不稳定的平衡点, 即

$$\begin{aligned} x_e^{(1)} &= [0, 0, 0]^T, \\ x_e^{(2,3)} &= [\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c] = [\pm 7.746, \pm 7.746, 20]. \end{aligned}$$

由于吕系统是连接陈系统和 Lorenz 系统的桥梁, 所以它很快就引起了人们的关注, 如先后有人对不确定吕系统进行了参数辨识和反推控制^[3~5].

本文拟根据 Pontryagin 最小值原理^[6,7]为吕系统设计约束控制器, 将混沌吕系统的状态镇定到它的非零不稳定的平衡点. 文献[6]对 Lorenz 系统的约束控制进行了研究, 但作者只考虑了两种情形, 即控制作用分别加在第1个方程和第2个方程上的情形; 而第3种情况恰好最为复杂, 即控制作用加在第3个方程上时的情形, 这时仅仅使用 bang-bang 控制无法完成将混沌吕系统的状态镇定到它的所有不稳定的平衡点. 本文在文献[6]的基础上对混沌吕系统进行约束控制, 并考虑了全部情形, 特别是针对第3种情况提出了 bang-bang 控制和逻辑切换相结合的方式以克服 bang-bang 控制的局限性.

本文的结构是这样安排的, 首先对约束控制用于混沌控制的原理进行介绍, 然后针对控制作用施加在混沌吕系统的3个不同位置给出相应的结果, 最后

给出结论.

2 约束控制原理介绍 (Brief introduction of constrained control)

考虑非线性连续时间混沌动态系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \\ 0 = \dot{x}_e = f(x_e), \end{cases} \quad (2)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$, t_0 是初始时间常数, x_e 表示系统的平衡点. 控制的目的是镇定系统(2)的不稳定的平衡点. 给系统(2)施加一满足不等式约束的标量控制作用, $u \in \mathbb{R}$, 系统(2)就成为如下的闭环系统

$$\dot{x} = f(x) + Bu, x(t_0) = x_0, |u| \geq M, M > 0, (3)$$

B 除一个元素 $b_k = 1, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 不为零外, 其余元素全部为零, M 全部为常数. 混沌系统(2)的约束控制问题就是找到满足方程(3)中不等式约束的控制作用 u 将混沌系统从任意初始状态 $x(t_0)$ 驱动到期望的不稳定平衡点 $x(T) = x_e$, T 是自由终端时间. 混沌控制的进一步要求是一旦混沌系统被驱动到期望的不稳定平衡点就要求系统状态维持在期望的不稳定平衡点上. 定义系统(3)的Hamiltonian函数为

$$H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T [f(x) + Bu], \quad (4)$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}^n$ 是未知伴随向量, 它满足

$$\dot{\lambda} = -\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (5)$$

为了确定最优控制作用 u , 运用Pontryagin的极小值原理^[7]得

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t), \quad (6)$$

方程(6)对所有允许的 u 都成立. 其中 δ 表示变分, 星号*表示最优值. 对Hamiltonian函数(4), 由方程(6)可以得出

$$((\lambda^*))^T B u^* \leq ((\lambda^*))^T B u, \quad (7)$$

方程(7)对所有允许的 u 都成立. 由此可以得出如下的最优控制规律

$$u^* = -M \operatorname{sgn}[(\lambda^*)^T B]. \quad (8)$$

其中 sgn 表示符号函数, 可见得到的最优控制规律是bang-bang控制规律. 最优切换曲线是

$$(\lambda^*)^T B = 0. \quad (9)$$

对时不变系统(3), Hamiltonian函数(4)在轨线(9)上保持为常量. 本文仅考虑终端时间 T 自由时的情形, 这时的Hamiltonian函数(4)为零, 即

$$0 = H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T [f(x) + Bu]. \quad (10)$$

3 混沌吕系统的约束控制 (Constrained control of chaotic Lü system)

控制的目的是运用方程(3)中的控制作用 u 镇定 $x_e^{(2)}$ 或 $x_e^{(3)}$. 本文中研究了全部的情况, 即: 控制作用分别加在系统(1)的第1个方程 f_1 、第2个方程 f_2 、第3个方程 f_3 上. 初始状态 $x_0 = [1, 0, 1]^T$.

