第 25 卷第 3 期
2008 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 3
Jun. 2008

文章编号：1000−8152(2008)03−0521−04

时滞切换系统指数稳定性分析: 微分不等式方法

从 屾[1]， 费树岷[2]， 李 涛[2]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 南京 江苏 210094; 2. 东南大学 自动化研究所, 南京 江苏 210096)

摘要: 考虑由多个时滞系统组成的切换系统, 并研究在什么条件下, 可以把无时滞切换系统的稳定性分析及结论推广至上述的时滞系统. 方法是将时滞项作为线性常微分方程扰动项, 利用常数变易公式与Halanay微分不等式, 分析时滞项对于切换系统稳定性的影响. 结论表明, 在时滞项满足某些前提时, 切换系统稳定性分析的Lyapunov方法仍然适用. 仿真算例验证了方法的有效性.

关键词： 切换系统; 时滞; 指数稳定性; Halanay不等式

中图分类号： TP273　　　**文献标识码**： A

On exponential stability of switched systems with time-delays: differential inequality approach

CONG Shen[1]， FEI Shu-min[2]， LI Tao[2]

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

Abstract: The switched system consisting of a family of subsystems with time-delays is considered. Our problem is to find the proper conditions, under which the methods and results in the stability studying of a switched system without time-delays can be generalized to the above system with time-delays. We treat the time-delay term as the perturbation of a linear ordinary differential equation, and exploit the variation-of-constants formula and Halanay differential inequality. The obtained results imply that the Lyapunov approach is still applicable for the stability analysis of switched systems with time-delays in some prescribed conditions. Finally, examples are given to demonstrate the proposed approach.

Key words: switched systems; time-delay; exponential stability; Halanay inequality

1 引言(Introduction)

本文考虑若干线性时滞子系统:

$$\dot{x}(t)=A_ix(t)+A_{i1}x(t-r), t\geqslant t_0; i\in\{1,\cdots,N\}, \tag{1a}$$

在取值于指标集$\{1,\cdots,N\}$的右连续切换信号:

$$s(t)=\mathit{\Pi}\left(t,s(t^-),x(t)\right), t\geqslant t_0, \tag{1b}$$

驱动下构成的切换动力系统. 其中$x\in\mathbb{R}^n, r>0$为状态变量与时滞常数, $\{A_i,A_{i1}\}_{i=1}^N$ 为适当维数矩阵. $\mathit{\Pi}:[t_0,\infty)\times\{1,\cdots,N\}\times\mathbb{R}^n\to\{1,\cdots,N\}$表征了切换信号的动力学行为, 可以根据随时间的演化规律将其表述为切换序列的形式:

$$\{(t_0,\pi(0)),\cdots,(t_k,\pi(k)),\cdots\,|\lim_{k\to\infty}t_k=\infty\}, \tag{2}$$

其中$t_k,\pi(k)\in\{1,\cdots,N\}$为切换时刻及相应的切换序列取值.

时滞与切换是导致系统失去稳定性的重要因素, 二者相互耦合可能导致复杂的动力学行为. 给定切换序列(2), 时滞切换系统(1)成为具有非连续时变系数矩阵的自治系统, 文献[1]证明了其解的整体存在唯一性, 并且其一致渐近稳定性等价于指数稳定性. 切换系统的时变性与非连续性取决于切换序列的行为, 这是其区别于一般时变系统的本质所在.

无时滞条件下, 文献[2]利用以包含原点的凸多面体的Minkowskii泛函所诱导的非二次型Lyapunov函数[3], 给出了系统在任意切换序列驱动下一致渐近稳定的充分必要条件; 但是其结论是非构造性的, 求解比较复杂[4]. 基于二次型Lyapunov函数的相应结论较为保守, 但是通过分析Lyapunov方程的代数与几何特征可以刻画子系统存在公共Lyapunov函数的结构属性[5~10].

收稿日期: 2006−05−22，收修改稿日期: 2007−04−10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574066).

由于时滞的存在, 相空间由有限维欧式空间提升为无穷维函数空间, Lyapunov方程转化为代数Riccati方程, 其特征结构分析的方法不再适用, 因此难以提取系统(1)的结构属性以保证在任意切换序列驱动下的一致渐近稳定性.

