文章编号: 1000−8152(2008)01−0021−06

导数反馈下闭环广义系统的稳定性

滕毓发[1,2,3]， 张庆灵[1,3]

(1. 东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110004; 2. 徐州空军学院 基础部, 江苏 徐州 221000;

3. 东北大学 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 针对导数反馈下闭环广义系统的稳定性问题, 利用一种受限等价意义下的矩阵束分解[5], 首先给出在不同动态阶(从最小到最大阶)下消除脉冲行为的充分条件. 并根据各种动态阶, 分别给出导数反馈控制器的设计方法. 进而给出导数反馈下闭环广义系统稳定及局部导数反馈下闭环广义关联大系统的分散稳定的充分条件. 最后用数值算例来验证所给结果的有效性.

关键词: 闭环广义系统; 导数反馈; K–脉冲能控; L–脉冲能控; 动态阶; 稳定

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Stabilization for the closed-loop descriptor system via derivative feedback

TENG Yu-fa[1,2,3]， ZHANG Qing-ling[1,3]

(1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004 China;
2. Department of Fundamental Courses, Xuzhou Air Force Academy, Xuzhou Jiangsu 221000 China;
3. Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry, Ministry of Education,
Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004 China)

Abstract: The stabilization for the closed-loop descriptor systems under the derivative feedback is studied by using the decomposition of matrix pencils under a sense of limited equivalence. The sufficient conditions are obtained for the elimination of pulse behavior under dynamic orders (from minimum to maximum). Different methods are then given for the design of derivative feedback controllers according to the orders. Furthermore, sufficient conditions are given for both the stabilization for the closed-loop descriptor systems under derivative feedback and the decentralized stabilization for the closed-loop large-scale interconnected descriptor systems under partial derivative feedback. A numerical example is given to verify the effectiveness of the results.

Key words: closed-loop descriptor system; derivative feedback; K-impulse controllability; L-impulse controllability; dynamic order; stabilization

1 引言(Introduction)

导数反馈在关于广义系统消除脉冲问题上的理论价值和意义, 已经有一些这方面的研究结果, 但由于微分(导数) 反馈控制器在实际处理时的负面影响, 很少关注这方面的研究和利用, 特别是在镇定等问题上几乎无人问津. 然而随着计算机科学的迅速发展, 降低导数反馈在实际运用中的负面影响, 逐步提高导数反馈的实际运用效果. 根据导数反馈在消除脉冲模式上的特点, 来研究和探讨导数反馈在稳定性方面的作用一样有很重要的意义.

2 准备知识(Preparation)

考虑广义系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 分别为状态向量、输入向量. $\operatorname{rank} E = n_1 < n, n = n_1 + n_2, B_{n\times m}$列满秩, 系统(1)是正则的.

引入导数反馈

$$u = Kx - L\dot{x} + v, \tag{2}$$

得到闭环系统

$$(E + BL)\dot{x} = (A + BK)x + v. \tag{3}$$

定义[1]　系统 (1)导数反馈可镇定是指存在矩阵K, L, 使得系统(3)正则、无脉冲、稳定.

不妨记

$$E = \overline{P}\begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\overline{Q},\ \ A = \overline{P}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\overline{Q},$$

收稿日期: 2006−05−11; 收修改稿日期: 2006−12−13.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(51685168); 教育部重点科研基金资助项目(02152).

$$B=\overline{P}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}\widetilde{Q},$$

其中$\overline{P},\overline{Q},\widetilde{Q},E_1$分别是适当维数的非奇异矩阵, 且

$$B_1=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&I_2\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}I_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}A_{13}&A_{14}\\A_{23}&A_{24}\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}A_{31}&A_{32}\\A_{41}&A_{42}\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}A_{33}&A_{34}\\A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}.$$

引理 1 [5]

$$\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix}-\text{rank}\,B\leqslant$$
$$\text{rank}\,[E+BL]\leqslant\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix},$$

并且随着L的变动, rank $[E+BL]$取遍上述不等式所描述的闭区间上任何整数值.

