文章编号:1000-8152(2007)05-0803-04

# 工业过程的子空间模型辨识

## 李幼凤,苏宏业,褚 健

(工业控制技术国家重点实验室,浙江大学先进控制研究所,浙江杭州 310027)

摘要: 子空间模型辨识方法 (SMI) 是一类新兴的直接估计线性状态空间模型的黑箱建模方法, 近年来获得了广泛关注. 和传统的线性建模方法相比, SMI的优势不仅在于算法本身的简单可靠, 也在于它的状态空间表达. 本文首先简要介绍了 SMI 的基本思想以及3种基本算法 (N4SID, MOESP, CVA). 然后将这类方法应用于一个实际的工业过程建模, 同时对3种 SMI 基本算法和一种传统辨识算法—预测误差方法 (PEM) 进行了研究对比.

关键词:子空间;系统辨识;预测误差方法;模型预测控制

中图分类号: TP13 文献标识码: A

# Subspace model identification for industrial processes

LI You-feng, SU Hong-ye, CHU Jian

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** Subspace model identification (SMI) methods, a new class of black-box algorithms to setting up a linear state space model directly from input-output data, have drawn much research attention recently. Compared with the classical linear system identification methods, SMI methods are attractive not only because of their numerical simplicity and stability, but also their availabilities for the state space form. In this paper, the basic idea of SMI methods and three basic algorithms, i.e., N4SID, MOESP and CVA, are briefly addressed at first. Then comparison between the SMI methods and the classical system identification method-PEM (prediction error methods) is made based on the same data sets collected from a real industrial process.

Key words: subspace; system identification; predictive error method (PEM); model predictive control (MPC)

## 1 引言 (Introduction)

模型预测控制 (MPC, model predictive control)<sup>[1]</sup> 因其在炼油、化工、电力等复杂工业过程中的一系 列成功应用,因而受到工业界和控制界的广泛关注. MPC 技术的一个关键就是建立过程的动态模型. 到 目前为止,线性模型预测控制 (LMPC, linear MPC), 即,基于线性模型的模型预测控制,仍然占据着工业 应用的主流.就模型形式来讲,现有的 LMPC 多数 采用非参数化模型—FIR (finite impulse response) 模 型,因为这类模型简单且物理意义明确. 然而,由于 实际工业过程通常是由许多相互作用的变量组成的 多输入多输出 (MIMO) 系统, FIR 模型通常需要进 行大量单变量手动阶跃测试,非常耗费时间和人力. 就模型辨识方法而言,传统的线性系统辨识方法,例 如预测误差方法 (PEM, predictive error method) 和辅 助变量方法 (IVM, instrumental variable method),都 是通过最小化某个适当的目标函数得到模型参数, 存在着一些缺陷:1)由于目标函数与系统参数之间 一般呈非线性关系,因此需要迭代优化;2)由于存在 局部极值和非凸性,辨识结果一般对优化算法的初 始条件敏感;3)多变量系统辨识的参数化比较困难.

新近提出的子空间模型辨识 (SMI, subspace model identification)<sup>[2]</sup>方法则可以避免这些问题. 一方面,子空间模型辨识方法直接由输入输出数据辨识出系统的线性状态空间模型,这类模型紧凑,可以进行多变量阶跃测试,从而节省时间和人力. 另一方面,相比于传统的线性系统辨识方法, SMI 有如下优点:1)不需要参数化;2)不需要迭代优化;3)算法实现仅依赖于一些简单可靠的线性代数工具,如 QR 分解, SVD 等等;4) 直接估计状态空间模型,适宜于多变量系统辨识. 至今, SMI 算法已在一些领域获得成功应用, 譬如, 机械工程、市政工

收稿日期: 2006-03-11; 收修改稿日期: 2006-07-04.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60421002);浙江省新世纪151人才工程重点资助项目.

程、过程工业等<sup>[3]</sup>.本文的目的在于使用 SMI 方法 建立一个实际工业过程的预测模型,并在此基础上 与传统辨识方法之一 PEM 进行比较.