本文将时滞项作为线性常微分方程的扰动项, 借助常数变易公式与Halanay微分不等式, 寻求将切换系统稳定性分析方法推广至时滞情形的条件. 结论说明, 在时滞项满足约束的前提下, Lyapunov方程的特征结构分析方法仍然适用.

2 记号与引理 (Notations and lemmas)

$C_{n,r} := C([-r,0],\mathbb{R}^n)$表示由$[-r,0]$映入$\mathbb{R}^n$的具有一致范数的连续函数构成的Banach空间, $x_t \in C_{n,r}$含义为$x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-r,0]$.$|\cdot|$表示$\mathbb{R}^n$的欧式范数, $\|\cdot\|$表示$C_{n,r}$的一致范数及矩阵的Frobenius范数. 对于实对称矩阵, $\lambda_{\max}(\cdot),\lambda_{\min}(\cdot)$表示其最大与最小特征值. D^+为实值连续函数的右导数算子.

为便于论述, 设$\{\bar{A}_i := A_i + A_{i1}\}_{i=1}^N, G := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\|A_i\|+\|A_{i1}\|\}, H := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\|A_{i1}\|\}$. 对于给定切换序列(2), 记$\bar{A}(t) := \bar{A}_{s(t)}, A(t) := A_{s(t)}, A_1(t) := A_{s(t)1}, t\geqslant t_0$.

引理 1 (微分方程常数变易公式[1]) 如果$y(t;t_0,y(t_0))$为齐次线性微分方程$\dot{y}(t) = A(t)y(t), t\geqslant t_0$初值问题的唯一整体解, 那么$x(t) = y(t;t_0,x(t_0)) + \int_{t_0}^t y(t;\tau,f(\tau))\mathrm{d}\tau, t\geqslant t_0$为非齐次线性微分方程$\dot{x}(t) = A(t)x(t)+f(t), t\geqslant t_0$的唯一整体解, 其中$f:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}^n$为局部可积函数.

引理 2 (Halanay不等式[11]) 若$r>0$, $a>b>0$, $u(t)\geqslant 0$为连续实值函数, 满足微分不等式$D^+u(t)\leqslant -au(t)+b\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t+\theta)$, $t\geqslant t_0$, 则$u(t)\leqslant \sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$, $t\geqslant t_0, \mu>0$满足$\mu - a + b\mathrm{e}^{\mu r} = 0$.

3 主要结果(Main results)

本文出发点在于建立时滞项的约束条件, 使切换系统稳定性分析的方法得以推广, 通过不同的解析技巧分别得到了时滞相关与时滞无关的结论.

定理 1 对于给定切换序列(2), 如果线性子系统$\{\dot{y}(t) = A_iy(t), t\geqslant t_0\}_{i=1}^N$在其驱动下指数稳定, 即存在依赖于切换序列的常数$\gamma>0,\kappa>1$, 使得$|y(t)|\leqslant\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}|y(t_0)|, t\geqslant t_0$, 并且时滞项系数矩阵满足如下约束条件:

$$H < \frac{\gamma}{\kappa}, \tag{3}$$

那么在相同切换序列驱动下, 系统(1)是指数稳定的.

证 系统(1)表述为下述形式:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), t\geqslant t_0, \tag{4}$$

其中$f(t) := A_1(t)x(t-r), t\geqslant t_0$, 并且满足如下估计:

$$|f(t)|\leqslant H\|x_t\|, t\geqslant t_0. \tag{5}$$

设初始条件为$x_{t_0} = \phi\in C_{n,r}$, 依据引理1可知系统(4)的解具有如下构造:

$$x(t) = y(t;t_0,\phi(t_0)) + \int_{t_0}^t y(t;\tau,f(\tau))\mathrm{d}\tau, t\geqslant t_0, \tag{6}$$

对于$t\geqslant t_0$, 结合(5)(6)可知:

$$\begin{aligned}&|x(t)|\leqslant|y(t;t_0,\phi(t_0))| + \int_{t_0}^t|y(t;\tau,f(\tau))|\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)| + \mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^t|f(\tau)|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau]\leqslant\\&\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)| + H\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^t\|x_\tau\|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau].\end{aligned} \tag{7}$$

