文章编号: 1000−8152(2008)02−0273−05

改进的全对称多胞形集员状态估计算法

柴　伟, 孙先仿

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘要: 针对带有有界的噪声和参数的非线性离散时间系统, 提出了一种改进的全对称多胞形集员状态估计算法.在算法的时间更新过程中, 采用区间算术的方法计算一个包含系统轨迹的全对称多胞形.在算法的量测更新过程中, 则要首先在状态空间中给出一个集合作为与量测输出相一致的区域的外界描述, 然后计算一个具有最小容积的全对称多胞形作为时间更新全对称多胞形与此集合的交集的外界描述.由于此集合可表示为多个带的交集, 所以需要研究全对称多胞形与带的交集的外界描述方法.在提出改进的外界描述方法之前, 指出了原始外界描述方法的保守性.改进的外界描述方法给出了新的包含二者交集的全对称多胞形族, 然后找到具有最小容积的全对称多胞形作为二者交集的外界描述. 此后证明了改进外界描述方法得到的全对称多胞形不会比原始方法大. 最后, 采用仿真实验来检验不同噪声分布对算法性能的影响.仿真结果表明了改进算法得到的状态估计的均方误差和全对称多胞形的容积比原始算法小, 而且当存在重尾分布噪声时此优势更加明显.

关键词: 非线性系统; 不确定系统; 状态估计;集员;全对称多胞形
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

An improved estimation algorithm for set membership states by zonotopes

CHAI Wei, SUN Xian-fang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract: An improved estimation algorithm for set membership states by zonotopes is proposed for nonlinear discrete-time systems with a bounded description of noise and parameters. This algorithm requires computation of a zonotope bounding the uncertain trajectory of the system using interval arithmetic in time updating. The observation update first determines a set bounding the region of the state space which is consistent with the measured output, and then computes a minimal-volume zonotope bounding the intersection of the time-updated zonotope and this set. Since this set is obtained as the intersection of strips, it is necessary to compute an outer bound of the intersection of the zonotope and the strips. The conservatism of the original outer bound computation of the intersection is pointed out before improving. The improved outer bound computation gives a new family of zonotopes containing the intersection and selects the minimal-volume one as the outer bound. It can be proved that the improved computation gives smaller zonotopes than the original one. Simulation experiments are performed to examine the influence of noise distributions on the performance of the algorithms. The results show that the improved algorithm has better performance than the original one in terms of mean-square errors and zonotope volumes especially in the presence of uniformly heavy-tailed noise.

Key words: nonlinear systems; uncertain systems; state estimation; set membership; zonotopes

1　引言(Introduction)

经典的状态估计方法一般都是假定系统噪声为随机噪声且满足某一概率分布, 例如卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波. 卡尔曼滤波是针对线性系统而提出的, 在假设噪声为零均、高斯白噪声的条件下, 它可以给出系统状态的线性最小方差无偏估计. 对非线性系统, 相应的就是扩展卡尔曼滤波. 尽管基于随机噪声假设的滤波方法取得了广泛的应用, 但是仍然存在一些问题. 例如, 实际噪声的统计特性往往难以得到, 这直接影响了估计的效果; 还有, 系统状态的不确定性是由置信区间来描述的, 而置信区间不是硬界描述. 解决以上问题的一种方法, 就是采用集员滤波.集员滤波是在未知但有界(unknown but bounded)噪声假设条件下的滤波方法. 与经典的状态估计相比, 由于它只要求系统噪声有界, 且噪声界已知, 而不需要知道诸如噪声分布或均值和方差等

收稿日期: 2006−05−28; 收修改稿日期: 2006−11−29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60234010, 60674030); 北京市自然科学基金资助项目(4032014).

统计特性, 因而具有适用面广、鲁棒性强等优点.