#### 2 问题描述 (Problem Formulation)

SMI 算法直接由给定的输入输出数据辨识系统的状态空间模型.考虑如下的离散时间线性时不变状态空间模型:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k,$$
 (1)

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k, \tag{2}$$

式中:  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  和  $y_k \in \mathbb{R}^l$  分别是过程 在 k 时刻的状态向量, 输入观测向量和输出观测向 量;  $v_k \in \mathbb{R}^l$  和  $w_k \in \mathbb{R}^n$  分别是系统的输出测量噪 声和过程噪声; 各矩阵具有相应的维数. 此外, 为保 证辨识结果具有好的统计特性, 作如下假设:

A1) 系统是渐进稳定的,即 A 的特征值严格在单 位圆内;

A2)  $\{A, C\}$  可观测,  $\{A, [B Q^{1/2}]\}$  可控;

A3) 输入 $u_k$ 是确定性的拟平稳序列,且和过程 噪声、测量噪声无关;

A4) 过程噪声和测量噪声都是平稳的零均值白 噪声序列, 且

$$\mathbf{E}\left(\begin{bmatrix}w_k\\v_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_j^{\mathrm{T}} & v_j^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}Q & S\\S^{\mathrm{T}} & R\end{bmatrix}\delta_{kj} \ge 0, \quad (3)$$

式中 E 表示期望算子,  $\delta_{kj}$  是 Kronecker delta 算子 (即  $\delta_{kj} = 0$ , if  $k \neq j$ ;  $\delta_{kj} = 1$ , if k = j).

基于此模型,子空间辨识算法的目的可以归结为:通过给定的输入输出观测序列 $\{u_k, y_k\}_{k=1}^N$ (N表示样本个数),估计矩阵A, B, C, D.可能的话,也可以估计出协方差矩阵Q, R, S.

## 3 符号说明 (Notations)

扩展可控性矩阵: 
$$\Omega_b := \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{b-1}B \end{bmatrix}$$
  
扩展可观性矩阵:  $\Gamma_a := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{a-1} \end{bmatrix}$ ,

脉冲响应 Hankel 矩阵:

$$H_{t,a,b} = \begin{bmatrix} h_t & h_{t+1} \cdots & h_{t+b-1} \\ h_{t+1} & h_{t+2} \cdots & h_{t+b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{t+a-1} & h_{t+a} \cdots & h_{t+a+b-2} \end{bmatrix},$$

其中:  $h_k \in \mathbb{R}^{l \times m}$  是系统 k 时刻的脉冲响应矩阵; 下标 t, a, b 分别表示 Hankel 矩阵的对角线上第1个元素的起始时刻, 行块数和列块数. 其他 Hankel 矩阵 类似定义; 由于推导需要, 分别定义了过去的 Han-

kel 矩阵 (以下标 p 表示)、将来的 Hankel 矩阵 (以下标 f 表示) 以及当前的 Hankel 矩阵 (以下标 c 表示), 例如

过去的输入Hankel矩阵:  $U_p := U_{1,s,T}$ ,

未来的输入Hankel矩阵:  $U_{f} := U_{s+1,s,T}$ ,

当前的输入Hankel矩阵:  $U_c := U_{s,1,T}$ ,

联合矩阵: 
$$Z_{\mathbf{p}} := \begin{bmatrix} U_{\mathbf{p}}^T & Y_{\mathbf{p}}^t \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
,

另外, "未来的" 测量噪声  $v_k$  和过程噪声  $w_k$  的 Hankel 矩阵分别记作  $M_f$  和  $N_f$ .

状态序列:  $X_s = [x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{s+T}]$ , 输入下三角 Toeplitz 矩阵:

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 \\ CA^{a-2}B \cdots & CB & D \end{bmatrix}.$$

测量噪声下三角 Toeplitz 矩阵  $\Phi_a^w$  与  $\Phi_a$  定义类 似, 只是 D = 0, B = I.