引理 2 [3] 系统(1)无脉冲的充分必要条件是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}E&A\\\mathbf{0}&E\end{bmatrix}=n+\text{rank}\,E.\tag{4}$$

引理 3 [5] a) 系统(1)正则的充分必要条件是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}A_3&A_4\end{bmatrix}=n_2,\text{rank}\begin{bmatrix}A_2^{\mathrm{T}}&A_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=n_2;\tag{5}$$

b) 系统(1)正则、无脉冲的充分必要条件

$$\text{rank}\,A_4=n_2.\tag{6}$$

引理 4 [5] a) 系统(1) $K-$脉冲可控的充要条件是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}=n-\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix};\tag{7}$$

b) 系统(1)L–脉冲可控的充要条件是

$$\text{rank}\begin{bmatrix}-\begin{pmatrix}A_{41}&A_{42}\end{pmatrix}E_1^{-1}\begin{bmatrix}I_2\\\mathbf{0}\end{bmatrix}&A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}=$$
$$n-\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix},\tag{8}$$

此处K–脉冲可控与L–脉冲可控分别表示在一般反馈和导数反馈意义下的脉冲可控.

$\forall M\in\mathbb{R}^{s\times t}$, 记 M 的左化零矩阵 $S_M=\ker M$, 右化零矩阵$T_M^{\mathrm{T}}=\ker M^{\mathrm{T}}$, 且 rank $S_M=t-$ rank M, rank $T_M=s-$ rank M.

3 闭环系统无脉冲的导数反馈控制器的设计问题(最大动态阶下的情形)(Design of the impulse-free derivative feedback controller for closed-loop systems (in the condition of maximum dynamic rank))

定理 1 如果rank $A_{44}=n-\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix}$ 则存在导数反馈

$$u=-\widetilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&B_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\overline{Q}^{-1}\dot{x},\tag{9}$$

使得闭环系统$(E+BL)\dot{x}=Ax$无脉冲.

证 由于闭环系统无脉冲等价于

$$\text{rank}\begin{bmatrix}E+BL&A\\\mathbf{0}&E+BL\end{bmatrix}=n+\text{rank}\,[E+BL].\tag{10}$$

只需证明满足式(9)中的 L, 使得式(10)成立. 为此把式(9)代入式(10)比较容易看出

$$\text{rank}\begin{bmatrix}E+BL&A\\\mathbf{0}&E+BL\end{bmatrix}=$$
$$\text{rank}\begin{bmatrix}E_1&\mathbf{0}&A_1&A_2\\\mathbf{0}&\begin{pmatrix}I_1\\\mathbf{0}\end{pmatrix}&A_3&A_4\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&E_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\begin{pmatrix}I_1&\mathbf{0}\end{pmatrix}\end{bmatrix}=$$
$$n+\text{rank}\,[E+BL],$$

于是定理1得到证明. 证毕.

定理 2 如果系统(1)K–脉冲可控, 即

$$\text{rank}\begin{bmatrix}A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}=n-\text{rank}\begin{bmatrix}E&B\end{bmatrix},\tag{11}$$

则存在导数反馈

$$u=-\widetilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&S^{\mathrm{T}}_{[A_{43}\ \ A_{44}]}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\overline{Q}^{-1}\dot{x},\tag{12}$$

使得闭环系统 $(E+BL)\dot{x}=Ax$ 无脉冲.

证 先取

$$L=\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\begin{pmatrix}L_{13}&L_{14}\end{pmatrix}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1},$$

其中$\begin{bmatrix}L_{13}&L_{14}\end{bmatrix}$行满秩. 代入式(10)

$$\text{rank}\begin{bmatrix}E+BL&A\\\mathbf{0}&E+BL\end{bmatrix}=$$
$$\text{rank}\begin{bmatrix}E_1&\mathbf{0}&A_1&A_2\\\mathbf{0}&\begin{bmatrix}(L_{13}\ L_{14})\\\mathbf{0}\end{bmatrix}&A_3&A_4\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&E_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\begin{bmatrix}(L_{13}\ L_{14})\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\end{bmatrix},$$

