第 25 卷第 3 期
2008 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 3
Jun. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)03−0462−06

离散广义系统的严格耗散分析与控制

李　琴[1], 靖　新[1,2], 张庆灵[1], 衣　娜[1]

(1. 东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110004; 2. 沈阳建筑大学 理学院, 辽宁 沈阳 110168)

摘要: 对离散广义系统, 考虑了关于二次型供给率严格耗散控制问题. 建立了严格耗散与扩展严格正实之间的等价性. 利用线性矩阵不等式(LMI), 给出了离散广义系统严格耗散的充分必要条件, 并着重推导了其成立的严格LMI条件. 针对输入向量维数等于状态向量维数的系统, 分别利用非严格LMI及严格LMI, 讨论了状态反馈下的严格耗散控制问题, 并给出控制器的设计方法. 也讨论了输入向量维数小于状态向量维数的情况. 最后通过仿真算例说明所给方法的有效性和普遍性, 同时显示了严格LMI条件在耗散控制问题中, 比非严格LMI具有的优势.

关键词: 离散广义系统; 耗散控制; 线性矩阵不等式; 状态反馈

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Strictly dissipative analysis and control for discrete-time descriptor systems

LI Qin[1], JING Xin[1,2], ZHANG Qing-ling[1], YI Na[1]

(1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;
2. School of Science, Shenyang Jianzhu University, Shenyang Liaoning 110168, China)

Abstract: For discrete-time descriptor systems, we consider the problem of strictly dissipative control with quadratic supply rate. Equivalence between the strict dissipativity and the extended strictly positive realness is established. By using the linear matrix inequality (LMI), we derive the necessary and sufficient conditions for discrete-time descriptor systems to be strictly dissipative, and provide the conditions in the form of strict LMI. When the dimension of input equals the dimension of state, we discuss the state-feedback dissipative control by means of the non-strict LMI and the strict LMI, respectively, and present the design method for the controller. We also discuss the case where the dimension of input is lower than the dimension of state. Numerical examples illustrate the effectiveness and universality of the proposed method, and show the advantages of the strict LMI condition over the non-strict LMI condition in the dissipative problem.

Key words: discrete-time descriptor systems; dissipative control; linear matrix inequality; state feedback

1 引言(Introduction)

耗散性系统理论由Willems于1972年提出[1,2], 其后成为电路、系统及控制理论中十分重要的概念. 文献[3∼5]进一步发展了有关理论, 主要用于研究非线性系统的稳定性. 事实上, 耗散系统理论是无源理论、界实引理、卡尔曼-雅柯鲍维奇引理以及圆判据定理的广义化. 近年来已有学者研究基于耗散系统理论的反馈控制器的分析与综合问题[6∼8], 结果表明线性离散系统的严格二次型耗散性可等效于H_∞性能或扩展严格正实性, 耗散控制器或鲁棒耗散控制器存在的条件和综合问题可等价于一个代数Riccati不等式或线性矩阵不等式(LMI)的可解性. 对于正常系统的耗散控制已有很多有价值的结果[1∼10], 而有关广义系统的耗散性研究成果还不多见[11∼13], 文献[13]利用广义的KYP(Kalman-Yacubovich-Popov)引理, 用线性矩阵不等式给出了广义连续系统耗散的充分必要条件. 本文利用广义系统的严格耗散性与扩展严格正实之间的关系, 给出了离散广义系统严格耗散的充分必要条件, 其中主要推导了其成立的严格LMI条件, 同时给出了相应的控制器设计, 并举例说明本文所给方法具有普遍性和一定的优越性.

2 预备知识(Preliminaries)

考虑如下离散广义系统:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B\omega(k), \tag{1a}$$

$$z(k) = Cx(k) + D\omega(k), \tag{1b}$$

其中$x(k)\in\mathbb{R}^n$为系统的状态向量, $\omega(k)\in\mathbb{R}^p$ 为外部输入向量, $z(k)\in\mathbb{R}^q$ 为输出向量, E, A, B, C, D为适当维数矩阵, 且E满足$\operatorname{rank} E = r \leqslant n$.

定义 1[14]　(a) 如果存在$z\in\mathbb{R}$, 使得$\det(zE -$

收稿日期: 2006−06−12; 收修改稿日期: 2007−05−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574011); 辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210).

