

文章编号: 1000-8152(2008)03-0517-04

非整数阶系统的频率辨识

林 军¹, POINOT Thierry², 李寿涛¹, TRIGEASSOU Jean-Claude²

(1. 吉林大学 通信工程学院, 吉林 长春 130022; 2. 普瓦捷高等工程师学院 自动化和工业计算机实验室, 法国 普瓦捷 86022)

摘要: 使用频响数据对非整数阶系统作频域模拟和辨识. 首先, 定义了非整数阶微分器的频率特性, 进而给出了非整数阶系统的奈奎斯特曲线的绘制方法. 然后, 运用方程式误差的辅助变量法, 根据实部和虚部频率数据进行非整数阶系统的频率辨识. 最后, 通过两个数字仿真来验证这种辨识方法.

关键词: 非整数阶系统; 模拟; 辅助变量法; 频率辨识

中图分类号: TP14 **文献标识码:** A

Identification of non-integer-order systems in frequency domain

LIN Jun¹, POINOT Thierry², LI Shou-tao¹, TRIGEASSOU Jean-Claude²

(1. College of Communications Engineering, Jilin University, Changchun Jilin 130022, China;

2. Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle, ESIP, Poitiers 86022, France)

Abstract: The modeling and identification of non-integer-order systems using frequency-response data are studied. The frequency characteristic of a non-integer-order differentiator is defined and a method to obtain the Nyquist plot of a non-integer-order system is given. Based on the least squares technique and an instrumental variable, the identification of the non-integer-order system is performed using the real and imaginary parts of the frequency response. Finally, two simulation examples illustrate this methodology.

Key words: fractional systems; modelling; instrumental variables method; frequency identification

1 引言(Introduction)

非整数阶系统也叫长记忆系统, 法国波尔多LAP实验室的Alain OUSTALOU 教授20多年前将它从纯数学研究领域引入了自动化领域^[1,2]. 非整数阶系统的辨识包括时域辨识^[3,4]和频率辨识. 非整数阶频率辨识就是根据频率数据, 通过最小化准则函数, 估计非整数阶模型的传递函数的参数. 在某些情况下(如化工过程、生物系统等), 笔者拥有频率实验数据, 而用整数阶模型无法逼近它们, 这时就要考虑用非整数阶模型逼近这些频率数据的问题.

本文定义了非整数阶微分的频率特性, 进行了非整数阶系统的频率模拟. 根据非整数阶模型和实部、虚部频率数据, 将辅助变量法应用于频率辨识, 进行了非整数阶系统的频率辨识.

2 非整数阶系统的模拟(Modelling of non integer order systems)

2.1 非整数阶模型(Model of non integer order systems)

非整数阶微分的传递函数为:

$$D^r(s) = s^r. \quad (1)$$

与 $D^r(s)$ 相应的频率响应为:

$$D^r(j\omega) = (j\omega)^r = (\omega e^{j\frac{\pi}{2}})^r = \omega^r e^{jr\frac{\pi}{2}}, \quad (2)$$

其伯德图斜率为20 dB/dec, 相角与频率无关, 等于 $r\pi/2$ ^[1].

设非整数阶模型, 其维数为 N , 基础微分实数阶数为 r , 标记为 (N, r) 阶模型:

$$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{mr}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n s^{nr}}. \quad (3)$$

2.2 奈奎斯特曲线(Nyquist plot)

方程式(2)的进一步表达式:

$$(j\omega)^r = \omega^r e^{jr\frac{\pi}{2}} = \omega^r \cos(r\pi/2) + j\omega^r \sin(r\pi/2), \quad (4)$$

代入非整数阶模型的传递函数, 得其频率特性:

$$G(j\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \omega^{mr} e^{jm r \pi/2}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n \omega^{nr} e^{jn r \pi/2}} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{Nr(\omega) + jNi(\omega)}{Dr(\omega) + jDi(\omega)}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} Nr(\omega) = \sum_{m=0}^M b_m \omega^{mr} \cos(mr\pi/2), \\ Ni(\omega) = \sum_{m=0}^M b_m \omega^{mr} \sin(mr\pi/2), \\ Dr(\omega) = 1 + \sum_{n=1}^N a_n \omega^{nr} \cos(nr\pi/2), \\ Di(\omega) = \sum_{n=1}^N a_n \omega^{nr} \sin(nr\pi/2). \end{cases} \quad (6)$$

