文章编号: 1000−8152(2008)03−0389−04

基于新模型的多目标Memetic算法及收敛分析

魏静萱[1], 王宇平[2]

(1. 西安电子科技大学 数学科学系, 陕西 西安 710071; 2. 西安电子科技大学 计算机学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 将多目标函数优化问题转化成单目标约束优化问题. 对转化后的问题提出了基于约束主导原理的选择方法, 克服了多数方法只使用Pareto优胜关系作为选择策略而没有采用偏好信息这一缺陷; Memetic算法是求解多目标优化问题最有效的方法之一, 它融合了局部搜索和进化计算. 新的多目标Memetic算法引进C-metric, 将模拟退火算法与遗传算法结合起来, 改善了全局搜索能力. 用概率论的有关知识证明了算法的收敛性. 仿真结果表明该方法对不同的试验函数均可求出一组沿着Pareto前沿分布均匀且散布广泛的非劣解.

关键词: 新模型; 多目标优化; Memetic算法; 遗传算法

中图分类号: TP301.6　　**文献标识码**: A

A new model-based multi-objective Memetic algorithm and its convergence analysis

WEI Jing-xuan[1], WANG Yu-ping[2]

(1. Department of Mathematics Science, Xidian University, Xi'an Shannxi 710071, China;
2. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an Shannxi 710071, China)

Abstract: The multi-objective optimization problem is converted into a constrained optimization problem. Based on the constraint dominance principle, a new selection strategy is proposed for the converted problem to remove the drawback in most algorithms taking Pareto dominance as selection strategy but ignoring preference information. Memetic algorithm is one of the most efficient algorithms for optimizing multi-objective problems, incorporating local search into evolutionary computation. The new multi-objective Memetic algorithm combines the genetic algorithm with simulated annealing algorithm by introducing the C-metric to improve the global search ability. The convergence of this algorithm is proved with related theories of probability. Simulation results demonstrate the ability of the new algorithm in finding the uniformly distributed and widely-spread non-trivial solutions on the entire Pareto front.

Key words: new model; multi-objective optimization; Memetic algorithm; genetic algorithm

1 引言(Introduction)

在实际问题中经常会遇到求解如下形式的多目标优化问题:

$$\min F(x), \tag{1}$$

其中: $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

定义 1 解x^0非劣于(Pareto优于)x^1 ($x^0 \prec x^1$)当且仅当$\forall i \in 1, 2, \cdots, m$, $f_i(x^0) \leqslant f_i(x^1)$, $\bigwedge \exists i \in 1, 2, \cdots, m, f_i(x^0) < f_i(x^1)$.

定义 2 (Pareto 最优性)一个解$x^* \in \Omega$称为问题(1)的Pareto最优解(非劣解), 当且仅当不存在$x \in \Omega$, 使得$x \prec x^*$.

许多多目标优化问题往往有无穷多个Pareto最优解, 因此对这些问题产生全部的Pareto最优解几乎是不可能的. 因此在Pareto最优解集中产生一组均匀分布且更接近于真实Pareto界面(非劣解集在目标函数空间的位置)的代表解是十分有必要的.

近几年来, 进化算法界相继提出了不同的多目标进化算法, RDGA[1], SPEA[2], NSGA2[3], Memetic算法[4]等用不同的方法对上述问题进行了研究. 本文将多目标函数优化问题转化成单目标约束优化问题, 针对转化后的问题提出了基于约束主导原理的选择方法. 同时通过C-metric[2]的引进将模拟退火与遗传算法相结合, 改善了全局搜索能力. 试验结果表明本文提出的算法可求出一组在目标空间中分布均

收稿日期: 2007−01−08; 收修改稿日期: 2007−10−30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60374063).

匀且更接近于真实Pareto界面的最优解.

2 多目标优化模型(Model of multi-objective optimization)

2.1 解的质量度量(Measure of the quality of solutions)

定义 3 (个体的序) 设第t代种群Φ由个体$x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^N$组成, 设$p_t^i$是该种群中非劣于$x_t^i$的所有个体数. 则$R_t^i$表示为个体$x_t^i$的序, $R_t^i = 1 + p_t^i, i \in 1, 2, \cdots, N$.

2.2 解的均匀性度量(Measure of the uniformity of solutions)

在产生足够多的序值为1的解的基础上, 多目标优化问题要求这一组解尽可能均匀的分布在目标空间中, 由此本文给出了解的均匀性度量.