$A) \neq 0$, 则称矩阵对(E, A)为正则的;

(b) 如果$\deg(\det(zE - A)) = \mathrm{rank}\, E$, 则称矩阵对$(E, A)$是因果的;

(c) 如果$\lambda(E, A) \subset D_{\mathrm{int}}(0, 1)$, 则称矩阵对$(E, A)$是稳定的;

(d) 如果矩阵对(E, A)是正则, 稳定且因果的, 则称系统(1a)是正则, 稳定且因果的, 或者称系统为容许的.

其中: $\lambda(E, A) = \{\lambda | \det(\lambda E - A) = 0\}$, $D_{\mathrm{int}}(0, 1)$表示以原点为圆心, 以1为半径的圆.

考虑矩阵$W = W^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{(q+p)\times(q+p)}$ 以及二次型函数, 即供给率

$$s(z, \omega) = \begin{bmatrix} z^{\mathrm{T}}(k) & \omega^{\mathrm{T}}(k) \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} z(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix}.$$

定义 2 系统(1a)是容许的, 且满足对任意的$N \geqslant 0$及$\omega(k) \in \mathrm{l}_2[0, \infty)$, 有

$$\sum_{k=0}^{N} s(z(k), \omega(k)) \geqslant 0 \tag{2}$$

成立, 则称离散广义系统(1a)(1b)关于供给率$s(z, \omega)$是耗散的. 如果不等式严格成立, 则称系统(1a)(1b)关于供给率$s(z, \omega)$是严格耗散的.

定义2是从频域上分析广义系统的耗散性, 式(2)对应于时域上的条件为:

$$\begin{bmatrix} G^*(z) & I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} G(z) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \forall z \in \mathbb{C},$$

其中$G(z) = C(zE - A)^{-1}B + D$, 并假设$G(z)$是可控可观的.

设$W = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix}$, 其中$Q \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $S \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$, 此时, 令$M(z) = G^*(z)QG(z) + G^*(z)S + S^{\mathrm{T}}G(z) + R$, 则根据定义2, 相应地, 有

定义 3 如果系统(1a)是容许的且满足$M(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) \geqslant 0, \forall\theta \in [0, 2\pi)$, 则称系统(1a)(1b)关于$(Q, S, R)$是耗散的. 如果系统(1a)是容许的且满足$M(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) > 0$, $\forall\theta \in [0, 2\pi)$, 以及$M(\infty) > 0$, 则称系统(1a)(1b)关于$(Q, S, R)$是严格耗散的.

系统(1a)(1b)关于(Q, S, R)严格耗散性包括扩展严格正实性(ESPR)和H_∞性能等, 当$Q = 0$, $S = I$, $R = 0$时, 系统(1a)(1b)是ESPR的; 当$Q = -I$, $S = 0$, $R = \gamma^2 I$ 时, 系统(1a)(1b)具有H_∞性能γ. 假设$Q \leqslant 0$, 则包括上述两种情况. 另外, 还用到以下引理:

引理 1[15] 对于适维矩阵Q, H, E, 其中Q对称, 则不等式

$$Q + HFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0,$$

对于所有满足$F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$的$F$成立, 当且仅当存在$\epsilon > 0$, 使得满足

$$Q + \epsilon HH^{\mathrm{T}} + \epsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E < 0.$$

3 离散广义系统的耗散分析与控制(Dissipative analysis and control for discrete-time descriptor systems)

3.1 离散广义系统的耗散性分析(Dissipative analysis for discrete-time descriptor systems)

为分析系统的耗散性, 得到系统严格耗散的充分必要条件, 引入以下增广系统:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + \overline{B}\overline{\omega}(k), \tag{3a}$$

$$\overline{z}(k) = \overline{C}x(k) + \overline{D}\overline{\omega}(k), \tag{3b}$$

其中:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}, \overline{C} = \begin{bmatrix} S^{\mathrm{T}}C \\ -T^{\mathrm{T}}C \end{bmatrix},$$

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} R/2 + S^{\mathrm{T}}D & 0 \\ -T^{\mathrm{T}}D & I_q/2 \end{bmatrix},$$

$T = (-Q)^{1/2}$ 为$-Q$的对称分解.

定理 1 下面的命题等价:

(a) 系统(1a)(1b)关于(Q, S, R) 是严格耗散的.

(b) 系统(3a)(3b)是容许且ESPR的.