可以看出, 当且仅当

$$\text{rank}\begin{bmatrix}L_{13}\ L_{14}\\A_{43}\ A_{44}\end{bmatrix}=n-\text{rank}\,E$$

时式(10)成立. 其中rank$\begin{bmatrix}A_{43}&A_{44}\end{bmatrix}$行满秩. 于是只要选取$\begin{bmatrix}L_{13}&L_{14}\end{bmatrix}=S^{\mathrm{T}}_{[A_{43}\ \ A_{44}]}$即可, 定理2得证. 证毕.

定理 3 如果系统 (1) L–脉冲可控, 即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -\left(A_{41}\ A_{42}\right)E_1^{-1}\begin{bmatrix} I_2 \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} & A_{43}\ A_{44}\end{bmatrix} = n-\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & B\end{bmatrix}, \tag{13}$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & S^{\mathrm{T}}_{\left[\bar{A}_{43}\ \bar{A}_{44}\right]} \\ \mathbf{0} & \left(L_{23}\ \ L_{24}\right)\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}\dot{x}, \tag{14}$$

使得闭环系统$(E+BL)\dot{x}=Ax$无脉冲. 其中L_{23}, L_{24}使得

$$\begin{aligned}&\left[\bar{A}_{43}\ \bar{A}_{44}\right]=\\&\left[A_{43}\ A_{44}\right]-\left[A_{41}\ A_{42}\right]E_1^{-1}\begin{pmatrix}L_{23}\ L_{24}\\ \mathbf{0}\ \ \ \mathbf{0}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

行满秩.

推论 若闭环系统 (3) 正则、无脉冲, 则存在矩阵 L, 非奇异矩阵 P, Q, 使得

$$\begin{cases} E+BL=P\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q,\\ A=P\begin{bmatrix}\tilde{J} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & I_{n-\tilde{r}}\end{bmatrix}Q,\\ B=P\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\end{bmatrix},\\ \tilde{r}=\operatorname{rank}\left[E+BL\right].\end{cases} \tag{16}$$

4 一般情形下的导数反馈控制器的设计(Design of the derivative feedback controller in common conditions)

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\left[E\ \ B\right]-\operatorname{rank}B\leqslant\\&\operatorname{rank}\left[E+BL\right]\leqslant\operatorname{rank}\left[E\ \ B\right],\end{aligned} \tag{17}$$

考虑

$$L=\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\left(L_{11}\ L_{12}\right) & \left(L_{13}\ L_{14}\right)\\ \left(L_{21}\ L_{22}\right) & \left(L_{23}\ L_{24}\right)\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}, \tag{18}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\left[E+BL\right]=\\&\bar{P}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}E_{11}\\E_{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L_{21}\ L_{22}\\ \mathbf{0}\ \ \ \mathbf{0}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}L_{23}\ L_{24}\\ \mathbf{0}\ \ \ \mathbf{0}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}L_{11}\ L_{12}\\ \mathbf{0}\ \ \ \mathbf{0}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}L_{13}\ L_{14}\\ \mathbf{0}\ \ \ \mathbf{0}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\bar{Q}.\end{aligned} \tag{19}$$

1) 最小动态阶的情形:

$$\operatorname{rank}\left(E+BL\right)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E & B\end{bmatrix}-\operatorname{rank}B.$$

定理 4 如果

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_{12} & \mathbf{0}\\ \left(A_{11}\ A_{12}\right) & \left(A_{13}\ A_{14}\right)\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=n, \tag{20}$$

则存在导数反馈

$$u=\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ E_{11} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}\dot{x}, \tag{21}$$

使得闭环系统 $(E+BL)\dot{x}=Ax$ 无脉冲.