在集员滤波的研究过程中, 文献[1]首先给出了椭球状态定界算法.随后, 文献[2～5]针对此种算法进行了深入的研究. 为了提高估计精度, 文献[6]研究了多面体状态定界算法. 文献[7]则将超平行体用于描述系统状态可行集以降低复杂度. 文献[8] 针对非线性系统给出了基于区间分析的状态估计算法, 其算法精度很高, 但具有指数复杂性. 最近, 文献[9] 则针对带有有界的噪声和参数的非线性离散时间系统提出了全对称多胞形状态定界算法. 由于全对称多胞形很适合用来控制围包效应(wrapping effect)[10], 因而他们的算法显得十分有效. 不过, 其算法在某些情况下得到的结果会很保守, 主要原因是量测更新过程中所采用的全对称多胞形与带的交集的外界描述方法不够完善. 本文针对此问题提出了改进的全对称多胞形集员状态估计算法.

2 改进的全对称多胞形集员状态估计算法(Improved set membership state estimation algorithm by zonotopes)

考虑如下非线性离散时间系统模型

$$x_k = f(x_{k-1}, w_{k-1}), \tag{1}$$

$$y_k = g(x_k, v_k). \tag{2}$$

其中: 向量$x_k \in \mathbb{R}^n$和$y_k \in \mathbb{R}^p$分别为系统状态和量测量; 向量$w_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_w}$代表由系统时变参数和系统扰动所造成的不确定性; 向量$v_k \in \mathbb{R}^{p_v}$为未知的量测噪声; f和g为已知连续可微的非线性函数. 假设系统的不确定性和初始状态由有界集合描述, 即$w_{k-1} \in W_{k-1}, v_k \in V_k, x_0 \in X_0$.

本文的集员状态估计算法就是根据系统状态方程(1)和量测方程(2), 集合X_0,W_{k-1}和V_k以及量测量$y_k(k = 1, \cdots, N)$ 给出系统状态可行集X_N的全对称多胞形外界描述$\hat{X}_N$. 算法的时间更新和量测更新过程分别在2.2节和2.3节中给出. 由于在2.3节中的量测更新过程采用了改进的全对称多胞形与带的交集的外界描述方法, 因而改进算法的精度更高. 在2.2节和2.3节中的所涉及的定理1～3的证明请见文献[9].

2.1 预备符号(Preliminary notations)

介绍算法之前, 先给出一些预备符号[9,11]: 区间$X = [a, b]$ 为集合$\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$;$\boldsymbol{B} = [-1, 1]$表示单位区间; $\mathbb{I}$表示所有实区间$[a, b](a \leqslant b)$ 组成的集合;盒子就是一个区间向量; $\boldsymbol{B}^m$表示由m个单位区间组成的单位盒子; 给定盒子$Q = [[a_1, b_1], \cdots, [a_n, b_n]]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{mid}(Q) = \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, \cdots, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]^{\mathrm{T}}$表示其中心; 给定向量$p \in \mathbb{R}^n$和矩阵$H \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 集合$p \oplus H\boldsymbol{B}^m = \{p + Hz : z \in \boldsymbol{B}^m\}$ 表示一个全对称多胞形, m为多胞形的阶数;给定全对称多胞形族$Z = p \oplus \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}^m$, 其中区间矩阵$\boldsymbol{M} \in \mathbb{I}^{n\times m}$, $\diamond(Z)$表示多胞形族Z的一个全对称多胞形包含; $\square(f)$表示函数f 的一个自然区间扩展, 即将函数f中的变量由区间替代;∇f表示函数f 的梯度.

2.2 时间更新(Time update)

定理 1 对给定的非线性方程(1), 假设$x_{k-1} \in \hat{X}_{k-1}$, $w_{k-1} \in W_{k-1}$, 其中全对称多胞形$\hat{X}_{k-1} = p_{k-1} \oplus H_{k-1}\boldsymbol{B}^m$, 全对称多胞形$W_{k-1} = c_{k-1} \oplus C_{k-1}\boldsymbol{B}^{s_w}$, 考虑如下区间扩展:

1) 全对称多胞形$q_k \oplus L_k\boldsymbol{B}^d$满足$f(p_{k-1}, W_{k-1}) \subseteq q_k \oplus L_k\boldsymbol{B}^d$;

2) 区间矩阵$\boldsymbol{M}_k = \square(\nabla_x f(\hat{X}_{k-1}, W_{k-1}))H_{k-1}$;

3) 全对称多胞形

$$\begin{aligned}&\Psi(\hat{X}_{k-1}, W_{k-1}) = \\ &q_k \oplus L_k\boldsymbol{B}^d \oplus \diamond(\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{B}^m) = q_k \oplus Q_k\boldsymbol{B}^l,\\ &l = d + n + m.\end{aligned}$$

据以上假设有$f(\hat{X}_{k-1}, W_{k-1}) \subseteq \Psi(\hat{X}_{k-1}, W_{k-1})$成立.