定义 4 设第t代种群Φ由个体$x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^N$组成, 将$\Phi$中的个体$x^i$与该集合中的其他个体在目标空间上的欧氏距离从小到大排序, D_1^i, D_2^i表示最小的两个距离, 则个体x^i在Φ中的密集距离$\mathrm{crowd}_i = \dfrac{D_1^i + D_2^i}{2}$. 定义$\overline{\mathrm{crowd}_t} = \dfrac{1}{N} \times \sum\limits_{i=1}^{N} \mathrm{crowd}_i$为个体密集距离的均值, 用$\mathrm{Var}_t = \dfrac{1}{N} \times \sum\limits_{i=1}^{N} (\mathrm{crowd}_i - \overline{\mathrm{crowd}_t})^2$表示第$t$代目标空间中个体的密集距离方差.

2.3 多目标优化问题转化为单目标约束问题(Transform multi-objective optimization into the constrained optimization problem)

从以上分析可以看出, 如果将解的序值看作是约束条件, 均匀性度量看作是目标函数, 则多目标优化问题(1)可转化为如下形式的单目标等式约束问题:

$$\begin{cases} \min\ \mathrm{Var}_t, \\ \text{s.t. } R_t = 1. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)可理解为在产生序值为1的解的基础上, 使得这些解均匀分布在Pareto界面上.

3 选择算子(Selection of operator)

针对转化后的模型提出了约束主导选择策略[5]:

1) 若两个个体都为不可行个体, 则选择约束违反度较小的个体, 即选择序值较小的个体;

2) 若一个为可行个体一个为不可行个体, 则选择可行个体, 即选择序值为1的个体;

3) 若两个个体的序值相同, 则选择使目标函数较小的个体(如个体x^i, x^j的序值都为1, 则按照定义4分别计算出x^i, x^j在集合S中的密集距离$\mathrm{crowd}_i, \mathrm{crowd}_j$选择密集距离较大的个体. S表示序值为1的个体组成的集合).

4 新的接收准则(Acceptance criteria)

本文设计了一种新的接收准则, 将C-metric看作是模拟退火中的能量函数, 将群体优势结合到局部搜索中. 假设A, B, C, D为决策空间中的点, 其中A, B, C 为非劣解且属于集合X_1, 进行局部搜索后得到点E, F, G, H. 其中E, F, G为非劣解且属于集合X_2. 若$C(X_1, X_2) < C(X_2, X_1)$, 则局部搜索后的点$E, F, G, H$以概率1被接收; 否则局部搜索后的点以概率$\exp(\dfrac{C(X_2, X_1) - C(X_1, X_2)}{T})$被接收, 其中$T$为退火温度.

5 基于新模型的多目标Memetic算法(New model-based multi-objective memetic algorithm)

首先给定初始温度T, 产生初始种群Φ, 过渡种群$\Phi'' = \Phi$, 计算Φ''中每个个体的序值R^i, $i = 1, 2, \cdots, N$, 对种群Φ''进行选择, 杂交、变异产生进化后的种群Φ'. 如果Φ' 满足以下两个条件, 则Φ'存活, $\Phi'' = \Phi'$; 否则Φ''保持不变. X''和X'分别为种群Φ''和Φ'中的非劣解集.

条件 1 为了产生足够多的高质量的Pareto最优解, 计算能量函数$E(X''), E(X')$, $E(X'') = C(X', X'')$, $E(X') = C(X'', X')$, 然后按照metropolis接受准则, 以概率$\min\{1, \exp(\dfrac{C(X_2, X_1) - C(X_1, X_2)}{T})\}$接受$\Phi'$为进化后的种群.

条件 2 为了保证解在Pareto界面均匀分布, 以概率$\min\{1, \dfrac{\mathrm{Var}(X'')}{\mathrm{Var}(X')}\}$接受$\Phi'$为进化后的种群, 其中$\mathrm{Var}(X)$表示解集$X$的密集距离方差.

重复以上过程, 在进行足够多的状态转移后, 缓慢减小T值, 如此反复直至满足某个停止准则.

算法 1 多目标Memetic 算法(MOMA):

Step 1 初始化.

(1.1) 产生规模为N的初始种群$\Phi(t)$, 求其非劣解集P^1, $t = 1$;

(1.2) 选择初始温度$T_0 = 100$; 令$T = T_0$;

(1.3) 令内部循环次数$\mathrm{count}_{\mathrm{iteration}} = 0$;

Step 2 进化.

