文章编号: 1000−8152(2007)06−0929−04

仿射非线性奇异系统的受控分布

王文涛

(沈阳工业大学 理学院, 辽宁 沈阳 110023)

摘要: 研究非线性奇异系统的受控不变分布问题. 讨论了非线性奇异系统的受控不变分布算法与该系统经过状态反馈转化为正常非线性系统的受控不变分布算法的关系. 得到了在一定条件下, 正则非线性奇异系统的受控不变分布算法与该系统经过状态反馈转化为正常非线性系统的受控不变分布算法的一致性. 并给出一个例子说明本文的结果.

关键词: 非线性奇异系统; 受控不变分布; 状态反馈; 算法
中图分类号: TP271　　**文献标识码**: A

Controlled distributions of affine nonlinear singular systems

WANG Wen-tao

(College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang Liaoning 110023, China)

Abstract: Problems of controlled invariant distributions of affine nonlinear singular systems are studied in this paper. The relations of the algorithms of controlled invariant distribution for the nonlinear singular systems and the nonlinear systems obtained by imposing the state feedback to the nonlinear singular systems are discussed. The coincidence of the algorithms of controlled invariant distribution for the nonlinear singular systems and the nonlinear systems obtained by imposing the state feedback to the nonlinear singular systems are proved. An example is provided to illustrate the results of the paper.

Key words: nonlinear singular system ; controlled invariant distribution; state feedback; algorithm

1 引言 (Introduction)

在线性系统理论中, 不变子空间的概念起着重要作用. 在非线性系统理论中, 不变分布概念起着与不变子空间的概念在线性系统理论中相同的作用[1]. 自20世纪70年代, 奇异系统的研究受到众多学者的关注, 而且, 围绕线性奇异系统, 已形成了与线性系统相平行的理论体系[2]. 但是, 对于非线性奇异系统的研究进展缓慢, 主要是在系统的可解性方面有些探讨. 近十年, 受非线性系统微分几何理论的推动, 非线性奇异系统的研究取得了一些进展, 主要包括完全线性化[3]、输入输出解耦[4]、干扰解耦[5]、输出跟踪和稳定化等[6,7]. 最近, 非线性奇异系统的受控不变分布和能控性子分布的概念被提出, 并给出了两个分布的算法, 两个分布的一些性质也被讨论[8,9].

本文将对非线性奇异系统的受控不变分布做进一步的讨论. 主要讨论正则的非线性奇异系统的受控不变分布算法与该系统经过适当的反馈转化为正常非线性系统时受控不变分布算法的关系, 即两个算法的一致性问题, 为进一步利用受控不变分布来讨论系统的综合控制问题奠定一些理论基础.

2 系统的受控不变分布(Controlled invariant distribution)

考虑仿射的非线性奇异控制系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u, \\ 0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$是微分变量, $z \in \mathbb{R}^s$ 是代数变量, $u \in \mathbb{R}^m$为输入, $p_i(x)$和$g_i(x)(i = 1, 2)$分别为有适当阶数的光滑的矩阵值函数, $f_1(x)$和$f_2(x)$分别为n维和s维光滑的向量值函数, $y = h(x) \in \mathbb{R}^m$ 是系统输出.

考虑状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v + \gamma(x)z, \tag{2}$$

其中$\beta(x)$在区域U上非奇异. 实施状态反馈(2), 系

收稿日期: 2005−09−23; 收修改稿日期: 2006−11−22.
基金项目: 辽宁省教育基金资助项目(20060621).

统(1)转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)\alpha(x) + [p_1(x) + \\ \qquad g_1(x)\gamma(x)]z + g_1(x)\beta(x)v, \\ 0 = f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + [p_2(x) + \\ \qquad g_2(x)\gamma(x)]z + g_2(x)\beta(x)v, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{3}$$

记

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) + g_1(x)\alpha(x),$$
$$\tilde{p}_1(x) = p_1(x) + g_1(x)\gamma(x),$$
$$\tilde{g}_1(x) = g_1(x)\beta(x).$$

根据文献[8], 一个分布$\varDelta$被称为在区域U上为受控不变的, 如果在区域U上存在反馈律(α,β,γ)使得$\varDelta$是关于向量场$\tilde{f}_1, \tilde{p}_1, \tilde{g}_1$的不变分布, 即对于所有$x \in U$,

$$[\tilde{f}_1, \varDelta](x) \subset \varDelta(x),\ [\tilde{p}_1, \varDelta](x) \subset \varDelta(x),$$
$$[\tilde{g}_1, \varDelta](x) \subset \varDelta(x).$$

如果反馈律(α,β,γ)只定义于$x^0 \in U$的某邻域内, 则$\varDelta$称为该系统在U上的一个局部受控不变分布.