根据方程式(5), 可以化为下面的形式:

$$G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega), \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} \text{Re}(\omega) = \frac{Nr(\omega)Dr(\omega) + Ni(\omega)Di(\omega)}{Dr(\omega)^2 + Di(\omega)^2}, \\ \text{Im}(\omega) = \frac{Ni(\omega)Dr(\omega) - Nr(\omega)Di(\omega)}{Dr(\omega)^2 + Di(\omega)^2}. \end{cases} \quad (8)$$

今有(1, r)阶模型

$$G(s) = \frac{4}{1 + s^r}. \quad (9)$$

图1表示对于 r 的3个不同取值时 $G(j\omega)$ 的奈奎斯特曲线.

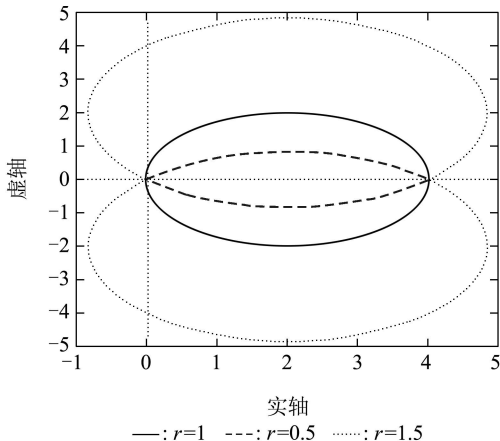


图1 (1, r)阶传递函数的奈奎斯特曲线

Fig. 1 Nyquist plot of the transfer of order (1, r)

3 非整数阶系统的频率辨识(Frequency identification of non integer order systems)

3.1 用最小二乘法作为最优化算法(Least square optimize method)

设拥有实部和虚部频率数据 $\text{Re}^*(\omega)$ 和 $\text{Im}^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} G^*(j\omega) &= \text{Re}^*(\omega) + j\text{Im}^*(\omega) = \\ G(j\omega) + b(j\omega) &= \\ \frac{Nr(\omega) + jNi(\omega)}{Dr(\omega) + jDi(\omega)} + b(j\omega), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $b(j\omega)$ 为复数噪声. 有

$$\begin{aligned} \text{Re}^*(\omega) + j\text{Im}^*(\omega) &= \\ [\text{Re}^*(\omega) + j\text{Im}^*(\omega)] \cdot \\ [-Dr(\omega) + 1 - jDi(\omega)] + Nr(\omega) + jNi(\omega) + \\ \underbrace{[Dr(\omega) + jDi(\omega)]b(j\omega)}_{be(j\omega)}. \end{aligned} \quad (11)$$

设数据向量 $\varphi_r(\omega)$ 和 $\varphi_i(\omega)$ 为:

$$\begin{cases} \varphi_r(\omega)^T = [-\omega^r \cos(r\pi/2) \cdot \text{Re}^*(\omega) + \\ \omega^r \sin(r\pi/2) \cdot \text{Im}^*(\omega) \cdots - \\ \omega^{Nr} \cos(Nr\pi/2) \cdot \text{Re}^*(\omega) + \\ \omega^{Nr} \sin(Nr\pi/2) \cdot \text{Im}^*(\omega) \\ 1 \quad \omega^r \cos(r\pi/2) \cdots \omega^{Mr} \cos(Mr\pi/2)], \\ \varphi_i(\omega)^T = [-\omega^r \cos(r\pi/2) \cdot \text{Im}^*(\omega) - \\ \omega^r \sin(r\pi/2) \cdot \text{Re}^*(\omega) \cdots - \\ \omega^{Nr} \cos(Nr\pi/2) \cdot \text{Im}^*(\omega) - \\ \omega^{Nr} \sin(Nr\pi/2) \cdot \text{Re}^*(\omega) \\ 0 \quad \omega^r \sin(r\pi/2) \cdots \omega^{Mr} \sin(Mr\pi/2)], \end{cases} \quad (12)$$