将全对称多胞形$\overline{X}_k = \Psi(\hat{X}_{k-1}, W_{k-1})$作为$k$时刻时间更新全对称多胞形. 从定理1可见, 此多胞形的阶数会不断增加. 因而需要把多胞形的阶数适当降低, 具体算法请参考文献[9].

2.3 量测更新(Observation update)

量测更新过程需要对在状态空间中与量测量的第i个分量$(i = 1, 2, \cdots, p)$相一致的集合:

$$X_{y_{i,k}} = \{x_k : y_{i,k} \in g_i(x_k, V_k)\}$$

与全对称多胞形$\overline{X}_k$的交集进行描述. 为了简化计算, 有如下定理.

定理 2 给定全对称多胞形$\overline{X}_k$和量测量y_k, 设向量$c_{i,k} \in \mathbb{R}^n$和标量$s_{i,k}, \sigma_{i,k} \in \mathbb{R}$满足

1) $c_{i,k} = \mathrm{mid}(\square(\nabla_x g_i(\overline{X}_k, V_k)^{\mathrm{T}}))$;

2) $c_{i,k}^{\mathrm{T}}\overline{X}_k - g_i(\overline{X}_k, V_k) \subseteq [s_{i,k} - \sigma_{i,k}, s_{i,k} + \sigma_{i,k}]$.

若定义带$\overline{X}_{y_{i,k}} = \{x_k : |c_{i,k}^{\mathrm{T}}x_k - y_{i,k} - s_{i,k}| \leqslant \sigma_{i,k}\}$, 则有$\overline{X}_k \bigcap X_{y_{i,k}} \subseteq \overline{X}_k \bigcap \overline{X}_{y_{i,k}}$.

若已求得带$\overline{X}_{y_{i,k}}$, 则可将全对称多胞形

$$\hat{X}_k \supseteq \overline{X}_k \bigcap_{i=1}^{p} \overline{X}_{y_{i,k}} \tag{3}$$

作为k时刻的集员估计结果. 由式(3)可见, 完成量测更新过程需要研究全对称多胞形与带的交集的外界描述方法.

2.3.1 原始外界描述方法及其问题(Original outer bound computation and its problem)

文献[9]首先以如下定理的形式给出了一族包含二者交集的全对称多胞形.

定理 3 给定全对称多胞形$Z = p \oplus H\boldsymbol{B}^r \subset \mathbb{R}^n$, 带$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^{\mathrm{T}}x - d| \leqslant \sigma\}$和向量$\lambda \in$

$\mathbb{R}^n$. 若定义: $\hat{p}(\lambda) = p + \lambda(d - c^{\mathrm{T}}p)$, $\hat{H}(\lambda) = [(I - \lambda c^{\mathrm{T}})H \quad \sigma\lambda]$, 则有$Z \cap S \subseteq \hat{Z}(\lambda) = \hat{p}(\lambda) \oplus \hat{H}(\lambda)\boldsymbol{B}^{r+1}$.

上述参数向量λ可取任意的值, 而向量λ 的取值不同决定了所得全对称多胞形的容积不同. 文献[9]给出了此全对称多胞形容积的计算公式, 即

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}(\hat{Z}(\lambda)) = \\ &2^n \sum_{i=1}^{N(n,r)} |1 - c^{\mathrm{T}}\lambda||\det(A_i)| + \\ &2^n \sum_{i=1}^{N(n-1,r)} \sigma|\det[C_i \quad v_i]||v_i^{\mathrm{T}}\lambda|. \end{aligned} \tag{4}$$

