文章编号: 1000−8152(2007)05−0866−03

MIMO系统转化为Luenberger能控规范型的条件

江宁强[1], 宋文忠[2]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210014; 2. 东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096)

摘要: 线性系统化为Luenberger能控规范型后可以很方便地进行极点配置. 本文证明, 在完全能控的情况下, MIMO系统能否化为Luenberger能控规范型与系统的最大能控性指数和最小能控性指数之差有关. 如果两者之差大于1, 就可能在控制矩阵B中除第l行($l=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i, 1\leqslant m\leqslant r$)以外的位置上出现非零元. 结果表明, 用Luenberger能控规范型方法进行极点配置有一定的局限性.

关键词: 线性系统; 能控规范型; 极点配置; 能控性指数

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Restraint on MIMO system in being transformed into the Luenberger's canonical form

JIANG Ning-qiang[1], SONG Wen-zhong[2]

(1. Department Automation, Nanjing University of science and technology, Nanjing Jiangsu 210014, China;
2. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: Pole assignment can be readily implemented after the linear system is transformed into the Luenberger's canonical form. It is proved that the difference between the maximal and the minimal controllability indices is the essential condition to ensure that whether a controllable MIMO system can be transformed into the Luenberger's canonical form or not. If the difference is greater than 1, non-zero elements may then appear in the control matrix B except at the row $l(l=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i, 1\leqslant m\leqslant r)$. The result also shows the restraint of this method in pole assignment.

Key words: linear system; controllable canonical form; pole assignment; controllability index

1 引言(Introduction)

线性系统理论研究了多输入–多输出(MIMO)系统的极点配置方法. 对状态空间中描述的系统, 如果能转化为能控规范型, 就可以简便地通过状态反馈实现极点的任意配置[1,2].

能控规范型主要有两种, 即Wonham能控规范型和Luenberger能控规范型, 其中Luenberger能控规范型应用较为广泛. 文[3]最早将单变量系统的能控规范型构造方法推广到多变量系统, 构造出的两种能控规范型称为Luenberger能控规范型. Luo证明了这两种规范型的等价性[4]. 文[5]指出, Luenberger能控规范型不是惟一的, 并提出了一种直接构造规范型的方法, 不需要计算变换矩阵, 减小了计算量. 目前认为, 只要系统完全能控, 就可以化为Luenberger能控规范型[3~6]. 然而在应用中会出现一些特殊情况, 按要求选择一组线性无关列之后, 构造出的变换矩阵并不能将系统化为Luenberger能控规范型. 因此有必要对转化条件作进一步研究.

本文首先给出Luenberger能控规范型的定义及常用的转换方法; 然后给出一个经转换不能化为Luenberger能控规范型的例子; 最后, 本文将证明, 能否转化还取决于系统能控性指数的构成.

2 MIMO系统的Luenberger能控规范型(Luenberger's controllable canonical form of MIMO system)

考虑完全能控的线性时不变MIMO系统[3]:

$$\varSigma:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases}\tag{1}$$

其中: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$, $C\in\mathbb{R}^{q\times n}$为常数矩阵, $B=[b_1\,b_2\cdots b_p]$, $\operatorname{rank}B=r$. 系统的能控性矩阵为$Q=[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]$. 不失一般性, 设B中前r个列向量线性无关. 采用行搜索方法可以确定Q中的线性无关列向量, 并组成满秩矩阵:

收稿日期: 2005−12−22; 收修改稿日期: 2007−04−11.

$$M=[b_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1,\cdots,b_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r], \tag{2}$$

其中$\mu=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$为系统的能控性指数集, $\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i=n$. 由$M^{-1}$中各块的末行构造矩阵$P$:

$$M^{-1}=\left[\begin{array}{c} e_{11}\\ \vdots\\ e_{1\mu_1}\\ \hline \vdots\\ \hline e_{r1}\\ \vdots\\ e_{r\mu_r}\end{array}\right],\quad P=\left[\begin{array}{c} e_{1\mu_1}\\ \vdots\\ e_{1\mu_1}A^{\mu_1-1}\\ \hline \vdots\\ \hline e_{r\mu_r}\\ \vdots\\ e_{r\mu_r}A^{\mu_r-1}\end{array}\right]. \tag{3}$$