证 由于最小动态阶是指$E_{11}+\left(L_{21}\ L_{22}\right)=0$, 于是取

$$L=\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -E_{11} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1},$$

由式 (10) 得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\E_{12}\end{pmatrix} & A_1 & A_2\\ \mathbf{0} & A_3 & A_4\\ \mathbf{0} & \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\E_{12}\end{pmatrix} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=n+\operatorname{rank}E_{12}$$

$$\Rightarrow\quad\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_{12} & \mathbf{0}\\ \left(A_{11}\ A_{12}\right) & \left(A_{13}\ A_{14}\right)\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}=n.$$

定理4 得证. 证毕.

2) 动态阶: $\operatorname{rank}[E\ \ B]-\operatorname{rank}B\leqslant\operatorname{rank}\,(E+BL)\leqslant\operatorname{rank}E$ 的情形.

定理 5 如果存在矩阵$L_{\Omega_1}, L_{\Omega_2}$, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_{12} & \mathbf{0}\\ L_{\bar{\Omega}_1}\left(A_{11}\ A_{12}\right) & L_{\bar{\Omega}_1}\left(A_{13}\ A_{14}\right)L_{\bar{\Omega}_2}\\ A_3 & A_4L_{\bar{\Omega}_2}\end{bmatrix}=n-r, \tag{22}$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -E_{11} & L_{\Omega_1,\Omega_2}\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}\dot{x}, \tag{23}$$

使闭环系统$(E+BL)\dot{x}=Ax$ 无脉冲.

此处, $\Omega_1, \Omega_2, \bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$分别是元素由小到大排列的$\{1,2,\cdots,m_2\}, \{1,2,\cdots,n_2\}$的一个子集. $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$是$\Omega_1, \Omega_2$关于$\{1,2,\cdots,m_2\}, \{1,2,\cdots,n_2\}$的补集. L_{Ω_1}, L_{Ω_2}分别是将m_2, n_2维单位矩阵对应Ω_1, Ω_2的元素所对应的行、列位置1保留, 其余位置置为0. L_{Ω_1,Ω_2}是$m_2\times n_2$维矩阵, Ω_1, Ω_2的元素所对应的行、列位置为1, 其余位置为0. 并记$\operatorname{rank}L_{\Omega_1,\Omega_2}=r$, 以下类同.

证 依题意, 选取

$$L=\tilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \left(L_{21}\ L_{22}\right) & \left(L_{23}\ L_{24}\right)\end{bmatrix}\bar{Q}^{-1}, \tag{24}$$

同样选取$\begin{pmatrix}L_{21}\,L_{22}\end{pmatrix}=-E_{11}$, 式(10)变成

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\E_{12}\end{pmatrix} & (L_{23}\,L_{24}) & (A_{11}\,A_{12}) & (A_{13}\,A_{14})\\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3 & A_4\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\E_{12}\end{pmatrix} & \begin{matrix}(L_{23}\,L_{24})\\ \mathbf{0}\end{matrix}\end{bmatrix}=$$

$$n+\operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\E_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_{23}\,L_{24}\\ \mathbf{0}\quad\mathbf{0}\end{pmatrix}\right], \tag{25}$$

推得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}(L_{23}\,L_{24}) & (A_{11}\,A_{12}) & (A_{13}\,A_{14})\\ \mathbf{0} & E_{12} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_3 & A_4\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (L_{23}\,L_{24})\end{bmatrix}=$$

$$n+\operatorname{rank}\begin{pmatrix}L_{23}\,L_{24}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}T\,(A_{11},A_{12})\,T\,(A_{13},A_{14})\,S\\ E_{12} \qquad \mathbf{0}\\ A_3 \qquad A_4\end{bmatrix}=$$

$$n-\operatorname{rank}\begin{pmatrix}L_{23}\,L_{24}\end{pmatrix}. \tag{27}$$

此处$T=T_{(L_{23}L_{24})}, S=S_{(L_{23}L_{24})}$.

结合式(22), 定理5得证. 证毕.