在上式中: $N(n,r)$表示从具有r个元素的集合中选取n个元素的组合数; A_i表示从矩阵H中任取n列所得到的第i种组合矩阵$(i = 1,\cdots,N(n,r))$, 而C_i表示从矩阵H中任取$n-1$列所得到的第i种组合矩阵$(i = 1,\cdots,N(n-1,r))$; $v_i \in \mathbb{R}^n$是满足$v_i^{\mathrm{T}}v_i = 1$, 且$v_i^{\mathrm{T}}C_i = 0$的向量.由于容积是向量λ 的凸函数, 因此文献[9]指出可用凸规划的方法来确定对应于最小容积的λ值. 通过分析发现, 由定理3所给出的全对称多胞形族描述比较保守, 现举如下算例以说明这一问题.

例 1　给定全对称多胞形$Z = p \oplus H\boldsymbol{B}^3$和两个不同的带$S_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : |c^{\mathrm{T}}x - d_i| \leqslant \sigma\}(i = 1,2)$, 其中:

$$p = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix},$$
$$d_1 = 0,\ d_2 = 30,\ \sigma = 1.$$

根据定理3可得到两个全对称多胞形族$\hat{Z}_i(\lambda)(i = 1,2)$, 通过优化算法可在多胞形族中找到具有最小容积的全对称多胞形$Z_{iIN}(i = 1,2)$, 见图1.从图中可见, 全对称多胞形Z_{1IN}精度很高, 而全对称多胞形Z_{2IN} 就显得比较保守.分析定理3可以发现造成这一结果的原因.由定理3可知, 多胞形族$\hat{Z}_2(\lambda)$ 只是多胞形族$\hat{Z}_1(\lambda)$ 的平移.而由容积计算公式可见, 平移对容积的计算没有影响.因此导致两者的容积相等, 后者就比较保守.

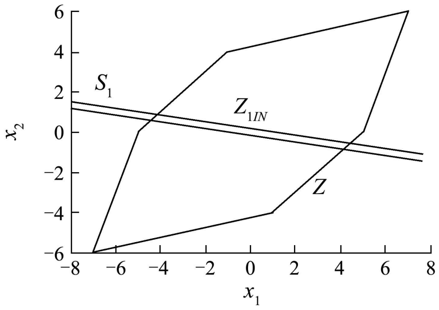

图 1(a)　Z与S_1相交

Fig. 1(a)　Intersection of Z and S_1

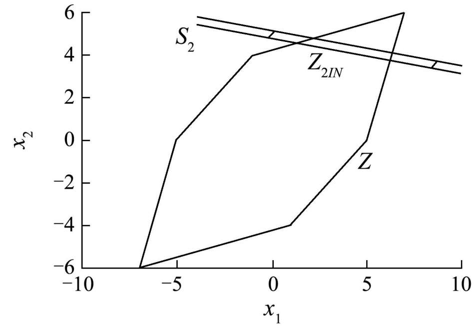

图 1(b)　Z与S_2相交

Fig. 1(b)　Intersection of Z and S_2

2.3.2　改进的外界描述方法(Improved outer bound computation)

对定理3进行改进之后, 有如下定理.

定理 4　给定全对称多胞形$Z = p \oplus H\boldsymbol{B}^r \subset \mathbb{R}^n$, 带$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^{\mathrm{T}}x - d| \leqslant \sigma\}$ 和向量$\lambda \in \mathbb{R}^n$, 设包含带$\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^r : |c^{\mathrm{T}}Hz - (d - c^{\mathrm{T}}p)| \leqslant \sigma\}$ 与盒子$\boldsymbol{B}^r$的交集的最小容积盒子为$\overline{z} \oplus T\boldsymbol{B}^r$, 其中向量$\overline{z} \in \mathbb{R}^r$, 矩阵$T \in \mathbb{R}^{r\times r}$为对角阵. 若定义: $\hat{p}'(\lambda) = p' + \lambda(d - c^{\mathrm{T}}p')$, $\hat{H}'(\lambda) = [(I - \lambda c^{\mathrm{T}})H' \quad \sigma\lambda]$, 其中$p' = p + H\overline{z}$, $H' = HT$, 则有$Z \cap S \subseteq \hat{Z}'(\lambda) = \hat{p}'(\lambda) \oplus \hat{H}'(\lambda)\boldsymbol{B}^{r+1}$.