3.1 控制作用加在第1个方程上 (Control signal imposed on the first equation)

首先考虑控制作用加在第1个方程 f_1 上. 这时控制输入矩阵 $B = [1, 0, 0]^T$. 从方程(9)可以知道 $\lambda_1 = 0, \dot{\lambda}_1 = 0$. 假定 $[\lambda_2, \lambda_3]^T$ 具有非零解. 由式(5)得

$$\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \quad (11)$$

由式(10)和(3)并考虑式(1)得

$$\lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \quad (12)$$

联立方程(11)和(12)可以得到切换曲线

$$S(x) = f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = c(x_2)^2 - b(x_3)^2 = 0. \quad (13)$$

容易验证不稳定平衡点 $x_e^{(2)}$ 和 $x_e^{(3)}$ 都在切换曲线(13)上. 两种可能的bang-bang控制规律分别是 $u_+ = -M \operatorname{sgn}[S(x)]$, $u_- = M \operatorname{sgn}[S(x)]$; $M = 6$; u_+ , u_- 分别用来镇定 $x_e^{(3)}$ 和 $x_e^{(2)}$. 图1和图2分别给出了在 u_- 的作用下, 系统状态和控制作用的演化曲线. 从图中可以发现对所选择的初始状态 x_0 , 经过一段时间的过渡过程后, 在控制的作用下, 系统状态 x 总是趋向并稳定于平衡状态 $x_e^{(2)}$. 控制作用在 -6 和 $+6$ 之间来回切换, 由于平衡点 $x_e^{(2)}$ 正好位于切换曲线上, 所以越是在 $x_e^{(2)}$ 的临近范围, 控制作用的切换也就越频繁. 从图中发现一旦在控制 u_- 的作用下系统状态被驱动到平衡点 $x_e^{(2)}$ 后, 系统的状态就永远停留在该处.

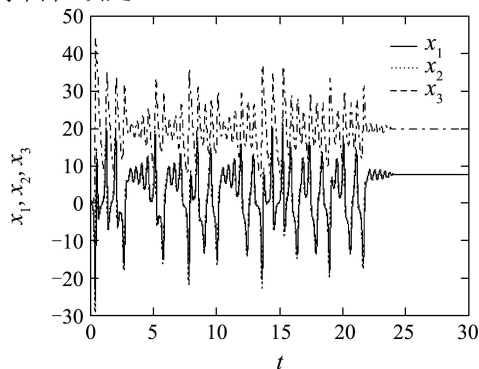


图1 控制作用 u_- 加在第1个方程上时系统状态的演化曲线
Fig. 1 Transient curves of system states with u_- added in the first equation

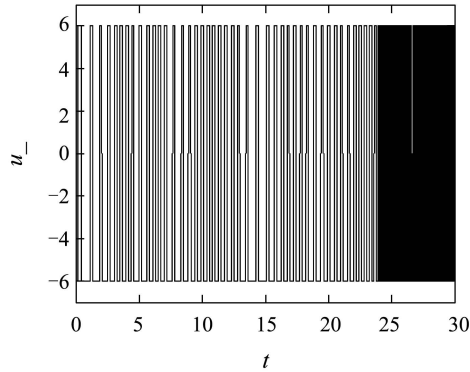


图2 控制作用 u_- 加在第1个方程上时控制作用的演化曲线
Fig. 2 Transient curves of control action with u_- added in the first equation

3.2 控制作用加在第2个方程上(Control signal imposed on the second equation)

其次考虑控制作用加在第2个方程 f_2 上. 这时控制输入矩阵 $B = [0, 1, 0]^T$ 具有非零解. 由式(5)得

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \quad (14)$$

由式(10)(3)并考虑式(1)得

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 = 0, \quad (15)$$

联立方程(14)和(15)可以得到切换曲线

$$S(x) = f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = abx_3 - ab(x_1)^2 = 0. \quad (16)$$

容易验证不稳定平衡点 $x_e^{(2)}$ 和 $x_e^{(3)}$ 都在切换曲线(16)上. 两种可能的bang-bang控制规律分别是 $u_+ = -M \operatorname{sgn}[S(x)]$, $u_- = M \operatorname{sgn}[S(x)]$; $M = 6$; u_+ , u_- 分别用来镇定 $x_e^{(3)}$, $x_e^{(2)}$.