(c) 存在对称阵$Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}YA - E^{\mathrm{T}}YE & A^{\mathrm{T}}YB - C^{\mathrm{T}}S & C^{\mathrm{T}}T \\ * & \zeta & D^{\mathrm{T}}T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{4a}$$

$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0, \tag{4b}$$

其中$\zeta = B^{\mathrm{T}}YB - D^{\mathrm{T}}S - S^{\mathrm{T}}D - R$.

(d) 存在$0 < P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 以及对称矩阵$W \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, 使得

$$\begin{bmatrix} \varPsi_{11} & \varPsi_{12} & C^{\mathrm{T}}T \\ * & \varPsi_{22} & D^{\mathrm{T}}T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

其中:

$$\varPsi_{11} = A^{\mathrm{T}}(P - E_0^{\mathrm{T}}WE_0)A - E^{\mathrm{T}}PE,$$

$$\varPsi_{12} = A^{\mathrm{T}}(P - E_0^{\mathrm{T}}WE_0)B - C^{\mathrm{T}}S,$$

$$\varPsi_{22} = B^{\mathrm{T}}(P - E_0^{\mathrm{T}}WE_0)B - D^{\mathrm{T}}S - S^{\mathrm{T}}D - R,$$

$E_0 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times n}$, 满足$\mathrm{rank}\, E_0 = n - r$, $\mathrm{null}(E_0) = \mathrm{range}(E)$.

证 由文献[8], 易得条件(a)(b)是等价的, 由文

献[16]可得(b)和(c)是等价的. 下证(b)(d)是等价的, 则易知(c)(d)也是等价的.

(d)⇒(b) 取$Y = P - E_0^{\mathrm{T}} W E_0$, 因为$P$正定, 容易验证若式(5)成立, 则式(4a)(4b)成立, 则系统(3a)(3b)是容许且ESPR的.

(b)⇒(d) 假设系统(3a)(3b)是容许的, 则存在可逆矩阵$M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

令$M\overline{B} = \begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}} & B_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\overline{C}N = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$, 其中$B_1 \in \mathbb{R}^{r\times(p+q)}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(p+q)}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{(p+q)\times r}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(n-r)}$.

并令$M = [M_1^{\mathrm{T}} \ \ M_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 其中: $M_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times n}$, 则有$M_2 E = [0 \ \ 0]$, $M_2 AN = [0 \ \ I_{n-r}]$.

记$MEN = \widetilde{E}$, $MAN = \widetilde{A}$, $M\overline{B} = \widetilde{B}$, $\overline{C}N = \widetilde{C}$.

由条件知系统(3a)(3b)是容许且ESPR的, 根据文献[17]及矩阵性质可得, 存在对称矩阵Y, 使得

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}YA - E^{\mathrm{T}}YE & A^{\mathrm{T}}Y\overline{B} - \overline{C}^{\mathrm{T}} \\ * & \overline{B}^{\mathrm{T}}Y\overline{B} - \overline{D}^{\mathrm{T}} - \overline{D} \end{bmatrix} < 0,$$

$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0,$$

则矩阵$K = M^{-T}YM^{-1}$ 满足下列不等式:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}K\widetilde{A} - \widetilde{E}^{\mathrm{T}}K\widetilde{E} & \widetilde{A}^{\mathrm{T}}K\widetilde{B} - \widetilde{C}^{\mathrm{T}} \\ * & \widetilde{B}^{\mathrm{T}}K\widetilde{B} - \overline{D}^{\mathrm{T}} - \overline{D} \end{bmatrix} < 0, \tag{7a}$$

$$\widetilde{E}^{\mathrm{T}}K\widetilde{E} \geqslant 0. \tag{7b}$$

容易看出, 系统$(E, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ 的扩展严格正实性与受限等价系统$(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ 的扩展严格正实性是等价的.

令$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ * & K_{22} \end{bmatrix}$, 由式(7b)可得$K_{11} \geqslant 0$.