3 包含在系统输出核内的最大受控不变分布 (Largest controlled invariant distribution contained in ker (dh))

对于系统(1), 在文献[8]中, 给出一个包含在系统输出核内最大受控不变分布的算法, 其结构如下:

第0步 建立$\varOmega_0 = \mathrm{span}\{\mathrm{d}h\}$;

第k步 建立

$$\varOmega_k = \varOmega_{k-1} + L_{f_1}(\varOmega_{k-1} \bigcap G_1^{\perp}) + \sum_{i=1}^{s} L_{p_{1i}}(\varOmega_{k-1} \bigcap G_1^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} L_{g_{1j}}(\varOmega_{k-1} \bigcap G_1^{\perp}). \tag{4}$$

其中: $G_1 = \mathrm{span}\{g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1m}\}, g_{1i},\ 1 \leqslant i \leqslant m$, 由系统(1)定义.

设系统(1)正则, 即矩阵$[p_2(x)\ \ g_2(x)]$行满秩. 这样, 存在矩阵$\gamma(x)$使得$p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)$非奇异. 因此, 从系统(1)的第2个方程, z能被唯一解出, 即

$$z = -[p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1}[f_2(x) + g_2(x)\alpha(x) + g_2(x)\beta(x)v]. \tag{5}$$

将式(5)代入系统(1)的第1个方程, 得

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$f(x) = f_1(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} f_2(x), \tag{7}$$

$$g(x) = g_1(x) + [p_1(x) + g_1(x)\gamma(x)][p_2(x) + g_2(x)\gamma(x)]^{-1} g_2(x). \tag{8}$$

容易看出系统(6)可以由系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)w, \\ y = h(x), \end{cases} \tag{9}$$

通过实施反馈$w = \alpha(x) + \beta(x)v$而得到. 令

$$G_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_m\},$$

其中$g_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 由式(8)定义. 记

$$W(x) = \begin{bmatrix} p_2(x) & g_2(x) \\ p_1(x) & g_1(x) \end{bmatrix}.$$

根据文献[8]的引理3.2, 如果矩阵$W(x)$的秩$R(W) = \min\{s+m, s+n\}$, 且$p_{1i} \in G_1, i = 1, 2, \cdots, s$, 则$G_1 = G_2$.

参见文献[1], 系统(9)的包含在输出核内的最大受控不变分布由下面的算法确定:

第0步 建立$\varOmega_0 = \mathrm{span}\{\mathrm{d}h\}$;

第k步 建立

$$\varOmega_k = \varOmega_{k-1} + L_f(\varOmega_{k-1} \bigcap G_2^{\perp}) + \sum_{j=1}^{m} L_{g_j}(\varOmega_{k-1} \bigcap G_2^{\perp}), \tag{10}$$

其中f和$g_j, j = 1, 2, \cdots, m$, 由式(7)(8)确定.

关于系统(1)和系统(9), 有下面的结论:

定理 1 如果$W(x)$的秩$R(W) = \min\{s+m, s+n\}$, 且$p_{1i} \in G_1, i = 1, 2, \cdots, s$, 则关于系统(1)的算法(4)与关于系统(9)的算法(10)产生同样的分布.

证 首先根据定理条件, $G_1 = G_2$, 因此得$G_1^{\perp} = G_2^{\perp}$. 再考虑由式(7)(8) 确定$f$和$g$的结构, 有

$$f(x) = f_1(x) + p_1(x)\lambda(x) + g_1(x)\mu(x),$$
$$g(x) = g_1(x) + p_1(x)\eta(x) + g_1(x)\delta(x).$$

其中$\lambda(x), \mu(x), \eta(x)$和$\delta(x)$为具有相应阶数的矩阵值函数. 再根据李导数的性质, 对于向量场τ, 余向量场ω和标量函数λ, 有

$$L_{\lambda\tau}\omega = (L_\tau \omega)\lambda + \langle \omega, \tau \rangle d\lambda.$$

如果ω是$\varOmega_{k-1} \bigcap G_2^{\perp}$中的余向量场, 则

$$L_f \omega = L_{f_1}\omega + \sum_{j=1}^{s}[(L_{p_{1j}}\omega)\lambda_j + \langle \omega, p_{1j} \rangle d\lambda_j] + \sum_{i=1}^{m}[(L_{g_{1i}}\omega)\mu_j + \langle \omega, g_{1i} \rangle d\mu_i],$$

$$L_{g_i}\omega = L_{g_{1i}}\omega + \sum_{j=1}^{s}[(L_{p_{1j}}\omega)\eta_{ji} + \langle \omega, p_{1j} \rangle d\eta_{ji}] +$$

$$\sum_{l=1}^{m}[(L_{g_{1l}}\omega)\delta_{li}+\langle\omega,g_{1l}\rangle d\delta_{li}].$$