定理 6 如果存在矩阵$L_{\Omega_1},L_{\Omega_2}$, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_{12} & \mathbf{0}\\ L_{\bar\Omega_1}(A_{11},A_{12})\,L_{\bar\Omega_2} & L_{\bar\Omega_1}(A_{13},A_{14})\\ A_3L_{\bar\Omega_2} & A_4\end{bmatrix}=n-r, \tag{28}$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde Q^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -E_{11}+L_{\Omega_1,\Omega_2} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\bar Q^{-1}\dot x, \tag{29}$$

使闭环系统$(E+BL)\dot x=Ax$无脉冲. 此处, Ω_1,Ω_2分为$\{1,2,\cdots,m_2\}$, $\{1,2,\cdots,n_1\}$的一个子集. 且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}L_{\Omega_1,\Omega_2}\\E_{12}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}E_{12}+r. \tag{30}$$

定理 7 如果存在矩阵$L_{\Omega_1},L_{\Omega_2},L_{\Omega_1'},L_{\Omega_2'}$, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_{12} & \mathbf{0}\\ L_{\bar\Omega_1'}\;\;L_{\bar\Omega_1}\;\;(A_{11},A_{12})\,L_{\bar\Omega_2} & L_{\bar\Omega_1'}\;\;L_{\bar\Omega_1}\;\;(A_{13},A_{14})\,L_{\bar\Omega_2'}\\ A_3L_{\bar\Omega_2} & A_4L_{\bar\Omega_2'}\end{bmatrix}=n-r, \tag{31}$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde Q^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ -E_{11}+L_{\Omega_1,\Omega_2}L_{\Omega_1',\Omega_2'}\end{bmatrix}\bar Q^{-1}\dot x, \tag{32}$$

使闭环系统$(E+BL)\dot x=Ax$无脉冲. 此处, Ω_1,Ω_1'; Ω_2,Ω_2'分别是$\{1,2,\cdots,m_2\}$; $\{1,2,\cdots,n_1\}$, $\{1,2,\cdots,n_2\}$的子集.

3) 动态阶: $\operatorname{rank}E\leqslant\operatorname{rank}(E+BL)\leqslant\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E & B\end{bmatrix}$的情形.

定理 8 如果存在矩阵$L_{\Omega_1},L_{\Omega_2}$, 使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}L_{\bar\Omega_1}\begin{pmatrix}A_{33}\,A_{34}\end{pmatrix}L_{\bar\Omega_2}\\ \begin{pmatrix}A_{43}\,A_{44}\end{pmatrix}L_{\bar\Omega_2}\end{bmatrix}=n_2-r, \tag{33}$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde Q^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & L_{\Omega_1,\Omega_2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\bar Q^{-1}\dot x, \tag{34}$$

使闭环系统$(E+BL)\dot x=Ax$无脉冲. 此处, Ω_1,Ω_2分别是$\{1,2,\cdots,m_1\}$, $\{1,2,\cdots,n_2\}$的一个子集.

定理 9 如果存在矩阵$L_{\Omega_1},L_{\Omega_2},\begin{pmatrix}L_{23}\,L_{24}\end{pmatrix}$使得

$$\begin{bmatrix}L_{\bar\Omega_1}\left\{(A_{33},A_{34})-(A_{31},A_{32})\,E_1^{-1}\begin{pmatrix}L_{23},L_{24}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\right\}L_{\bar\Omega_2}\\ \left\{(A_{43},A_{44})-(A_{41},A_{42})\,E_1^{-1}\begin{pmatrix}L_{23},L_{24}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\right\}L_{\bar\Omega_2}\end{bmatrix}=$$

$$n_2-r,$$

则存在导数反馈

$$u=-\tilde Q^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & L_{\Omega_1,\Omega_2}\\ \mathbf{0} & (L_{23}\,L_{24})\end{bmatrix}\bar Q^{-1}\dot x,$$

使闭环系统$(E+BL)\dot x=Ax$无脉冲. 其中L_{23},L_{24}使得

$$\begin{bmatrix}\bar A_{43}\,\bar A_{44}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}A_{43}\,A_{44}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A_{41}\,A_{42}\end{bmatrix}E_1^{-1}\begin{pmatrix}L_{23}\,L_{24}\\ \mathbf{0}\quad\mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{35}$$

行满秩. 此处, Ω_1,Ω_2分别是$\{1,2,\cdots,m_1\}$, $\{1,2,\cdots,n_2\}$的一个子集合.