将$\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ 及K的参数表达式代入式(7a), 可得式(8):

$$\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}K_{11}A_1 - K_{11} & A_1^{\mathrm{T}}K_{12} & \varUpsilon_{13} \\ * & K_{22} & \varUpsilon_{23} \\ * & * & \varUpsilon_{33} \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

其中:

$$\varUpsilon_{13} = A_1^{\mathrm{T}}K_{11}B_1 + A_1^{\mathrm{T}}K_{12}B_2 - C_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varUpsilon_{23} = K_{12}^{\mathrm{T}}B_1 + K_{22}B_2 - C_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varUpsilon_{33} = -\overline{D} - \overline{D}^{\mathrm{T}} + B_1^{\mathrm{T}}K_{11}B_1 + B_1^{\mathrm{T}}K_{12}B_2 + B_2^{\mathrm{T}}K_{12}^{\mathrm{T}}B_1 + B_2^{\mathrm{T}}K_{22}B_2.$$

对式(8)右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -I \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix},$$

左乘其转置, 即$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ * & K_{22} \end{bmatrix}$, 其中:

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}K_{11}A_1 - K_{11} & C_1^{\mathrm{T}} - A_1^{\mathrm{T}}K_{11}B_1 \\ * & \digamma \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -A_1^{\mathrm{T}}K_{12} \\ B_1^{\mathrm{T}}K_{12} - C_2 \end{bmatrix},$$

$$\digamma = -\overline{D} - \overline{D}^{\mathrm{T}} + B_1^{\mathrm{T}}K_{11}B_1 + B_2^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} + C_2B_2,$$

因此, $M_1 < 0$, 令$\overline{K}_{11} = K_{11} + \mu I > 0$, 其中$\mu$ 为大于零的充分小正数使得

$$\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}\overline{K}_{11}A_1 - \overline{K}_{11} & C_1^{\mathrm{T}} - A_1^{\mathrm{T}}\overline{K}_{11}B_1 \\ * & \overline{\digamma} \end{bmatrix} =$$

$$M_1 + \mu \begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}A_1 - I & -A_1^{\mathrm{T}}B_1 \\ * & B_1^{\mathrm{T}}B_1 \end{bmatrix} < 0.$$

$$\overline{\digamma} = -\overline{D} - \overline{D}^{\mathrm{T}} + B_1^{\mathrm{T}}\overline{K}_{11}B_1 + B_2^{\mathrm{T}}C_2^{\mathrm{T}} + C_2B_2.$$

取$K_{22} = -\alpha I$, $K_{12} = 0$, 由Schur补引理以及当α 充分大时, 可得$M_1 - M_2M_3^{-1}M_2 < 0$.

因此可得$\overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \overline{K}^{\mathrm{T}}$满足

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{A} - \widetilde{E}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{E} & \widetilde{A}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{B} - \widetilde{C}^{\mathrm{T}} \\ * & \widetilde{B}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{B} - \overline{D}^{\mathrm{T}} - \overline{D} \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

令$U \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$为任一正定阵, $V \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$为任一可逆阵, 则

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{A} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -U + K_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} (U - K_{22}) \begin{bmatrix} 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} =$$

$$N^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} MAN -$$

$$N^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}M_2^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}V^{-T}(U - K_{22})V^{-1}VM_2AN,$$

$$\widetilde{E}^{\mathrm{T}}\overline{K}\widetilde{E} = \widetilde{E}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \widetilde{E} =$$

$$N^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} MEN.$$

令

$$P = M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} M, E_0 = VM_2,$$
$$W = V^{-\mathrm{T}}(U - K_{22})V^{-1},$$

则式(9)即

$$\begin{bmatrix} N^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \varGamma \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

其中:

$$\varGamma = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}\varXi A - E^{\mathrm{T}}PE & A^{\mathrm{T}}\varXi\overline{B} - \overline{C}^{\mathrm{T}} \\ * & -\overline{D} - \overline{D}^{\mathrm{T}} + \overline{B}^{\mathrm{T}}\varXi\overline{B} \end{bmatrix},$$
$$\varXi = P - E_0^{\mathrm{T}}WE_0.$$

故有$\varGamma < 0$. 将$\overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ 的表达式带入上式即可得式(5). 证毕.

注 1 当考虑系统具有H_∞性能γ时, 条件(d)即为文[17]中定理2, 但是文[17]仅仅给出了系统具有H_∞范数的条件, 没有包含正实性条件, 也没有给出具体的控制器设计. 下面来研究有关控制问题.

3.2 离散广义系统的耗散控制(Dissipative control for discrete-time descriptor systems)

考虑如下系统:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B\omega(k) + B_1u(k), \quad (10a)$$
$$z(k) = Cx(k) + D\omega(k), \quad (10b)$$

其中: $u(k) \in \mathbb{R}^m$为控制输出, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 其他矩阵同前. 本节的目的是寻找状态反馈:

$$u(k) = Gx(k),$$

其中$G \in \mathbb{R}^{m\times n}$为反馈增益, 使得闭环系统

$$Ex(k+1) = A_cx(k) + B\omega(k), \quad (11a)$$
$$z(k) = Cx(k) + D\omega(k) \quad (11b)$$

是严格耗散的. 其中$A_c = A + B_1G$.