证　任取$x \in Z \cap S$, 则有$x \in Z$, 因此存在$z \in \boldsymbol{B}^r$, 使得

$$x = p + Hz. \tag{5}$$

又由于$x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^{\mathrm{T}}x - d| \leqslant \sigma\}$, 有

$$|c^{\mathrm{T}}Hz - (d - c^{\mathrm{T}}p)| \leqslant \sigma. \tag{6}$$

再考虑到$z \in \boldsymbol{B}^r$, 可知存在一个包含带$\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^r : |c^{\mathrm{T}}Hz - (d - c^{\mathrm{T}}p)| \leqslant \sigma\}$与盒子$\boldsymbol{B}^r$的交集的最小容积盒子$\overline{z} \oplus T\boldsymbol{B}^r$, 其中向量$\overline{z} \in \mathbb{R}^r$, 矩阵$T \in \mathbb{R}^{r\times r}$为对角阵, 使得

$$z \in \overline{z} \oplus T\boldsymbol{B}^r. \tag{7}$$

即存在$z_1 \in \boldsymbol{B}^r$, 使得

$$z = \overline{z} + Tz_1. \tag{8}$$

由式(6)得

$$c^{\mathrm{T}}Hz = d - c^{\mathrm{T}}p + \sigma z_2, \tag{9}$$

其中$z_2 \in [-1,1] = \boldsymbol{B}^1$.

式(5)可以改写为

$$x = p + \lambda c^{\mathrm{T}}Hz + (I - \lambda c^{\mathrm{T}})Hz. \tag{10}$$

分别将式(8)和式(9)代入式(10)得

$$\begin{aligned} x = {}& p + \lambda(d - c^{\mathrm{T}}p + \sigma z_2) + \\ &(I - \lambda c^{\mathrm{T}})H(\overline{z} + Tz_1) = \\ &p + H\overline{z} + \lambda(d - c^{\mathrm{T}}(p + H\overline{z})) + \end{aligned}$$

$$[(I-\lambda c^{\mathrm{T}})HT \quad \sigma\lambda]\cdot\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=$$
$$p'+\lambda(d-c^{\mathrm{T}}p')+$$
$$[(I-\lambda c^{\mathrm{T}})H' \quad \sigma\lambda]\cdot\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=$$
$$\hat{p}'(\lambda)+\hat{H}'(\lambda)\cdot\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\in$$
$$\hat{p}'(\lambda)\oplus\hat{H}'(\lambda)\boldsymbol{B}^{r+1}=\hat{Z}'(\lambda). \tag{11}$$

证毕.

如下定理说明了改进外界描述方法的优点.

定理 5 改进外界描述方法得到的最小容积全对称多胞形不会比原始方法大.

证 参考第2.3.1节中列出的容积计算公式.在下面的叙述中将原公式中的符号分别加上撇号后表示改进方法中的相应符号.

考虑到$H'=HT=[T_{11}h_1,\cdots,T_{rr}h_r]$, 其中$h_i$为$H$第$i$列$(i=1,\cdots,r)$, 并考虑到$T$的对角线上的元素$T_{ii}\leqslant 1(i=1,\cdots,r)$, 有$|\det(A_i)|\geqslant|\det(A_i')|$. 进一步考虑到公式中$v_i$的取值条件, 有$v_i=v_i'$, 因此有$|\det[C_i\ \ v_i]|\geqslant|\det[C_i'\ \ v_i']|$. 由此可得$\mathrm{Vol}(\hat{Z}(\lambda))\geqslant\mathrm{Vol}(\hat{Z}'(\lambda))$.

证毕.

对算例1, 改进方法的结果由图2示出. 从图2可见, 改进方法的精度显然要比原始方法高.