因为$\omega\in G_2^{\perp}$, 得$\omega\in G_1^{\perp}$, 因此$\langle\omega,p_{1j}\rangle=0$, $\langle\omega,g_{1i}\rangle=0$, $\langle\omega,g_{1l}\rangle=0$, 从而

$$L_f\omega=L_{f_1}\omega+\sum_{j=1}^{s}(L_{p_{1j}}\omega)\lambda_j+\sum_{i=1}^{m}(L_{g_{1i}}\omega)\mu_j,$$

$$L_{g_i}\omega=L_{g_{1i}}\omega+\sum_{j=1}^{s}(L_{p_{1j}}\omega)\eta_{ji}+\sum_{l=1}^{m}(L_{g_{1l}}\omega)\delta_{li}.$$

由此可以看出

$$\Omega_{k-1}+L_f(\Omega_{k-1}\bigcap G_2^{\perp})+\sum_{j=1}^{m}L_{g_j}(\Omega_{k-1}\bigcap G_2^{\perp})\subset$$
$$\Omega_{k-1}+L_{f_1}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp})+$$
$$\sum_{j=1}^{s}L_{p_{1j}}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp})+\sum_{i=1}^{m}L_{g_{1i}}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp}).$$

再根据定理条件, $G_2=G_1, p_{1i}\in G_1, i=1,2,\cdots,s$及式(7)(8), 可得存在适当的矩阵$\theta(x)$, $\upsilon(x)$与$\rho(x)$使得

$$f_1(x)=f(x)+g(x)\theta(x),\ p_1(x)=g(x)\upsilon(x),$$
$$g_1(x)=g(x)\rho(x).$$

采用与前面相同的论证过程, 可得

$$\Omega_{k-1}+L_{f_1}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp})+\sum_{j=1}^{s}L_{p_{1j}}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp})+$$
$$\sum_{i=1}^{m}L_{g_{1i}}(\Omega_{k-1}\bigcap G_1^{\perp})\subset\Omega_{k-1}+$$
$$L_f(\Omega_{k-1}\bigcap G_2^{\perp})+\sum_{j=1}^{m}L_{g_j}(\Omega_{k-1}\bigcap G_2^{\perp}).$$

因此, 算法(4)与算法(10)产生同样的分布.

证毕.

4　一个例子 (An example)

考虑一个定义在$\mathbb{R}^5$上两个输入、两个输出的非线性奇异系统, 代数约束维数 $s=1$, 其结构元素为

$$f_1(x)=\begin{bmatrix}x_2 & 0 & x_1x_4 & x_3^2 & x_1\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$
$$p_{11}(x)=\begin{bmatrix}1 & x_3 & 1 & x_1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$
$$g_{11}(x)=\begin{bmatrix}1 & x_3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$
$$g_{12}(x)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & x_1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$
$$f_2(x)=x_2,\ p_{21}(x)=0,\ g_{21}(x)=1,$$
$$g_{22}(x)=0,\ h_1(x)=x_1,\ h_2(x)=x_2.$$

可以验证系统满足定理1的条件. 首先, 由算法(4), 参见文献[8], 有

$$W_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}1&0\\x_3&0\end{bmatrix}.$$

这样, $\sigma_0=2,\ \rho_0=1$, 能选择$S_0=[-x_3\ \ 1]$, 因此有

$$\Omega_0\bigcap G_1^{\perp}=\operatorname{span}\{S_0W_0(x)\}=\operatorname{span}\{\omega\},$$

其中$\omega=(-x_3\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$. 由简单计算可得

$$L_{f_1}\omega=(-x_1x_4\ \ -x_3\ \ 0\ \ 0\ \ 0),$$
$$L_{p_{11}}\omega=(-1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0),$$
$$L_{g_{11}}\omega=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0),$$
$$L_{g_{12}}\omega=(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0).$$

这样, 作为Ω_1的基, 可选择$W_1(x)$为

$$W_1(x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},$$

因此

$$A_1(x)=W_1(x)G_1(x)=\begin{bmatrix}1&x_3&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm T}.$$

这说明对所有x, $\rho_1=2$, 算法结束. 因此, Ω_{k^*}由$W_1(x)$的行生成, 且

$$(\Omega_{k^*})^{\perp}=\ker(W_1)=\operatorname{span}\left\{\begin{matrix}[0\ 0\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm T}\\ [0\ 0\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm T}\end{matrix}\right\}.$$

下面利用状态反馈将系统转化为非线性系统. 选择反馈$u=\gamma(x)z+v$, 其中$\gamma(x)=[-1\ \ \ 0]^{\mathrm T}$. 可验证$[p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]=-1$为非奇异. 由于

$$f(x)=f_1(x)+[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}f_2(x)=[x_2\ \ 0\ \ x_1x_4-x_2\ \ x_3^2-x_1x_2\ \ x_1]^{\mathrm T},$$
$$g(x)=g_1(x)+[p_1(x)+g_1(x)\gamma(x)][p_2(x)+g_2(x)\gamma(x)]^{-1}g_2(x)=\begin{bmatrix}1&x_3&-1&-x_1&1\\0&0&1&x_1&0\end{bmatrix}^{\mathrm T}.$$