变换$\bar{x}=Px$将系统(1)化为:

$$\Sigma_L:\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u,\\ y=\bar{C}\bar{x},\end{cases} \tag{4}$$

其中:

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\left[\bar{A}_{ij}\right],i,j=1,2,\cdots,r,$$

$$\bar{A}_{ii(\mu_i\times\mu_i)}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\ \times&\times&\times&\times&\times\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,r,$$

$$\bar{A}_{ij(\mu_i\times\mu_j)}=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\ \times&\times&\times&\times&\times\end{bmatrix},i\neq j,$$

$$\bar{B}_{(n\times p)}=PB,\bar{C}=CP^{-1},$$

“×”为可能的非零元. 如果$\bar{B}$矩阵具有如下形式:

$$\bar{B}_{(n\times p)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\times&\cdots&\times\\ \vdots&\vdots&&&\vdots&\cdots&\vdots\\ 0&0&&&&&\\ 1&\times&&&&&\\ &0&&&&&\\ &\vdots&&&\vdots&\cdots&\vdots\\ &0&&&&&\\ &1&&&&&\\ &&\ddots&&\vdots&\cdots&\vdots\\ &&&0&&&\\ &&&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ &&&0&&&\\ &&&1&\times&\cdots&\times\end{bmatrix},$$

即在$\bar{B}$矩阵的前r列中, 除了第l行($l=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i$, $1\leqslant m\leqslant r$)以外, 其他各行都由零元组成, 这时的系统(4)称为Luenberger能控规范型. 采用状态反馈$u=K\bar{x}$, $k\in\mathbb{R}^{p\times n}$, 并令$K$矩阵的第$r+1$至$p$行为0, 就可以任意配置系统的极点.

3 Luenberger能控规范型与能控性指数(Luenberger's canonical form and controllability indices)

系统(1)完全能控并不能保证该系统可以化为Luenberger能控规范型(4), 因为在P变换下, $\bar{B}$有可能不具备规范型所要求的特殊形式. 例如, 系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&3\\0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}u, \tag{5}$$

记$B=[b_1,b_2,b_3]$. 取$M=[b_1,Ab_1,b_2,Ab_2,A^2b_2,b_3]$, 则$\mu$={2, 3, 1},

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}e_{11}\\ \underline{e_{12}}\\ e_{21}\\ e_{22}\\ \underline{e_{23}}\\ e_{31}\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}e_{12}\\ \underline{e_{12}A}\\ e_{21}\\ e_{21}A\\ \underline{e_{21}A^2}\\ e_{31}\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&2&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\\0&1&6\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

变换$\bar{x}=Px$将系统(5)化为:

$$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u. \tag{6}$$

系统(6)不是Luenberger能控规范型. 如果用状态反馈$u=K\bar{x}$来配置极点, 就要对矩阵$\bar{A}$中第2, 5, 6行的元素进行设置, 并保持其他各行不变. 由于$\bar{B}$中第4行、第3列元素不等于0, 因此对矩阵中第6行进行设置时, 第4行也同时发生变化. 所以取能控性指数集$\mu=\{2,3,1\}$时, 不能实现闭环极点的任意配置.

一般地, 如果系统(1)经变换$\bar{x}=Px$后, 在$\bar{B}$矩阵的前r列中, 除了第l行($l=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i$,$1\leqslant m\leqslant r$)以外的位置上出现了非零元, 则该系统不能转化为 Luenberger 能控规范型; 反之, 则该系统必能化为 Luenberger 能控规范型.

记最大能控性指数$\mu_{\max}=\max\limits_{i=1,2,\cdots,r}\mu_i$, 最小能控性指数$\mu_{\min}=\min\limits_{i=1,2,\cdots,r}\mu_i$, $\Delta\mu=\mu_{\max}-\mu_{\min}$. 可证如下命题:

命题 如果$\Delta\mu\leqslant 1$, 则完全能控的系统(1)必能化为Luenberger能控规范型.