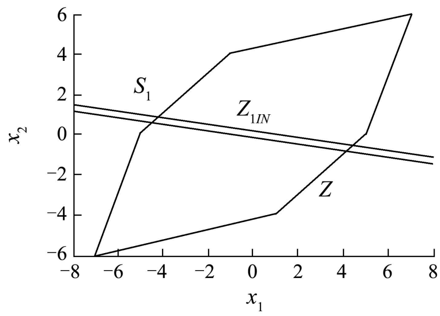

图 2(a) Z与S_1相交

Fig. 2(a) Intersection of Z and S_1

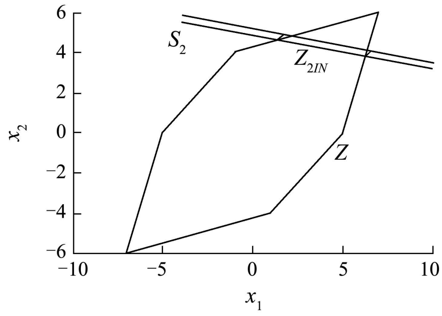

图 2(b) Z与S_2相交

Fig. 2(b) Intersection of Z and S_2

注 1 定理3和4中的带S应该是紧的, 有关紧带的定义请参看文献[12].

3 数值仿真(Numerical simulation)

给定非线性离散时间系统

$$x_{k+1}=\begin{bmatrix}-0.5\sin x_{2,k}\\x_{1,k}+(1+0.3\delta_k)\,x_{2,k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.12\\0.1\end{bmatrix}w_k, \tag{12}$$

$$y_k=[-2\ \ 1]x_k+0.02v_k. \tag{13}$$

其中: $|\delta_k|\leqslant 1, |w_k|\leqslant 1, |v_k|\leqslant 1, k=0,1,2\cdots,50$. 初始状态属于盒子$0.5\boldsymbol{B}^2$. 考虑以下两种系统的不确定性情况:

情况 1 δ_k, w_k和v_k均匀分布;

情况 2 δ_k和v_k均匀分布, w_k为重尾分布, 其概率密度函数$f(w)$满足: 当$w\in[-1,-0.9]\bigcup[0.9,1]$时, $f(w)=3.2$; 当$w\in(-0.9,0.9)$时, $f(w)=0.2$; 当$w\notin[-1,1]$时, $f(w)=0$.

每种情况各进行50次蒙特卡洛仿真. 分别运行原始算法[9]和改进算法进行状态估计. 全对称多胞形的阶数最大为40, 取全对称多胞形的中心作为状态的点估计.

表1给出了状态估计的均方误差$\overline{e}_i(i=1,2)$和平均全对称多胞形容积. 图3和图4则给出了状态真值以及所估计出的状态的上下界(其中虚线代表状态真值x_k, 实线和点线分别代表运行改进算法和原始算法得到状态x_k的上下界估计α_k^+, α_k^-和β_k^+, β_k^-).可见, 改进算法比原始算法效果要好, 并且这种优势在情况2下更加显著.

表 1 均方误差和平均容积($\times10^{-3}$)

Table 1 Mean-square errors and average volumes($\times10^{-3}$)

	情况1		情况2	
	原始算法	改进算法	原始算法	改进算法
$\overline{e}_1$	1.29201	0.72684	2.25858	0.97868
$\overline{e}_2$	5.17380	2.87490	9.08876	3.90819
容积	6.10820	4.88358	6.46283	4.32997