(2.1) 产生过渡种群$\Phi''(t)$, 令$\Phi^t = \Phi(t)$;

(2.2) 计算$\Phi''(t)$中每个个体的序值R^i, $i = 1, 2, \cdots, N$;

(2.3) 如果$\mathrm{count}_{\mathrm{iteration}} = \mathrm{count}_{\max}$, $\mathrm{count}_{\mathrm{iteration}} = 0$, 转Step3; 否则$\mathrm{count}_{\mathrm{iteration}} = \mathrm{count}_{\mathrm{iteration}} + 1$;

(2.4) 运用3所述的选择算子从$\Phi''(t)$中选择N个

个体组成交配池;

(2.5) 运用算数杂交算子和2.5.1所述的变异算子产生进化后规模为N的种群$\Phi'(t)$;

(2.5.1) 对杂交后产生的每一个后代, 对其第i个分量o_i变异如下: 将搜索空间中第i维子空间$[l_i, u_i]$分成若干子区间$[\omega_1^i, \omega_2^i], \cdots, [\omega_{n_i-1}^i, \omega_{n_i}^i]$, 使得$|\omega_j^i - \omega_{j-1}^i| < \varepsilon$, $j = 2, \cdots, n_i$, 随机产生一数$\sigma \in [0, 1]$, 若$\sigma < p_m$, 随机在$[\omega_1^i, \omega_2^i, \cdots, \omega_{n_i}^i]$中选一个$\omega_j^i$代替$o_i$, 否则$o_i$保持不变.

(2.6) 产生(0, 1)之间的随机数a, 如果$a < \min\{1, \exp\frac{E(X'')-E(X')}{T}\} \times \min\{1, \dfrac{\mathrm{Var}(X'')}{\mathrm{Var}(X')}\}$, 则$\Phi'(t)$存活, $\Phi''(t) = \Phi'(t)$, 否则$\Phi''(t)$保持不变, 转(2.2);

Step 3 求出集合$P^t \bigcup \Phi''(t)$的非劣解集$P(t+1)$用4所述的选择算子从$\Phi(t) \bigcup \Phi''(t)$中选择$N - P^{t+1}$个个体和非劣解集$P^{t+1}$组成下一代种群$\Phi(t+1)$;

Step 4 退温$T = T_0 * 0.99^t$;

Step 5 若停止准则满足, 则停, 输出结果, 否则$t = t + 1$, 转Step2.

6 收敛性分析(Convergence analysis)

引理 1 若一个进化算法满足以下两个条件[6]:

1) 对可行域中任意两个点$x, x'x'$是通过x杂交和变异可达的;

2) 序列$P^1, P^2, \cdots, P^t$是单调的, 即对任意t, P^{t+1}中任意解非劣于P^t中的任意解或不差于其中任意解. 则算法以概率1收敛到全局最优解.

定理 1 对充分小的$\varepsilon > 0$, 若$F(x)$在搜索空间上连续, 则本文算法以概率1收敛到问题(1)的具有ε精度的最优解. 结合引理1及文献[7]可证.

7 模拟结果(Simulation results)

为了验证算法的有效性, 在MATLAB7.0的环境下对标准试验函数进行测试, 参数选择如下: 种群规模$N = 100$; 杂交概率$p_c = 0.9$; 变异概率$p_m = 0.5$; 内循环代数$\mathrm{count}_{\max} = n^{[8]}$, n为决策变量个数; 进化代数30.

7.1 试验函数(Test functions)

本文4个试验函数选自文献[9], 它们都是一些难以求解的问题. 其中$F_1 \sim F_4$分别代表函数$ZDT2$, $ZDT3$, $ZTD4$, $ZTD6$.

7.2 计算结果(Computation results)

对每个试验函数, 用本文中方法独立运行10次, 并和文献[9]中的8个方法进行比较, 结果表明本文中方法所得结果比文献[9]中所述的结果都好. 图1～4画出了这些方法前5次运行后所得的非劣解集在目标空间中的位置(Pareto front).

文献[9]中8个方法的结果选自http://www.tik.ee.ethz.ch/ zitzler/testdata.html.

从图1～图4可以看出, 本文中方法所求得的Pareto front位于其它方法的下方, 且Pareto解的数量更多, 分布更均匀.