3.3 控制作用加在第3个方程上(Control signal imposed on the third equation)

现在考虑控制作用加在第3个方程 f_3 上. 这时控制输入矩阵 $B = [0, 0, 1]^T$. 从方程(9)可以知道 $\lambda_3 = 0$, $\dot{\lambda}_3 = 0$. 假定 $[\lambda_1, \lambda_2]^T$ 具有非零解. 由式(5)得

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad (17)$$

由式(10)(3)并考虑式(1)得

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0, \quad (18)$$

联立方程(17)和(18)可以得到切换曲线

$$S(x) = f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = ax_1 x_2 - a(x_1)^2 = 0. \quad (19)$$

容易验证不稳定平衡点 $x_e^{(2)}$ 和 $x_e^{(3)}$ 都在切换曲线上. 两种可能的bang-bang控制规律分别是 $u_+ = -M \operatorname{sgn}[S(x)]$, $u_- = M \operatorname{sgn}[S(x)]$; $M = 9$; u_+ , u_- 分别用来镇定 $x_e^{(3)}$, $x_e^{(2)}$. 经研究发现 u_- 可以镇

定 $x_e^{(2)}$, u_+ 不能镇定 $x_e^{(3)}$, u_+ 的控制效果见图3和图4. 为镇定 $x_e^{(3)}$, 根据 $x_e^{(3)}$ 的坐标值位置, 引入范围可以调节的捕获区, 将控制作用 u_+ 改进为

$$u_+ = \begin{cases} u_-, & |x_1 - c| \leq \sigma, \\ 0, & |x_1 - c| > \sigma. \end{cases} \quad (20)$$

式(20)中 x_1 为混沌系统状态的第1个坐标值, 即 $x = (x_1, x_2, x_3)$, c 为常数, 它可取与 $x_{e1}^{(3)}$ 相接近的值, 也可以取 $x_{e1}^{(3)}$ 本身, $x_{e1}^{(3)}$ 是 $x_e^{(3)}$ 的第一个坐标值, 即 $x_e^{(3)} = (x_{e1}^{(3)}, x_{e2}^{(3)}, x_{e3}^{(3)})$, 文中取 $x_{e1}^{(3)}$ 本身. σ 为常数, 它可以调节控制加入的阈值, 文中选取 $\sigma = 4$. 即根据混沌系统的遍历性原理, 当混沌系统的运动进入满足控制作用施加条件的区域, 适时再将改进后的 u_+ 加入, 即可实现 $x_e^{(3)}$ 的镇定. 图5给出了改进后的 u_+ 的控制效果.

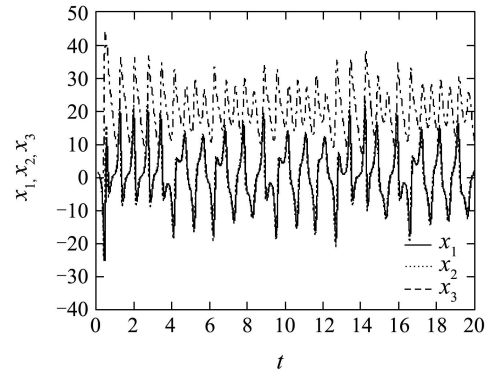


图3 控制作用 u_+ 加在第3个方程上时系统状态的演化曲线
Fig. 3 Transient curves of system states with u_+ added in the third equation