5 导数反馈下广义系统的可镇定问题(最大动态阶下的情形, 同样适合一般情形) (Stabilization for descriptor systems under derivative feedback)

记$E_L=E+BL$, $\tilde r=\operatorname{rank}[E+BL]$.

引理 5 系统(1) 正则、无脉冲、稳定的充分必

要条件是存在可逆矩阵P, 使得

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A < 0$$

或

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, P^{-\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + AP^{-1} < 0. \quad (36)$$

定理 10 如果系统(1) L–脉冲可控, 且存在对称正定矩阵T_1, 适当维数矩阵T_2, 及常数$k_1 > 0, k_2 > 0$, 使得

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

成立, 则必存在导数反$u = Kx - L\dot{x}$, 使得闭环系统(3) 是正则、无脉冲、稳定的, 即系统(1) 是导数反馈可镇定的. 此处

$$F_{11} = \tilde{J}^{\mathrm{T}}T_1 + T_1\tilde{J} - 2k_1 \begin{bmatrix} T_1 \, T_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tilde{B}\tilde{B}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix},$$

$$F_{22} = -2I - 2k_2\tilde{B}_2\tilde{B}_2^{\mathrm{T}},$$

$$F_{21} = F_{12}^{\mathrm{T}} = (k_1 + k_2)\tilde{B}_2\tilde{B}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + T_2.$$

此时的状态反馈矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} -k_1\tilde{B}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} & k_2\tilde{B}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} Q.$$

证 系统(1) 可镇定的充分必要条件是存在可逆矩阵T, 及K, L, 使得

$$\begin{cases} E_L^{\mathrm{T}}T = T^{\mathrm{T}}E_L \geqslant 0, \\ (A + BK)^{\mathrm{T}}T + T^{\mathrm{T}}(A + BK) < 0 \end{cases} \quad (38)$$

成立. 其中

$$T = P^{-T} \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{bmatrix} Q, K = \tilde{K}Q = \begin{bmatrix} K_1 \, K_2 \end{bmatrix} Q.$$

这里$T_1 = T_1^{\mathrm{T}} > 0, T_3$ 非奇异. 式(38) 第1个不等式显然成立, 第2个不等式变成

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (39)$$

其中:

$$G_{11} = \tilde{J}^{\mathrm{T}}T_1 + T_1\tilde{J} + K_1^{\mathrm{T}}\tilde{B}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 \; T_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tilde{B}K_1,$$

$$G_{12} = G_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} T_1 \, T_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tilde{B}K_2 + T_2^{\mathrm{T}} + K_1^{\mathrm{T}}\tilde{B}_2^{\mathrm{T}}T_3,$$

$$G_{22} = T_3 + T_3^{\mathrm{T}} + T_3^{\mathrm{T}}\tilde{B}_2K_2 + K_2^{\mathrm{T}}\tilde{B}_2^{\mathrm{T}}T_3.$$

不失一般性不妨取$T_3 = -I$, 及

$$K = [K_1 \;\; K_2]\, Q = \begin{bmatrix} -k_1\tilde{B}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} & k_2\tilde{B}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} Q,$$

这样式(39)和式(37)一样了, 定理10得证. 证毕.

6 数值算例(Numerical calculation)

考虑广义系统

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (40)$$

系统(40)显然是正则, 但rank $\begin{bmatrix} E & AS_E & B \end{bmatrix} = 2$, 所以系统(40) 不是脉冲能控的. 但选取导数反馈

$$u = -\begin{bmatrix} 1 \, 0 \, {-1} \end{bmatrix} \dot{x} + Bv, \quad (41)$$

得到的闭环系统

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v, \quad (42)$$

有rank $\begin{bmatrix} E_L \, AS_{E_L} \, B \end{bmatrix} = 3$, 即闭环系统(42)是正则、无脉冲的.