首先考虑输入向量与状态向量维数相等时的情况, 即$m = n$ 时的情形. 根据定理1, 有

定理 2 系统(11a)(11b)关于(Q, S, R)是严格耗散的充分条件是:

a) 如果存在对称阵$Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 < Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$以及常数$\epsilon_1 > 0$满足

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}YA - E^{\mathrm{T}}YE + Z & A^{\mathrm{T}}YB - C^{\mathrm{T}}S & C^{\mathrm{T}}T & A^{\mathrm{T}}YB_1 \\ * & \zeta & D^{\mathrm{T}}T & B^{\mathrm{T}}YB_1 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} < 0,$$
$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0, \epsilon_1 I + B_1^{\mathrm{T}}YB_1 > 0,$$

其中ζ 表达式如定理1. 此时, 反馈控制律可取为

$$u(k) = T_1^{-\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}x(k),$$

其中

$$Z = LL^{\mathrm{T}}, \epsilon_1 I + B_1^{\mathrm{T}}YB_1 = T_1T_1^{\mathrm{T}}$$

均为对称分解. 或者

b) 存在$0 < P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 < Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 对称矩阵$W \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 以及常数$\epsilon_1 > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \varPsi_{11} + Z & \varPsi_{12} & C^{\mathrm{T}}T & A^{\mathrm{T}}\varXi B_1 \\ * & \varPsi_{22} & D^{\mathrm{T}}T & B^{\mathrm{T}}\varXi B_1 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} < 0,$$
$$\epsilon_1 I + B_1^{\mathrm{T}}\varXi B_1 > 0,$$

其中: $\varXi = P - E_0^{\mathrm{T}}WE_0, \varPsi_{11}, \varPsi_{12}, \varPsi_{22}$表达式如定理1. 此时, 反馈控制律可取为: $u(k) = T_1^{-\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}x(k)$, 其中$Z = LL^{\mathrm{T}}, \epsilon_1 I + B_1^{\mathrm{T}}\varXi B_1 = T_1T_1^{\mathrm{T}}$ 均为对称分解.

证 根据定理1, 系统(11a)(11b)关于(Q, S, R) 是严格耗散的充分必要条件是存在对称阵$Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足

$$\begin{bmatrix} A_c^{\mathrm{T}}YA_c - E^{\mathrm{T}}YE & A_c^{\mathrm{T}}YB - C^{\mathrm{T}}S & C^{\mathrm{T}}T \\ * & \zeta & D^{\mathrm{T}}T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0,$$
$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0.$$

上式等价于

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}YA - E^{\mathrm{T}}YE + G^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}YB_1G & A^{\mathrm{T}}YB - C^{\mathrm{T}}S & C^{\mathrm{T}}T \\ * & \zeta & D^{\mathrm{T}}T \\ * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}}YA \\ B_1^{\mathrm{T}}YB \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}}YA \\ B_1^{\mathrm{T}}YB \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0,$$
$$E^{\mathrm{T}}YE \geqslant 0.$$

利用引理1及令$Z = G^{\mathrm{T}}(\epsilon_1 I + B_1^{\mathrm{T}}YB_1)G$ 可得定理2 条件a). 同理可证得条件b).

当输入向量维数小于状态向量维数, 即$m < n$时, 考虑增加 $n - m$ 个虚拟输入 $u_{m+1}, \cdots, u_n$, 令$\overline{B}_1 = [B_1 \ \ 0 \ \ 0]_{n\times n}$, $\overline{u} = [u_1 \ \ u_2 \ \ \cdots \ \ u_n]^{\mathrm{T}}$, $\overline{u}(k) = Gx(k)$, 则类似上述算法, 将定理中B_1代换为$\overline{B}_1$, 可求得控制器G. 实际控制中取所求得控制器G的前m行即可.