正交投影:  $A/B := A\Pi_B = AB^{\dagger}B$ , 其中(·)<sup>†</sup> 表示 Moore-Penrose 伪逆.

 $\|(A)\|_{F}$  表示矩阵 A 的 F 范数.

## 4 基本思想 (Basic idea)

SMI 基本思路就是由输入输出 Hankel 矩阵投影的行子空间和列子空间来获取模型参数,因此得名"子空间辨识". SMI 方法一般由两步组成: 1) 估计扩展可观性矩阵  $\Gamma_s$  或者系统的状态序列  $X_s$ ; 2) 计算矩阵 A, B, C, D.

## **4.1** 估计 $\Gamma_s$ 或者 $X_s$ (Estimating $\Gamma_s$ or $X_s$ )

实现这一步有两种策略.策略1依据子空间等价 原理.首先基于系统的输入输出矩阵等式

$$Y_{\rm f} = \Gamma_s X_s + \Phi_s U_{\rm f} + \Phi_s^w M_{\rm f} + N_{\rm f},\tag{4}$$

通过使用 (斜) 投影或者辅助变量消除噪声 *M*<sub>f</sub>, *N*<sub>f</sub> 以及未来输入 *U*<sub>f</sub>, 得到

$$O_s = \Gamma_s X_s,\tag{5}$$

其中 $\hat{X}_s$  是估计的状态序列. 在  $\Gamma_s$  满秩条件下,  $O_s$  的列空间与  $\Gamma_s$  的列空间恰好重合 (维数等于 系统的阶次 n),因而  $\Gamma_s$  可以由  $O_s$  的列空间进行表 达. 具体而言,对  $O_s$  进行 SVD

$$O_s = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中  $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,则可得到扩展可观性矩阵  $\Gamma_s = U_1 S_1^{1/2}$ 和状态序列估计 $\hat{X}_s = \Gamma_s^{\dagger} O_s$ .

策略2依据基于 CCA (canonical correlation analysis) 的随机实现理论<sup>[4]</sup>. 通过对输入输出变量的条件 协方差矩阵进行类似式(6)的分解, 得到扩展可观性 矩阵  $\Gamma_s$  和扩展可控性矩阵  $\Omega_T$ . 而系统的状态序列 估计  $\hat{X}_s$ 则被表达为 Hankel 矩阵  $Z_p$  的线性组合.

**4.2** 计算矩阵 *A*, *B*, *C*, *D*(Computing *A*, *B*, *C*, *D*)

计算矩阵 A, B, C, D 有两种方法: 实现法 (realization approach) 和回归法 (regression approach)<sup>[4]</sup>. 实现法是在没有估计状态序列的情况下, 分两步计 算各个矩阵. 先由  $\Gamma_s$  直接计算矩阵 A 和 C, 然后再 根据 Toeplitz 矩阵构造的 LS 问题计算矩阵 B 和 D. 回归法基于估计的状态序列, 对如下线性方程组

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{s+1} \\ Y_{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A B \\ C D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{s} \\ U_{c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{w} \\ \rho_{v} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

进行最小二乘 (LS, least squares) 求解, 即

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \arg \min_{A,B,C,D} \left\| \begin{bmatrix} \hat{X}_{s+1} \\ Y_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_s \\ U_c \end{bmatrix} \right\|_F^2.$$
(8)

另外,噪声的协方差矩阵 *Q*,*R*,*S* 可以由该 LS 问题的残差估计得到,即

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \mathrm{E} \left( \begin{bmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{bmatrix} \left[ \rho_w^{\mathrm{T}} & \rho_v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \right).$$
(9)