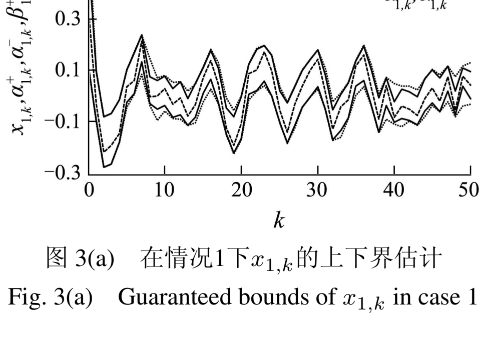

图 3(a) 在情况1下$x_{1,k}$的上下界估计

Fig. 3(a) Guaranteed bounds of $x_{1,k}$ in case 1

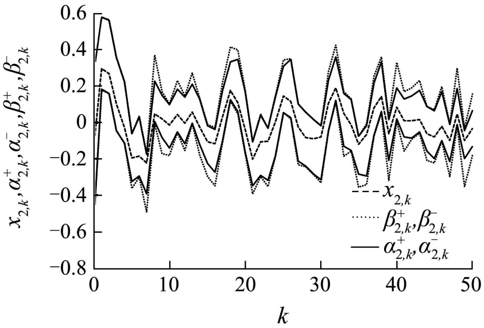

图 3(b) 在情况1下$x_{2,k}$的上下界估计

Fig. 3(b) Guaranteed bounds of $x_{2,k}$ in case 1

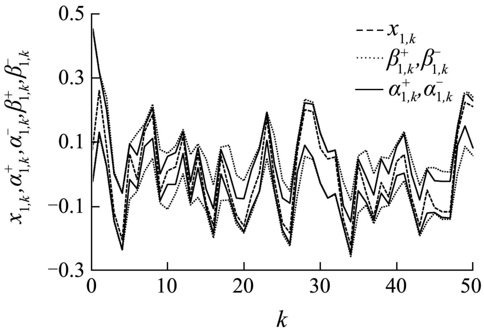

图 4(a) 在情况2下$x_{1,k}$的上下界估计

Fig. 4(a) Guaranteed bounds of $x_{1,k}$ in case 2

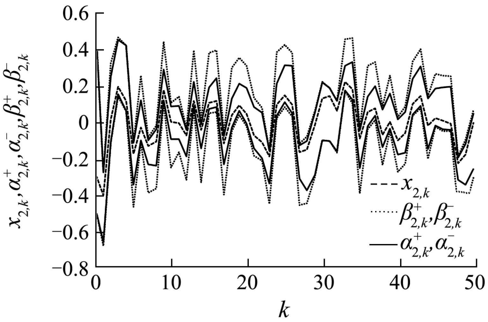

图 4(b) 在情况2下$x_{2,k}$的上下界估计

Fig. 4(b) Guaranteed bounds of $x_{2,k}$ in case 2

4 结论(Conclusion)

本文指出了文献[9]中的全对称多胞形与带的交集的外界描述方法的保守性, 然后对此外界描述方法进行了改进, 并证明了改进外界描述方法可以比原始外界描述方法得到更小的全对称多胞形, 最后将其应用到量测更新过程中, 提出了改进的全对称多胞形集员状态估计算法. 仿真结果表明, 本文提出的改进算法可以比原始算法取得更好的效果.

参考文献(References):

[1] SCHWEPPE F C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, 13(1): 22 – 28.

[2] MAKSAROV D G, NORTON J P.State bounding with ellipsoidal set description of the uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(5): 847 – 866.

[3] MAKSAROV D G, NORTON J P. Computationally efficient algorithms for state estimation with ellipsoidal approximations[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16(6): 411 – 434.

[4] DURIEU C, WALTER E, POLYAK B. Multi-input multi-output ellipsoidal state bounding[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2001, 111(2): 273 – 303.

[5] POLYAK B T, NAZIN S A, DURIEU C, et al. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty[J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1171 – 1179.

[6] SPATHOPOULOS M P, GROBOV I D. A state-set estimation algorithm for linear systems in the presence of bounded disturbances[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 799 – 811.

[7] CHISCI L, GARULLI A, ZAPPA G. Recursive state bounding by parallelotopes[J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1049 – 1055.

[8] KIEFFER M, JAULIN L, WALTER E. Guaranteed recursive nonlinear state bounding using interval analysis[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, 16(3): 193 – 218.

[9] ALAMO T, BRAVO J M, CAMACHO E F. Guaranteed state estimation by zonotopes[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 1035 – 1043.

[10] KUEHN W. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect[J]. *Computing*, 1998, 61(1): 47 – 67.

[11] MOORE R. *Interval Analysis*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966.

[12] BRAVO J M, ALAMO T, CAMACHO E F. Bounded error identification of systems with time-varying parameters[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1144 – 1150.

作者简介:

柴 伟 (1981—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为集员估计理论与应用, E-mail: chaiwei@asee.buaa.edu.cn;

孙先仿 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为集员估计理论与应用、故障检测与诊断、计算机图形学与模式识别等, E-mail: xfsun_buaa@yahoo.com.