4 仿真算例(Numerical examples)

4.1 输入向量维数与状态向量维数相等时的耗散控制(Dissipative control for the system with input variable dimension equals the state variable dimension)

系统(10a)(10b)中各参数矩阵如下:

$$E=\begin{bmatrix}-5&20&0\\-1&4&0\\0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}-4&-6&2\\-3&1&6\\3&6&4\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}5&-7&2\\3&-8&4\\-5&2&6\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}5&1&3\\1&-3&1\\2&-10&3\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&7\\0&3&5\\4&3&1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}3&0&2\\2&-1&5\\8&6&1\end{bmatrix},$$

并取

$$Q=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$S=\begin{bmatrix}-1&5&-10\\5&20&20\\40&0&-20\end{bmatrix},$$

则根据定理2, 利用条件a)及MATLAB中LMI工具箱不能求出具体的控制器, 利用条件b), 取

$$E_0=\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

时, 可得

$$G=\begin{bmatrix}0.0336&-0.0916&0.0058\\0&0.0742&0.0016\\0&0&0.0158\end{bmatrix}.$$

通过数值算例比较, 可知, 定理2中条件a)b)虽然都可以判断系统是否耗散, 但是条件b)比条件a)要弱一些, 这是因为矩阵E_0的选取, 在一定程度上加强了系统的可解性. 同时, 严格LMI条件相对于非严格LMI条件在求解的过程中容易用标准的LMI求解器判断.

4.2 输入向量维数小于状态向量维数时的耗散控制(Dissipative control for the system with input variable dimension is less than the state variable dimension)

4.1节讨论了输入向量维数等于状态向量维数时的耗散控制, 说明了定理2中条件b)具有较好的可解性, 通过下面的例子来说明文中所给出的耗散控制方法具有普遍性和较好的灵活性, 能够包含H_∞控制和正实控制等特殊情况的控制.

系统(10a)(10b)中的各参数矩阵如下:

$$E=\begin{bmatrix}-8&1&0\\-1.6&0.2&0\\0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1.8&2&12\\-3.8&2.5&-7\\5&9&9.5\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}6\\-4\\10\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}2\\-12\\2\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}2.5&-1&5\end{bmatrix},D=3.$$

选取$E_0=\begin{bmatrix}0.4&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 开环系统的Nyquist图和Bode图分别如图1和图2所示.

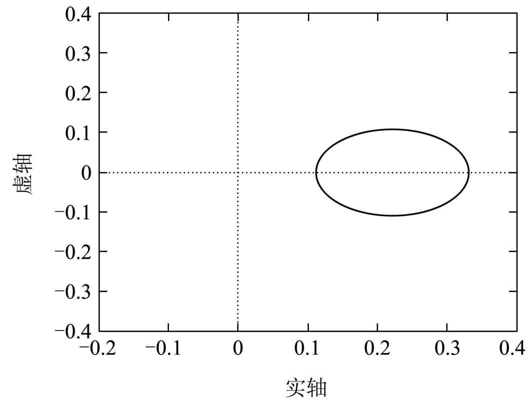

图 1 开环系统的Nyquist 图

Fig. 1 The open-loop system's Nyquist plot

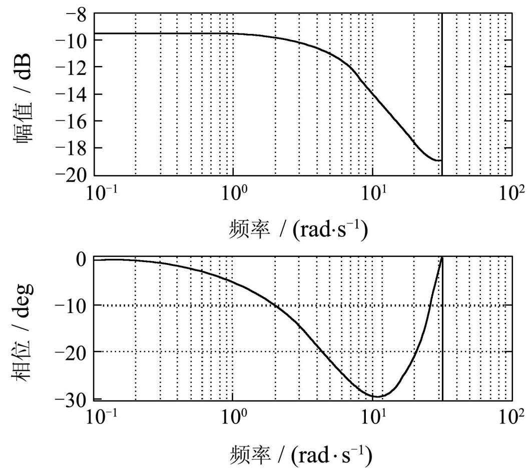

图 2 开环系统的Bode 图

Fig. 2 The open-loop system's Bode plot

下面考虑当Q,S,R选取不同的值时, 系统的控制器设计以及闭环系统的Bode图, 其中选取H_∞控制和正实控制作为特例.

当$Q=-1,S=0,R=1$, 即标准H_∞控制, 根据定理2条件b)可得控制器为: $u(k)=[0.0534\ -0.2008\ \ 0.1332]x(k)$, 闭环系统的Bode图即图3所示;

当$Q=0,S=1,R=0$, 即正实控制, 根据定理2条件b)可得控制器为: $u(k)=[0.0499\ -0.2155\ \ 0.1412]x(k)$, 也可画出闭环系统的Bode图, 在此略;

当$Q=-6,S=0.5,R=10$, 即一般耗散控制, 根据定理2条件b)可得控制器为: $u(k)=[0.0714\ \ -0.1254\ \ 0.0905]$, 闭环系统的Bode图如图4所示.