自 SMI 方法提出以来. 出现了3种基本算 法, 即 MOESP<sup>[6~8]</sup>(multivariable out-put error state space), N4SID<sup>[9]</sup>(numerical algo-rithm for subspace state space system identification) 和 CVA<sup>[10]</sup>(canonical variate analysis). 前两者源于状态空间的实现理论, 都使用策略1确定扩展可观性矩阵. 后者 CVA 源 于 Akaike 对 CCA 所作的工作, 使用策略2. 另 外,在计算系统矩阵方面, MOESP 使用实现法, 而 CVA 和 N4SID 使用回归法. 不过, 它们可以在一 定框架下得到统一. Van Overschee & De Moor<sup>[11]</sup>基 于上述提到的策略1给出一个统一定理 (unifying theorem), 认为这3种算法是  $O_s = W_1 Y_f / U_f Z_p W_2$  分 别取不同权矩阵的结果,其中 W1,W2 分别表示行 权矩阵和列权矩阵. 通过一定改进, 这些基本算法 应用已由原始的开环离散时间系统扩展到连续时间 系统[12]、闭环系统[13]和某些特殊结构的非线性系 统<sup>[14]</sup>.

#### 5 实例研究 (Real world example)

前面说过, SMI 方法有很多优点, 譬如不需要参数化, 不需要迭代优化, 易于多变量系统辨识等等, 但代价是辨识算法的结果次优. 为了说明这一点, 本小节将利用3种 SMI 基本算法和一种传统辨识方

法 PEM 对一个实际的工业过程进行建模. 该数据来 源于某大型化纤公司化工厂对 PTA 装置氧化单元 的开环阶跃测试. 这里主要针对两个子对象进行辨 识: 1) 进料混合罐; 2) 氧化反应器. 它们都是多变量 系统 (后者的输入输出变量均多于前者). 将采集来 的数据随意划分为两个部分: 一部分作训练集, 用来 辨识模型; 一部分作测试集, 用来测试模型.

建模算法: PEM, CVA, MOESP 和 N4SID. 前3种 算法分别来自 MATLAB 工具箱中的 pem 函数 和"N4Weight"分别取"CVA"和"MOESP"的n4sid函 数; N4SID 算法则取自文献 [2]中附带的 subid 函 数.

评价准则: 1) 算法主体的计算时间 (多次运行的 平均时间, 以秒为单位); 2) 测试集上的预测误差:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \left[ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_{ij})^2}} \right] \times 100\%, \quad (10)$$

式中 $y_{ij}$ 和  $\hat{y}_{ij}$ 分别表示测试集上系统和模型在第*i*时刻第*j*个输出变量的值.

结果分析:对两个对象多次运行各种算法(直到 找到最优的参数值),相应的辨识结果见表1和表2.

表1 进料混合罐上 SMI 和 PEM 方法性能比较

Table 1Performance comparison between SMI and<br/>PEM for feed mixing tank

算法	时间/ s	ε
PEM	9.9	0.563
CVA	4.0	0.606
MOESP	3.1	0.927
N4SID	0.2	0.631

表 2 氧化反应器上 SMI 和 PEM 方法性能比
----------------------------

Table 2Performance comparison between SMI andPEM for oxidation reactor

2M for oxidation reactor			
算法	时间/ s	ε	
PEM	77.6	2.269	
CVA	9.3	2.668	
MOESP	8.8	3.933	
N4SID	7.4	1.678	

从两个表格可以看出, SMI 较 PEM 快, 尤其 是对于变量较多的氧化反应器.这是显然的, 因 为 PEM 需要迭代优化, 而 SMI 只是一些矩阵计算. 就泛化性能而言, SMI 较 PEM 差一些.不过, 当没有 较好的初始估计时, PEM 方法有可能得到比 SMI 方 法更差的结果<sup>[15]</sup>.在 SMI 算法内部, 就算法速度而 言, N4SID 最快, CVA 最慢, MOESP 介于两者之间; 就预测误差来讲, CVA 最接近 PEM, 泛化性能最好, MOESP 泛化性能最差. 这个结论和文献[16]给出的 结论不太相同. 原因可能是这里选取的对象比较有 限且更为复杂.