构造$[t_0-r,\infty]$上的连续函数如下:

$$u(t) = \begin{cases}\kappa|\phi(t)|, & t_0-r\leqslant t\leqslant t_0,\\ \kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)|+ & \\ H\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^t\|x_\tau\|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau], & t\geqslant t_0,\end{cases} \tag{8}$$

则式(7)蕴涵着$|x(t)|\leqslant|u(t)|, t\geqslant t_0-r$, 因此等式(8)两端微分得到:

$$\begin{aligned}&D^+u(t) = \\&-\gamma\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)| + H\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^t\|x_\tau\|\mathrm{d}\tau] + \\&\kappa H\|x_t\| = \\&-\gamma u(t) + \kappa H\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t+\theta)|,\\&t\geqslant t_0,\end{aligned} \tag{9}$$

结合式(3)(9)与引理2推知

$$\begin{aligned}&|x(t)|\leqslant u(t)\leqslant\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} = \\&\kappa\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t\geqslant t_0,\end{aligned}$$

其中$0<\lambda<\gamma$满足$\lambda-\gamma+\kappa H\mathrm{e}^{\lambda r} = 0$. 证毕.

系 1 对于由子系统$\{\dot{y}(t) = A_iy(t), t\geqslant t_0\}_{i=1}^N$构成的切换系统, 如果存在常数$\gamma>0,\kappa>1$, 使得$|y(t)|\leqslant\kappa|y(t_0)|\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}, t\geqslant t_0$在任意切换序列作用下成立[12], 并且时滞项系数矩阵满足约束条件(3);那么对于系统(1), 存在常数$0<\lambda<\gamma$使得$|y(t)|\leqslant\kappa\sup\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t\geqslant t_0$在任意切换序列作用下成立.

定理 2 对于给定切换序列(2), 如果线性子系统$\{\dot{y}(t) = \bar{A}_iy(t), t\geqslant t_0\}_{i=1}^N$在其驱动下指数稳定, 即存在依赖于切换序列的常数$\gamma>0,\kappa\geqslant 1$, 使

得$|y(t)| \leqslant \kappa|y(t_0)|\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}, t \geqslant t_0$, 并且时滞常数满足如下约束条件:

$$r < \frac{\gamma}{\kappa GH}, \tag{10}$$

那么在相同切换序列驱动下, 系统(1)是指数稳定的.

证　根据$x(t) - x(t-r) = \int_{t-r}^{t} \dot{x}(\theta)\mathrm{d}\theta$, 系统(1)转化为下述形式:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + f(t), t \geqslant t_0, \tag{11}$$

其中

$$f(t) := -A_1(t)\int_{t-r}^{t}[A(\tau)x(\tau)+A_1(\tau)x(\tau-r)]\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant t_0,$$

并且满足如下估计:

$$|f(t)| \leqslant rGH\|x_t\|, t \geqslant t_0. \tag{12}$$

设初始条件为$x_{t_0} = \phi \in C_{n,r}$, 依据引理1可知系统(11)的解具有如下构造:

$$x(t) = y(t;t_0,\phi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} y(t;\tau,f(\tau))\mathrm{d}\tau, t \geqslant t_0, \tag{13}$$

对于$t \geqslant t_0$, 结合式(12)(13)推知:

$$\begin{aligned}&|x(t)| \leqslant |y(t;t_0,\phi(t_0))| + \int_{t_0}^{t}|y(t;\tau,f(\tau))|\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)| + \mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^{t}|f(\tau)|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau] \leqslant \\ &\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)|+rGH\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^{t}\|x_\tau\|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau].\end{aligned} \tag{14}$$

构造$[t_0,\infty)$上的连续函数如下:

$$u(t)=\begin{cases}\kappa|\phi(t)|, & t_0-r\leqslant t\leqslant t_0,\\ \kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)|+ & \\ rGH\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^{t}\|x_\tau\|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau], & t\geqslant t_0\end{cases} \tag{15}$$

则式(14)蕴涵着$|x(t)| \leqslant u(t), t \geqslant t_0 - r$, 因此等式(15)两端微分得到

$$\begin{aligned}&D^+u(t) \leqslant \\ &\kappa\gamma\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}[|\phi(t_0)| + \\ &rGH\mathrm{e}^{-\gamma t_0}\int_{t_0}^{t}\|x_\tau\|\mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{d}\tau] + r\kappa GH\|x_t\| = \\ &-\gamma u(t) + r\kappa GH\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t+\theta), t \geqslant t_0,\end{aligned} \tag{16}$$

结合(10)(16)与引理2推知

$$\begin{aligned}&|x(t)| \leqslant u(t) \leqslant \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0} u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} = \\ &\kappa\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t \geqslant t_0,\end{aligned}$$

其中$0 < \lambda < \gamma$满足$\lambda - \gamma + r\kappa GH\mathrm{e}^{\lambda r} = 0$.