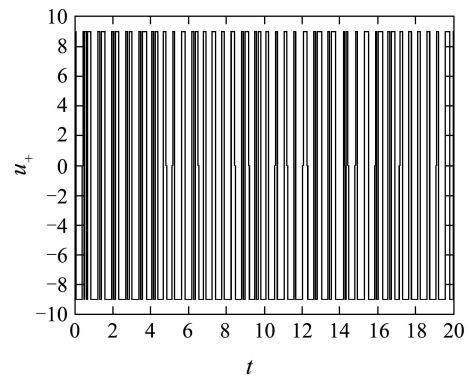
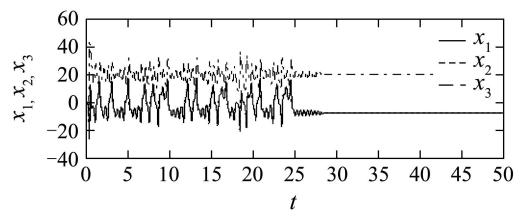


图4 控制作用 u_+ 加在第3个方程上时控制作用的演化曲线
Fig. 4 Transient curves of control action with u_+ added in the third equation



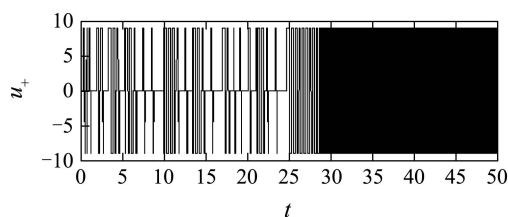


图5 改进的控制作用 u_+ 加在第3个方程上时系统状态和控制作用的演化曲线

Fig. 5 System states and control action transient curves with improved u_+ added in the third equation

4 结论 (Conclusions)

根据最小值原理为混沌吕系统设计了约束控制规律, 所得到的控制规律前两个是bang-bang控制, 最后一个为bang-bang控制和逻辑控制相结合的形式. 在该控制规律的作用下, 混沌吕系统的两个非零不稳定的平衡点能够被镇定. 通过施加闭环控制后对系统状态变化的仿真结果证明了所建议方法的正确性.

参考文献 (References):

- [1] Lü J, CHEN G. A new chaotic attractor coined[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 – 661.
- [2] Lü J, CHEN G, CHENG D, CELIKOVSKY S. Bridge the gap between the Lorenz system and the chen system[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917 – 2926.

- [3] WU X Q, LU J A. Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003, 18(4): 721 – 729.
- [4] YU Y, ZHANG S. Adaptive backstepping control of the uncertain Lü system[J]. *China Physics*, 2002, 11(12): 1249 – 1253.
- [5] YU Y, ZHANG S. Controlling uncertain Lü system using backstepping design[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003, 15: 897 – 902.
- [6] TIAN Y, TADE M, LEVY D. Constrained control of chaos[J]. *Physics Letters A*, 2002, 296: 87 – 90.
- [7] 胡中辑, 邹伯敏, 林冬青, 等. 最优控制原理及应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1988.
(HU Zhongji, ZOU Bomin, LIN Dongqing, et al. *Optimum Control Principle and Applications*[M]. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1993.)

作者简介:

宋运忠 (1968—), 男, 1991年毕业于焦作矿业学院, 2006年3月获浙江大学控制理论与控制工程专业博士学位, 现为河南理工大学副教授, 目前研究方向为非线性系统的分析与控制, 智能系统与复杂网络, E-mail: songhpu@126.com;

赵光宙 (1946—), 男, 1970年毕业于清华大学, 1981年获浙江大学硕士学位, 1988年获浙江大学博士学位, 1989-1992年在联邦德国“电子同步加速器中心”工作, 现为浙江大学教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统的分析与控制, E-mail: zhaogz@cee.zju.edu.cn;

齐冬莲 (1973—), 女, 1996年毕业于辽宁工程技术大学, 2002年3月获浙江大学控制理论与控制工程专业博士学位, 现为浙江大学副教授, 目前研究方向为非线性系统的分析与控制, 信号系统分析与处理, E-mail: qidl@cee.zju.edu.cn.