又设 $\underline{\theta}^T = [a_1 \cdots a_N \quad b_0 \cdots b_M]$ 是 $G(s)$ 传递函数的准确参数向量, 于是 $\text{Re}^*(\omega)$ 和 $\text{Im}^*(\omega)$ 可写成:

$$\begin{cases} \text{Re}^*(\omega) = \varphi_r(\omega)^T \underline{\theta} + \text{ber}(\omega), \\ \text{Im}^*(\omega) = \varphi_i(\omega)^T \underline{\theta} + \text{bei}(\omega). \end{cases} \quad (13)$$

假设需要估计的非整数阶模型的结构已知, 为(N, r)阶模型:

$$\hat{G}(s) = \frac{\sum_{m=0}^M \hat{b}_m s^{mr}}{1 + \sum_{n=1}^N \hat{a}_n s^{nr}}, \quad (14)$$

笔者要做的就是估计 $\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_N, \hat{b}_0 \cdots \hat{b}_M$ 这些参数.

设 $\hat{\underline{\theta}}^T = [\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_N \quad \hat{b}_0 \cdots \hat{b}_M]$ 是模型的参数向量, 于是模型关于参数成线性的结构为:

$$\begin{cases} \hat{\text{Re}}(\omega) = \varphi_r(\omega)^T \hat{\underline{\theta}} \\ \hat{\text{Im}}(\omega) = \varphi_i(\omega)^T \hat{\underline{\theta}}. \end{cases} \quad (15)$$

实部和虚部方程式误差为

$$\begin{cases} er(\omega) = \text{Re}^*(\omega) - \hat{\text{Re}}(\omega), \\ ei(\omega) = \text{Im}^*(\omega) - \hat{\text{Im}}(\omega). \end{cases} \quad (16)$$

基于方程式误差的平方准则函数为

$$J = \sum_{k=1}^K |e(j\omega_k)|^2 = \sum_{k=1}^K [er(\omega_k)^2 + ei(\omega_k)^2] = \sum_{k=1}^K \left\{ [\text{Re}^*(\omega_k) - \varphi_r(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}]^2 + [\text{Im}^*(\omega_k) - \varphi_i(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}]^2 \right\}. \quad (17)$$

最小化准则函数, 在准则函数取最小值处, 它对 $\hat{\underline{\theta}}$ 的一阶导数为零:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\underline{\theta}}} = -2 \sum_{k=1}^K \left\{ \varphi_r(\omega_k) [\text{Re}^*(\omega_k) - \varphi_r(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}] + \varphi_i(\omega_k) [\text{Im}^*(\omega_k) - \varphi_i(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}] \right\} = 0. \quad (18)$$

若 $\sum_{k=1}^K [\varphi_r(\omega_k) \varphi_r(\omega_k)^T + \varphi_i(\omega_k) \varphi_i(\omega_k)^T]$ 可逆, 则有最小二乘法的估计值:

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = \left\{ \sum_{k=1}^K [\varphi_r(\omega_k) \varphi_r(\omega_k)^T + \varphi_i(\omega_k) \varphi_i(\omega_k)^T] \right\}^{-1} \sum_{k=1}^K [\varphi_r(\omega_k) \text{Re}^*(\omega_k) + \varphi_i(\omega_k) \text{Im}^*(\omega_k)]. \quad (19)$$

$\text{ber}(\omega_k)$ 和 $\text{bei}(\omega_k)$ 总是与 $\varphi_r(\omega_k)$ 和 $\varphi_i(\omega_k)$ 相关的, 因此, 最小二乘法的估计值总是有偏的, 除非数据不带噪声.

如果 $r = 1$, 最小二乘法就是Levy法^[5]. 由此可见, Levy法被应用于带有噪声的数据将是有偏估计方法.