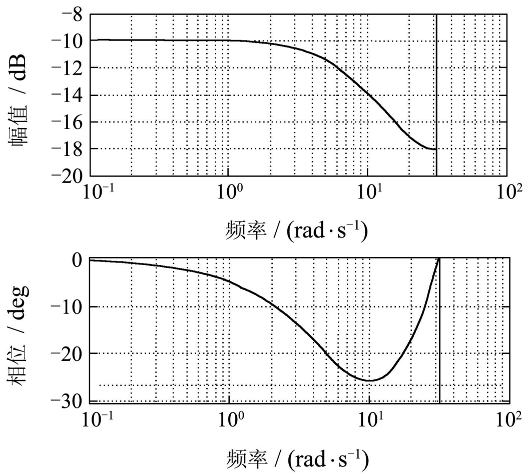

图 3　具有H_∞控制器时闭环系统的Bode 图

Fig. 3　The open-loop(with H_∞state feedback controller) system's Bode plot

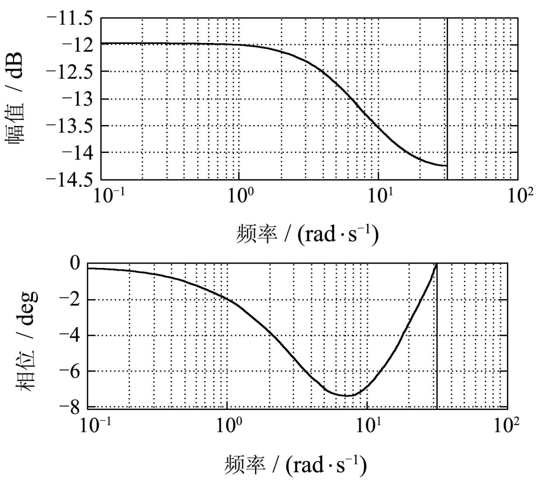

图 4　具有一般(Q,S,R)控制器时闭环系统的Bode 图

Fig. 4　The open-loop(with (Q,S,R) dissipative controller) system's Bode plot

5　小结(Conclusion)

本文主要研究了离散广义系统关于二次型供给率严格耗散问题. 首先利用增广系统的扩展严格正实与原系统严格耗散之间的等价性, 以及线性矩阵不等式(LMI), 给出了确定系统严格耗散的充分必要条件, 并主要推导了其成立的严格LMI条件. 其次针对输入向量维数等于和小于状态向量维数这两种情况考虑系统的严格耗散控制, 分别给出了系统耗散的非严格LMI条件和严格LMI 条件, 并给出控制器的设计方法. 最后通过仿真算例说明本文所给方法的有效性, 同时严格LMI条件相对于非严格LMI条件在求解的过程具有一定的优越性.

参考文献(References):

[1] WILLEMS J C. Dissipative dynamical systems-Part 1: general theory[J]. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1972, 45(5): 321 – 351.

[2] WILLEMS J C. Dissipative dynamical systems – Part 2: linear systems with quadratic supply rates[J]. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1972, 45(5): 352 – 393.

[3] HILL D J, MOYLAN P J. The stability of nonlinear dissipative systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(5): 708 – 711.

[4] HILL D J, MOYLAN P J. Dissipative dynamical systems: Basic input – output and state properties[J]. *Journal of Franklin Institute*, 1980, 309(5): 327 – 357.

[5] BYRNES C I, ISIDORI A. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1228 – 1240.

[6] XIE S, XIE L, de SOUZA C E. Robust dissipative control for linear systems with dissipative uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1998, 70(2): 169 – 191.

[7] TAN Z Q, SOH Y C, XIE L H. Dissipative control for linear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1557 – 1564.

[8] 邵汉永, 冯纯伯. 二次耗散线性离散系统的鲁棒性分析与控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(2): 142 – 146.
(SHAO Hanyong, FENG Chunbo. Robust quadratic dissipative analysis and control for discrete-time systems[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(2): 142 – 146.)

[9] 刘飞, 苏宏业, 褚健. 线性离散时滞系统鲁棒严格耗散控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(6): 897 – 903.
(LIU Fei, SU Hongye, CHU jian. Robust strictly dissipative control for linear discrete time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(6): 897 – 903.)