根据算法(10), 参见文献[1], 有

$$W_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}1&0\\x_3&0\end{bmatrix}.$$

这样, $\sigma_0=2,\ \rho_0=1$, 能选择$S_0=[-x_3\ \ 1]$, 因此有

$$\Omega_0\bigcap G_2^{\perp}=\operatorname{span}\{S_0W_0(x)\}=\operatorname{span}\{\omega\}.$$

其中$\omega=(-x_3\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$. 由简单计算可得

$$L_f\omega=(-x_1x_4-x_2\ \ -x_3\ \ 0\ \ 0\ \ 0),$$
$$L_{g_1}\omega=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0),\ L_{g_2}\omega=(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0).$$

这样, 作为Ω_1的基, 可选择$W_1(x)$为

$$W_1(x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},$$

因此

$$A_1(x) = W_1(x)G_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

这说明对所有 x, $\rho_1 = 2$, 算法结束. 事实上, 建立$S_1 = [-x_3 \quad 1 \quad 0]$, 容易发现

$$S_1(x)W_1(x) = S_0(x)W_0(x) = \omega,$$

这蕴涵

$$L_f(\Omega_1 \bigcap G_2^{\perp}) \subset \Omega_1,\ L_{g_1}(\Omega_1 \bigcap G_2^{\perp}) \subset \Omega_1,$$
$$L_{g_2}(\Omega_1 \bigcap G_2^{\perp}) \subset \Omega_1,$$

即$k^* = 1$. 因此, Ω_{k^*}由$W_1(x)$的行生成, 且

$$(\Omega_{k^*})^{\perp} = \ker(W_1) = \operatorname{span}\left\{\begin{matrix} [0\ 0\ 0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}} \\ [0\ 0\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}} \end{matrix}\right\}.$$

由此, 关于非线性奇异系统的算法(4)与关于一般非线性系统的算法(10)产生同样的分布.

5 结论(Conclusion)

通过本文的讨论可知道: 在一定条件下, 利用文献[8]中所提出的非线性奇异系统的受控不变分布算法所得到的分布, 也是将非线性奇异系统经过状态反馈转化为正常非线性系统的受控不变分布. 由于文献[8]中所提出的非线性奇异系统的受控不变分布算法仅依赖于构成非线性奇异系统的原始要素, 不含有构成状态反馈的不确定因子, 特别是仅利用构成微分方程的结构因子可方便地获得该系统的受控不变分布, 这为进一步研究非线性奇异系统的一些控制问题提供一些理论工具. 特别是为研究非线性奇异系统的反馈系统(可能是正常非线性系统)提供一些理论工具.

利用本文提出的非线性奇异系统的受控不变分布理论, 可进一步研究系统的结构分解、输入输出解耦、干扰解耦和输出跟踪等控制问题.

参考文献(References):

[1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. Third Edition. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995.

[2] DAI L Y. *Singular Control Systems*[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[3] KAWAJL S, TAHA E Z. Feedback linearization of a class nonlinear descriptor systems[C]// *Proc of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista*. New York: IEEE Library, 1994: 4035 – 4037.

[4] CHEN L S, LIU X P. Noninteracting control for a class of nonlinear differential-algebraic systems[C]// *Proc of the 13 th IFAC World Congress, San Francisco*. Oxford: Elsevier Science Ltd, 1996, volE: 245 – 250.

[5] LIU X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems[J]. *Int J Control*, 1998, 70(5): 686 – 702.

[6] LIU X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic control systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 393 – 397.

[7] LIU Y Q, LI Y Q. Stabilization of nonlinear singular systems[C]// *Proc of American Control Conference, Philadelphia*. New York: IEEE Customer Service, 1998: 2532 – 2535.

[8] 王文涛, 刘晓平, 赵军. 非线性奇异系统的受控不变分布及其不变性[J]. 自动化学报, 2004, 30(6): 911 – 919.
(WANG Wentao, LIU Xiaoping, ZHAO Jun. Controlled invariant distributions of nonlinear singular systems and thire invariant properties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(6): 911 – 919.)

[9] 王文涛, 刘晓平, 赵军. 非线性奇异系统的能控性子分布[J]. 自动化学报, 2004, 30(5): 716 – 722.
(WANG Wentao, LIU Xiaoping, ZHAO Jun. Controlled invariant distributions of nonlinear singular systems and thire invariant properties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(5): 716 – 722.)

作者简介:

王文涛 (1956—), 男, 沈阳工业大学教授、博士, 主要研究方向为微分几何、非线性控制系统, E-mail: wwtlxy@163.com.