3.2 用辅助变量法作为最优化算法(Instrumental variable optimize method)

定义辅助变量 $\varphi_{rI}(\omega_k)$ 和 $\varphi_{iI}(\omega_k)$, 用这些辅助变量相应替换方程式(18)中的 $\varphi_r(\omega_k)$ 和 $\varphi_i(\omega_k)$:

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{k=1}^K \left\{ \varphi_{rI}(\omega_k) [\text{Re}^*(\omega_k) - \varphi_r(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}] + \right. \\ & \left. \varphi_{iI}(\omega_k) [\text{Im}^*(\omega_k) - \varphi_i(\omega_k)^T \hat{\underline{\theta}}] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

辅助变量法的估计值为

$$\hat{\underline{\theta}}_{IV} = \left\{ \sum_{k=1}^K [\varphi_{rI}(\omega_k) \varphi_r(\omega_k)^T + \varphi_{iI}(\omega_k) \varphi_i(\omega_k)^T] \right\}^{-1} \sum_{k=1}^K [\varphi_{rI}(\omega_k) \text{Re}^*(\omega_k) + \varphi_{iI}(\omega_k) \text{Im}^*(\omega_k)]. \quad (21)$$

如果 $\text{ber}(\omega_k)$ 和 $\text{bei}(\omega_k)$ 分别与 $\varphi_{rI}(\omega_k)$ 和 $\varphi_{iI}(\omega_k)$ 无

关, 辅助变量法的估计值将是无偏的.

4 数字仿真的研究(Digital simulation)

要辨识的系统是(3, 0.5)阶系统:

$$G(s) = \frac{4}{1 + 4s^{0.5} + 0.5s + s^{1.5}}. \quad (22)$$

这个系统频率响应的数字仿真由1000个实部和虚部频率数据构成, 这些数据被加上服从高斯分布的白噪声, 其信噪比 $S/B = 100$, 均值为零. 注意, 为了取得良好的辨识结果, 数据采样点要尽量均匀分布在主要奈氏曲线上, 不要过于集中在 $\omega \rightarrow 0$ 和 $\omega \rightarrow \infty$ 的两端.

假设非整数阶模型的结构与要辨识的系统相同, 参数 a_1, a_2, a_3 和 b_0 由前面的技术进行估计. 用LS和IV方法估计的(3, 0.5)阶模型如式(23)和(24):

$$\hat{G}(s) = \frac{3.6169}{1 + 3.1938s^{0.5} + 0.3001s + 0.5844s^{1.5}}. \quad (23)$$

用最小二乘法获得 a_1, a_2, a_3 和 b_0 的估计值的平均值和真值明显不同, 是有偏的.

$$\hat{G}(s) = \frac{3.9999}{1 + 3.9963s^{0.5} + 0.5055s + 0.9938s^{1.5}}. \quad (24)$$

用辅助变量法估计的参数 a_1, a_2, a_3 和 b_0 的值与真值非常接近, 可见, IV法是无偏的.

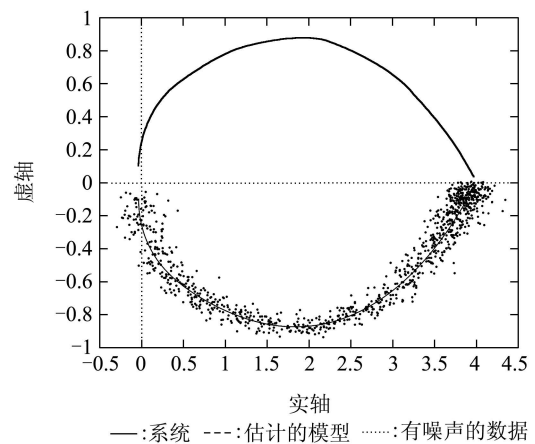


图2 系统和用IV法估计的模型的奈奎斯特曲线
Fig. 2 Nyquist plots of the system and of the estimated IV model