[10] GUPTA S. State space characterization and robust stabilization of dissipative LIT systems[C] //*Proceedings of the American Control Conference*. Washinton: [s.n.], 1995: 3616 – 3619.

[11] NATASA A K. Dissipative theory for singular systems. Part I: continuous-time case[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference Dec Control, and the Europ Control Conference Seville*. [S.l]: [s.n.], 2005: 5639 – 5644.

[12] 董心壮, 张庆灵. 滞后离散广义系统的鲁棒严格耗散控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 743 – 747.
(DONG Xinzhuang, ZHANG Qingling. Robust strictly dissipative control for linear discrete delay singular systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 743 – 747.)

[13] MASUBICHI I. Dissipative inequalities for continuous – time descriptor systems with applications to synthesis of control gains[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(2): 158 – 164.

[14] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

(下转第474页)

[5] CHEN C T, PENG S T. Intelligent process control using neural fuzzy techniques[J]. *Journal of Process Control*, 1999, 9(6): 493 – 503.

[6] CHANGA W D, HWANGB R C, HSIEHA J G. A self-tuning PID control for a class of nonlinear systems based on the Lyapunov approach[J]. *Journal of Process Control*, 2002, 12(2): 233 – 242.

[7] 孟安波, 叶鲁卿, 殷豪. 遗传算法在水电机组调速器PID参数优化中的应用[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(3): 398 – 404.
(MENG Anbo, YE Luqi, YIN Hao. Application of genetic algorithm in adaptive governor with variable PID parameters[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(3): 398 – 404.)

[8] 孙富春, 李莉, 孙增圻. 非线性系统神经网络自适应控制的发展现状及展望[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(2): 254 – 260.
(SUN Fuchun, LI Li, SUN Zengqi. Survey on adaptive control of nonlinear systems using neural networks[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2): 254 – 260.)

[9] VAPNIK V. The nature of statistical learning theory[M]// *Essays in Control*. New York, American: Springer-Verlag, 1999.

[10] 张学工. 关于统计学习理论和支持向量机[J]. 自动化学报, 2000, 26(1): 32 – 42.
(ZHANG Xuegong. Introduction to statistical learning theory and support vector machines[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 32 – 42.)

[11] LIN C T, YEH C M, LIANG S F, et al. Support-vector-based fuzzy neural network for pattern classification[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(1): 31 – 41.

[12] 刘涵, 刘丁. 基于模糊sigmoid核的支持向量回归建模[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 204 – 208.
(LIU Han, LIU Ding. Support vector regression based on fuzzy sigmoid kernel[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 204 – 208.)

[13] 刘涵, 刘丁, 任海鹏. 基于最小二乘支持向量机的混沌控制[J]. 物理学报, 2005, 54(9): 4019 – 4025.
(LIU Han, LIU Ding, REN Haipeng. Chaos Control based on least square support vector machines[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(9): 4019 – 4025.)

[14] 马晓敏. 基于神经网络的动态系统逆模型辨识及闭环控制[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 829 – 836.
(MA Xiaomin. Inverse identification and closed-loop control of dynamic systems using neural networks[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14(6): 829 – 836.)

[15] HUNT K J, SBARBARO D. Neural networks for nonlinear internal mode control[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1991, 138(5): 431 – 438.

作者简介:

刘 涵 (1972—), 男, 工学博士, 副教授, 研究方向为复杂系统建模与控制、机器学习、智能信息处理等, E-mail: liuhan@xaut.edu.cn;

刘 丁 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能控制、复杂系统建模等, E-mail: liud@xaut.edu.cn.

(上接第467页)

[15] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

[16] ZHANG L Q, LAMS J, XU S Y. On positive realness of descriptor systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(3): 401 – 407.

[16] ZHANG G M, JIA Y M. New results on discrete-time bounded real lemma for singular systems: strict matrix inequality conditions[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Anchorage: [s.n.], 2002: 634 – 638.

作者简介:

李 琴 (1981—), 女, 博士研究生, 从事耗散控制、无源控制等研究, E-mail: qinli0412@163.com;

靖 新 (1963—), 女, 教授, 主要从事广义系统正实控制和系统建模研究, E-mail: jingxinsy@yahoo.com.cn;

张庆灵 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事广义系统、鲁棒控制、分散控制等研究, E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn;

衣 娜 (1979—), 女, 博士研究生, 从事广义系统、鲁棒控制等研究, E-mail: yina_111@163.com.