#### 6 小结 (Conclusion)

本文简单介绍了子空间模型辨识方法的基本思 想. 然后通过对一个实际的工业过程建模,研究对比 了3种 SMI 基本算法 (CVA, MOESP, N4SID) 和 PEM. 在计算时间上, 3种 SMI 基本算法远远优于 PEM, 因 为前者只是一些矩阵计算而后者则需要迭代优 化. 就泛化性能而言, SMI 比 PEM 稍逊色一点, 但 PEM 对初始估计的要求较高. 另外, SMI 算法辨 识得到的是状态空间模型, 这对于预测和控制等研 究领域是非常便利的<sup>[17]</sup>. 因此, SMI 算法是线性模 型预测控制技术中建立过程动态模型的一条有益途 径. 目前 SMI 算法也还存在相当多的问题等待解决, 譬如如何系统地确定模型阶次, 如何有效地进行性 能评估, 如何推广到更一般的非线性系统等等.

#### 参考文献(References):

- QIN S J, BADGWELL T A. A survey of industrial model predictive control technology[J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(7): 733 – 764.
- [2] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. Subspace Identification for Linear Systems: Theory-Implementation-Applications[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] DE COCK K, DE MOOR B. Subspace Identification Methods[EB/OL]. Available on http://www.ece.sunysb.edu/ decock/ subspace methods.pdf.
- [4] KATAYAMA T, PICCI G. Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods[J]. *Automatica*, 1999, 35(10): 1635 – 1652.
- [5] VIBERG M. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems[J]. Automatica, 1995, 31(12): 1835 – 1851.
- [6] VERHAEGEN M, DEWILDE P. Subspace model identification Part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms[J]. *Int J of Control*, 1992, 56(5): 1187 – 1210.

- [7] VERHAEGEN M, DEWILDE P. Subspace model identification Part 2. Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm[J]. *Int J of Control*, 1992, 56(5): 1211 – 1241.
- [8] VERHAEGEN M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data[J]. *Automatica*, 1994, 30(1): 61 – 74.
- [9] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems[J]. Automatica, 1994, 30(1): 75 – 93.
- [10] LARIMORE W E. Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control[C]//Proc of the 29th Conf on Decision and Control. Honolulu: IEEE Press, 1990: 596 – 604.
- [11] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms[J]. Automatica, 1995, 31(12): 1853 – 1864.
- [12] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. Continuous-time frequency domain subspace system identification[J]. *Signal Processing*, 1996, 52(2): 179 – 194.
- [13] HUANG B, DING S X, QIN S J. Closed-loop subspace identification: an orthogonal projection approach[J]. J of Process Control, 2005, 15: 53 – 66.
- [14] WESTWICK D, VERHAEGEN M. Identifying MIMO Wiener systems using subspace model identification methods[J]. *Signal Processing*, 1996, 52(2): 235 – 258.
- [15] FAVOREEL W, DE MOOR B, VAN OVERSCHEE P. Subspace state space system identification for industrial processes[J]. J of Process Control, 2000, 10(2/3): 149 – 155.
- [16] FAVOREEL W, SIMA V, VAN HUFFEL S, et al. Subspce Model Identification of Linear Systems in SLICOT, SLICOT Working Note 1998-6[EB/OL]. Available on http://citeseer.ist.psu.edu/129504.html.
- [17] WANG J, QIN S J. A new subspace identification approach based on principle component analysis[J]. J of Process Control, 2002, 12: 841 – 855

#### 作者简介:

**李幼风** (1978—), 女, 博士生, 从事非线性系统建模和预测控 制研究, E-mail: yfli@iipc.zju.edu.cn;

**苏宏业** (1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、非线 性控制和鲁棒控制理论等研究, E-mail: hysu@iipc.zju.edu.cn;

```
褚 健 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、时滞
系统控制和鲁棒控制理论等研究, E-mail: chuj@iipc.zju.edu.cn.
```