高阶整数阶模型与系统结构不同, 当非整数阶频率区间很小时(如 $G(s) = \frac{4}{1 + s^{0.5}}$ 在两个十倍频程的情况, 低频 $\omega_b = 0.1$ 和高频 $\omega_h = 10$), 高阶整数阶模型能够模拟非整数阶系统. 相反, 当非整数阶频率区间很大时(如 $G(s) = \frac{4}{1 + s^{0.5}}$ 在八个十倍频程的情况, $\omega_b = 10^{-4}$ 和 $\omega_h = 10^4$), 它就不能模拟非整数阶系统. 下面是同样的系统在两个十倍频程的情况下, 估计的整数阶模型:

$$\hat{G}(s) = (3.4542 + 20.49s + 19.63s^2 + 4.28s^3 + 0.4107s^4 + 0.05566s^5 + 2.282 \times 10^{-3}s^6) / (1 + 7.9101s + 11.0234s^2 + 3.7868s^3 + 0.4321s^4 + 0.0530s^5 + 4.169 \times 10^{-3}s^6 + 4.652 \times 10^{-5}s^7). \quad (25)$$

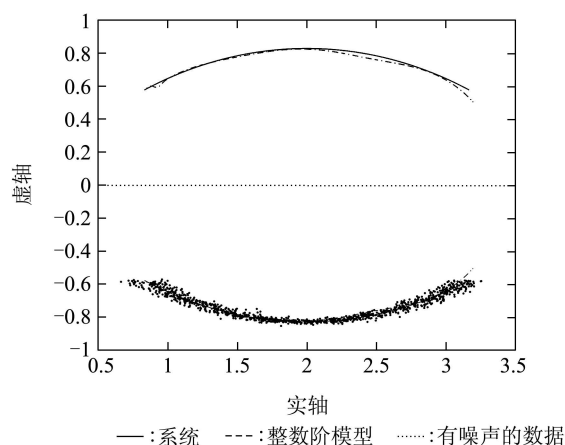


图3 系统和整数阶模型的奈奎斯特曲线

Fig. 3 Nyquist plots of the system and of the integer model

5 结论(Conclusion)

本文介绍了基于实部和虚部频率数据进行非整数阶频率辨识的方法. 证明了用辅助变量法作为最优化算法的技术使得到的估计值是无偏的. 另外, 辅助变量法是线性最优化算法, 运算简单, 缺点是要假设微分的阶数事先已知. 后续工作是研究基于增益和相位的频率数据进行的非整数阶频率辨识.

参考文献(References):

- [1] OUSTALOUP A. *La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications*[M]. Paris, France: HERMES, 1995.
- [2] LE LAY L. *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entiere*[D]. Bordeaux, France: Thèse de l'université Bordeaux I, 1998.
- [3] 林军, POINOT T, TRIGEASSOU J C. 兔子横纹肌的非整数阶模型的参数估计[C] // WCICA'2004, 第5届全球智能控制与自动化大会. 中国, 杭州: IEEE 出版, 2004, 1: 254 – 257.
(LIN Jun, POINOT T, TRIGEASSOU J C. Parameter estimation of the non integer model of the striated muscle of a rabbit[C] // WCICA'2004, 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, China: IEEE Press, 2004, 1: 254 – 257.)
- [4] LIN J, POINOT T, TRIGEASSOU J C, OUVARD R. Parameter estimation of fractional systems: application to the modelling of a lead-acid battery[C] // SYSID'2000, 12nd IFAC, Symposium on System Identification. Santa Barbara, California, USA: IFAC Press, 2000.
- [5] LEVY E C. Complex-curve fitting[J]. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1959, 4(3): 37 – 43.

作者简介:

林 军 (1967—), 男, 吉林大学控制系副教授, 硕士和博士学位在法国LAI实验室获得, 研究自动控制理论、系统建模与辨识和非整数阶系统, E-mail: linj@jlu.edu.cn;

POINOT Thierry (1969—), 男, 法国LAI实验室讲师, 研究Moments的应用、系统建模与辨识和非整数阶系统, E-mail: poinot@esip.univ-poitiers.fr;

李寿涛 (1975—), 男, 吉林大学控制系讲师, 研究自动控制理论和系统仿真、智能机械与机器人控制, E-mail: list@jlu.edu.cn;

TRIGEASSOU Jean-Claude (1946—), 男, 法国LAI实验室教授, 研究Moments的应用、系统建模与辨识和非整数阶系统等多项领域, E-mail: trigeassou@esip.univ-poitiers.fr.