如果再选取一般反

$$v = \begin{bmatrix} k_1 \, k_2 \, k_3 \end{bmatrix} x + \omega, k_1 < 0, k_2 < -1, \forall k_3, \quad (43)$$

得到的闭环系统

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2{+}1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega$$

是正则、无脉冲的、稳定的, 或称系统(40)在导数反馈意义下是可镇定的.

7 广义关联大系统分散导数反馈下可镇定问题(Stabilization for interconnected large-scale descriptor systems under decentralized derivative feedback)

考虑关联广义大系统:

$$E_i\dot{x}_i = A_ix_i + B_iu_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij}x_j, i = 1, 2, \cdots, N, \quad (44)$$

其中: $E_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$ 为奇异矩阵, B_i 列满秩, (E_i, A_i) 正则. 记$E = \operatorname{blockdiag}\{E_1, E_2, \cdots, E_N\}$, 对角分块矩阵$A, B$类似. 以下定义的对角分块矩阵$P, K$亦类似. 而$H = (A_{ij})_{N\times N}, A_{ii} = 0$.

引入分散导数反馈

$$u_i = K_ix_i - L_i\dot{x}_i, \quad (45)$$

得到闭环系统

$$(E_i + B_iL_i)\dot{x}_i = (A_i + B_iK_i)x_i + B_iv_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij}x_j, i = 1, 2, \cdots, N. \quad (46)$$

定理 11 设子系统(E_i, A_i, B_i)分散L_i–脉冲能控, 且存在对称正定矩阵T_{1i}, 适当维数矩阵T_{2i}, 及常

数$k_{1i} > 0, k_{2i} > 0, \varepsilon_i > 0$, 使得

$$F_i = \begin{bmatrix} F_{11i} & F_{12i} \\ F_{21i} & F_{22i} \end{bmatrix} < 0 \tag{47}$$

成立, 则必存在分散导数反(45), 使得闭环系统(46)是正则、无脉冲、稳定的, 即系统(45) 在导数反馈下可分散镇定. 其分散状态反馈控制矩阵为

$$\begin{aligned} K_i &= \left[-k_{1i} B_i^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \end{bmatrix} k_{2i} B_{2i}^{\mathrm{T}} \right] Q_i, \\ L_i &= \tilde{Q}_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 & S^{\mathrm{T}}_{[\bar{A}_{43i} \quad \bar{A}_{44i}]} \\ 0 & \left(L_{23i} \, L_{24i} \right) \end{bmatrix} \bar{Q}_i^{-1}. \end{aligned} \tag{48}$$

其中:

$$\begin{aligned} F_{11i} = {} & \tilde{J}_i^{\mathrm{T}} T_{1i} + T_{1i} \tilde{J}_i - 2k_{1i} \left[T_{1i} \, T_{2i}^{\mathrm{T}} \right] \tilde{B}_i \tilde{B}_i^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \end{bmatrix} + \\ & \varepsilon_i l_i \left[T_{1i} \, T_{2i}^{\mathrm{T}} \right] \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \end{bmatrix} + \\ & \varepsilon_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \delta(\tilde{A}_{ji}) \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{11}, \\ F_{21i} = {} & F_{12i}^{\mathrm{T}} = (k_{1i} + k_{2i}) B_{2i} \tilde{B}_i^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \end{bmatrix} + \\ & (1 - \varepsilon_i l_i) T_{2i} + \varepsilon_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \delta(\tilde{A}_{ji}) \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{21}, \\ F_{22i} = {} & -(2 - \varepsilon_i l_i) - 2k_{2i} B_{2i} B_{2i}^{\mathrm{T}} + \\ & \varepsilon_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \delta(\tilde{A}_{ji}) (\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji})_{22}. \end{aligned} \tag{49}$$

此处

$$\begin{aligned} l_i = {} & \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \delta(\tilde{A}_{ij}) \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right) = \\ & \begin{bmatrix} \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{11} & \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{12} \\ \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{21} & \left(\tilde{A}_{ji}^{\mathrm{T}} \tilde{A}_{ji} \right)_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中$H = P \left(\tilde{A}_{ij} \right)_{N \times N} Q, P, Q$ 为分块对角的.