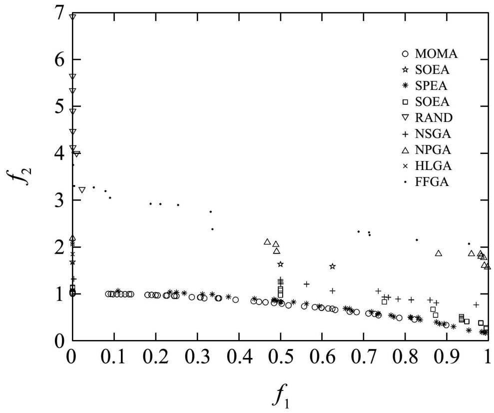

图 1　各方法对F_1求出的结果比较

Fig. 1　Comparison results of 9 algorithms on function F_1

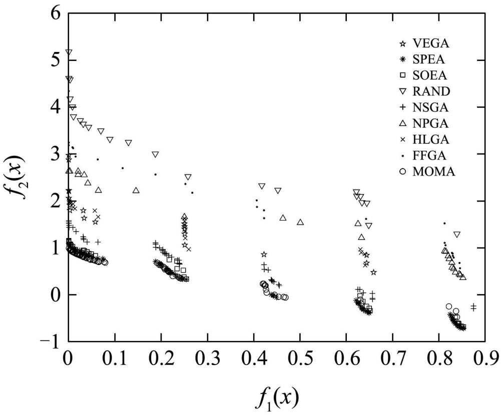

图 2　各方法对F_2求出的结果比较

Fig. 2　Comparison results of 9 algorithms on function F_2

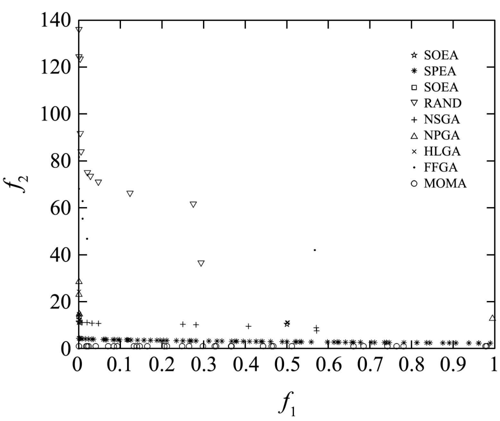

图 3　各方法对F_3求出的结果比较

Fig. 3　Comparison results of 9 algorithms on function F_3

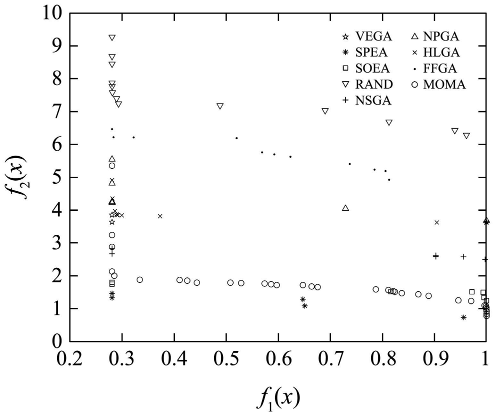

图4 各方法对F_4求出的结果比较

Fig. 4 Comparison results of 9 algorithms on function F_4

8 结论(Conclusion)

本文提出一种基于新模型的多目标Memetic算法. 新方法通过C-metric的引进将模拟退火与遗传算法相结合, 融合了局部搜索和进化计算, 具有较高的全局搜索能力. 同时本文算法在新模型的基础上提出了基于约束主导原理的选择方法. 数据试验表明本文算法MOMA比与其比较的8种方法所得的非劣解都优.

参考文献(References):

[1] MOON P H A. Technique for orthogonal frequency division multiplexing offset correction[J]. *IEEE Transactions on Communication*, 1994, 42(10): 2908 – 2914.

[2] ZITZLER E, LAUMANNS M, THIELE L. *Spea2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*[R]. Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 2001.

[3] DEB K, PRATAP A, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGAII[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182 – 197.

[4] 郭秀萍, 杨根科, 吴智铭. 一种混合自适应多目标Memetic算法[J]. 控制与决策, 2006, 21(11): 1234 – 1238.
(GUO Xiuping, YANG Genke, WU Zhiming. A hybrid adaptive multi-objective memetic algorithm[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(11): 1234 – 1238.)

[5] DEB K, PRATAP A, MEYARIVAN T. Constrained test problems for multi-objective evolutionary optimization[C] // *First Internet Conference on Evolutionary Multi-criterion Optimization*. Zurich: Springer-Verlag, 2001, 3: 284 – 298.

[6] VELDHUIZEN D V. *Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analysis, and new innovations*[D]. USA: Air University, 1999.

[7] 刘淳安, 王宇平. 约束多目标优化问题的进化算法及其收敛性[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(2): 276 – 280.
(LIU Chun'an, WANG Yuping. Evolutionary algorithm for constrained multi-objective optimization problems and its convergence[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2007, 29(2): 276 – 280.)

[8] 刘勇, 康立山. 非数值并行算法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[9] ZITZLER E, DEB K, THIELE L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results[J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 1 – 24.

作者简介:

魏静萱 (1981—), 女, 博士研究生, 2006年3月于西安电子科技大学获硕士学位, 目前研究方向为进化算法、多目标优化, E-mail: wjxjingxuan@yahoo.com.cn;

王宇平 (1961—), 男, 西安电子科技大学计算机学院教授, 博士生导师, 1993年于西安交通大学获博士学位, 目前研究方向为进化算法、最优化理论、人工智能等, E-mail: ywang@xidian.edu.cn.