证 不失一般性, 设B中前r个列向量线性无关, 能控性指数集μ中$\mu_i=\mu_{\max}$, $\mu_j=\mu_{\min}$.

当$\Delta\mu\leqslant 1$时, 对$\bar{B}$矩阵中任一个元

$$b_{ij}, 1\leqslant i\leqslant n, i\neq\sum_{l=1}^{m}\mu_l, m=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,r,$$

必有

$$i=\sum_{l=1}^{k}\mu_l-w, 0<w<\mu_k, 1\leqslant k\leqslant r,$$

故

$$b_{ij}=e_{k\mu_k}\times A^{\mu_k-w-1}b_j.$$

因为$\mu_k-w-1\leqslant\mu_j-1$, 所以$b_{ij}=0$. 证毕.

注 1 如果$\Delta\mu=\mu_i-\mu_j>1$, 由$M^{-1}\times M=I$可知, $e_{i\mu_i}\times A^k b_j=0$. 矩阵中第$(\sum\limits_{l=1}^{i}\mu_l)-1$行、$j$列为$e_{i\mu_i}\times A^{\mu_i-2}b_j$. $\mu_i-2>\mu_j-1$, 所以$\bar{B}$矩阵中的该元是可能的非零元. 而Luenberger能控规范型的控制矩阵中该元为零. 因此经变换$\bar{x}=Px$后, 系统不一定能转化为Luenberger能控规范型. 可见, 系统(1)能否化为Luenberger能控规范型不仅取决于系统是否能控, 还与系统能控性指数的构成有关, 在实际应用中应加以考虑[7].

注 2 用不同的方法搜索Q中的线性无关列向量, 得到的能控性指数集可能不同. 如果某种搜索方法得到的指数集能够满足上述的条件, 系统就可以化为Luenberger能控规范型. 对系统(5), 如果取$M=[b_1,Ab_1,b_2,Ab_2,b_3,Ab_3]$, 则$\mu$={2, 2, 2}, $\Delta\mu=0$,

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1/2&0&0&-1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&-1/2&1/2&-2&3\end{bmatrix},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

由于$\bar{B}$中除了第2, 4, 6行以外, 各元素为0, 因此可以同时对$\bar{A}$矩阵的第2, 4, 6行进行任意配置.

4 结论(Conclusion)

在完全能控的情况下, MIMO系统能否化为Luenberger能控规范型与系统的最大能控性指数和最小能控性指数之差有关. 如果两者之差大于1, 就可能在除第l行($l=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i$,$1\leqslant m\leqslant r$)以外的位置上出现非零元. 这表明, 用Luenberger能控规范型方法进行极点配置有一定的局限性. 当系统不能化为Luenberger能控规范型时, 可以尝试选取不同的线性无关列的组合来构造变换矩阵, 或者采用Wonham能控规范型等其他形式进行极点配置.

参考文献(References):

[1] KAILATH T. *Linear Syetems*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980.

[2] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (ZHENG Dazhong. *Linear Syetems*[M]. Beijing: Press of Tsinghua University, 2002.)

[3] LUENBERGER D G. Canonical forms for linear multivariable systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1967, 12(3): 290 – 293.

[4] LUO Z. Transformations between canonical forms for multivariable linear constant systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(2): 252 – 256.

[5] JORDKY D, SRIDHAR B. An efficient algorithm for calculation of the Luenberger canonical form[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1973, 18(3): 292 – 295.

[6] GUPTA R D, FAIRMAN F W. Luenberger's canonical form revisited[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1974, 19(4): 440 – 441.

[7] WANG L F. Fault-tolerent design in a networked vibration control system[C] // *Proc of the 29th IEEE Conf Industrial Electronics Society*. [S.l.]: [s.n.], 2003, 3: 2823 – 2828.

作者简介:

江宁强 (1970—), 男, 2005年毕业于东南大学自动化研究所, 获博士学位, 现在南京理工大学自动化学院从事教研工作, 主要研究方向为非线性系统的稳定性和控制, E-mail: jiangningqiang@hotmail.com;

宋文忠 (1936—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为复杂系统的辨识和控制、DEDS.