8 结束语(Conclusion)

结合定理7和定理8, 可以看出: 在考虑一般的广义开(闭)环系统的稳定、镇定性问题时, 动态阶越小越方便调节, 因为代数方程部分本身是稳定(或镇定)的. 但对于有关联项的广义大系统问题, 代数方程部分对关联项的调节能力比较弱, 反而是动态阶越高越方便调节. 事实上对于不确定性系统也是一样情形.

参考文献(References):

[1] 张庆灵. 广义系统结构稳定的李雅谱诺夫方法[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 117 – 120.
(ZHANG Qingling. Lyapunov criteria for the structural stability in descriptor systems[J]. *J of System Science and Mathematics Science*, 1994, 14(2): 117 – 120.)

[2] STYKEL S. Stability and inertia theorems for generalized Lyapunov equations[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, 355(1): 297 – 314.

[3] 张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
(ZHANG Qingling, YANG Dongmei. *Analysis and Synthesis for Uncertain Descriptor Systems*[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003.)

[4] 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997.
(ZHANG Qingling. *Decentralized and Robust Control for Descriptor Systems*[M]. Xi'an: Northwest Polytechnics University Press, 1997.)

[5] 滕毓发, 张庆灵, 张国山. 广义系统的可能控研究[J]. 东北大学学报, 2003, 24(1): 5 – 7.
(TENG Yufa, ZHANG Qingling, ZHANG Guoshan. Study of Controllability of descriptor systems[J]. *J of Northeastern University, Supplement*, 2003, 24(1): 5 – 7.)

[6] 谢绪恺. 荆海英. 分散控制系统的固定模式[J]. 自动化学报, 1986, 12(2): 185 – 189.
(XIE Xukai, JING Haiying. Fixed mode for decentralized systems[J]. *Automation*, 1986, 12(2): 185 – 189.)

[7] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定广义线性组合系统的分散镇定与输出跟踪[J]. 信息与控制, 1998, 27(5): 342 – 350.
(LIU Xinyu, GAO Liqun, ZHANG Wenli. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems[J]. *Information and Control*, 1998, 27(5): 342 – 350.)

[8] 俞立. 一类线性离散时滞大系统的分散镇定[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 125 – 127.
(YU Li. Decentralized stabilization of a class of large-scale linear discrete time-delay systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 125 – 127.)

[9] 桂卫华, 陈宁, 吴敏. 不确定关联大系统鲁棒分散可靠 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(6): 923 – 926.
(GUI Weihua, CHEN Ning, WU Min. Decentralized robust reliable H_∞ control for uncertain large-scale interconnected systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(6): 923 – 926.)

[10] 黄苏南, 邵惠鹤. 分散控制的完整性设计[J]. 自动化学报, 1994, 20(5): 594 – 599.
(HUANG Sunan, SHAO Huihe. A design method for control systems possessing integrity[J]. *Automation*, 1994, 20(5): 594 – 599.)

[11] JOAO Y I, MARCO H T. Impulse control ability and observability of rectangular descrptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic control*, 2001, 46(6): 991 – 994.

[12] ANGELIKA B G, VOLKER M, NANCY K N. Regularization of descriptor systems by output feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic control*, 1994, 39(8): 1742 – 1748.

[13] CHU D L, HO D W C. Necessary and suff icient conditions for the output regularization of descriptor systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(2): 405 – 412.

作者简介:

滕毓发 (1964—), 男, 徐州空军学院副教授, 东北大学信息与工程学院博士, 主要研究方向为广义系统理论等, E-mail: tyufa122@sina.com, tyufa123@sohu.com;

张庆灵 (1956—), 男, 东北大学理学院院长, 控制理论与控制工程学科教授, 博士生导师, 主要研究方向为分散控制、鲁棒控制、广义系统理论等.