证毕.

系 2　对于由子系统$\{\dot{y}(t) = \bar{A}_i y(t), t \geqslant t_0\}_{i=1}^{N}$构成的切换系统, 如果存在常数$\gamma > 0, \kappa \geqslant 1$, 使得$|y(t)| \leqslant \kappa|y(t_0)|\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}, t \geqslant t_0$在任意切换序列驱动下成立[12], 并且时滞常数满足约束(10);那么对于系统(1), 存在常数$0 < \lambda < \gamma$, 使得$|x(t)| \leqslant \kappa\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, t \geqslant t_0$在任意切换序列驱动下成立.

注 1　根据论证过程可知, 定理1与2对于更为一般的具有时变系数矩阵的时滞系统都是成立的. 定理1与2隐含地借助了切换系统的特殊性—其稳定性可以通过解析子系统自身及其相互间的结构属性加以刻画—将Lyapunov方程特征结构分析的方法推广至时滞情形. 因此, 对于切换系统而言, 本文结论是构造性的, 即可以通过解析方法检验其条件; 对于一般时变系统, 却难以构造相应的解析结论.

注 2　较之于定理1与2, 系1与2的结论在更为重要, 这是因为其条件构造中的指数衰减率与切换序列无关, 只取决于子系统的结构, 而前者通常不具备这种特征.

4　仿真分析(Simulation analysis)

例 1　文献[10]结论表明, $A_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$与$A_2 = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$存在公共二次型Lyapunov函数. Lyapunov不等方程$\{A_i'P + PA_i + 2\eta I_2 < 0\}_{i=1}^{2}$的一组解为$P = \begin{bmatrix}1.05 & -0.53\\ -0.53 & 1.56\end{bmatrix}, \eta = 0.5$. 因此, 对于由子系统$\{\dot{y}(t) = A_i y(t), t \geqslant t_0\}_{i=1}^{2}$构成的切换系统, $|y(t)| \leqslant \left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{\frac{1}{2}}|y(t_0)|\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}, t \geqslant t_0$在任意切换序列驱动下成立. 根据约束条件(3)计算知, 若时滞项矩阵满足$\max_{i=1,2}\{\|A_{i1}\|\} < 0.31$, 则系统(1)在任意切换序列驱动下保持指数稳定. 时滞项系数矩阵$A_{11} = A_{21} = \begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}$, 时滞常数$r = 2.0$ s时, 在随机切换驱动下状态变量轨线如图1中点划线所示.

例 2　设

$$A_1 = \begin{bmatrix}-0.5 & 0.4\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0.2\\ 0 & -0.8\end{bmatrix},$$

$$A_{11} = A_{21} = \begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0 & -0.2\end{bmatrix}.$$

文献[6]结论表明, $\bar{A}_1$与$\bar{A}_2$存在公共二次型Lyapunov函数. Lyapunov不等方程$\{\bar{A}_i'P+P\bar{A}_i+2\eta I_2<0\}_{i=1}^{2}$的一组解为$P = \begin{bmatrix}2.92 & 0.12\\ 0.12 & 4.05\end{bmatrix}, \eta = 0.56$. 因此, 对于由子系统$\{\dot{y}(t) = \bar{A}_i y(t), t \geqslant t_0\}_{i=1}^{2}$构成的切换系

统, $|y(t)| \leqslant \left[\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{\frac{1}{2}} |y(t_0)|\mathrm{e}^{-\eta(t-t_0)}, t \geqslant t_0$在任意切换驱动下成立. 根据约束条件(10)计算知, 若时滞常数$r < 1.56$ s, 则系统(1)在任意切换驱动下指数稳定. 时滞常数$r = 1.5$时, 在随机切换驱动下系统状态轨线如图1中实线所示.

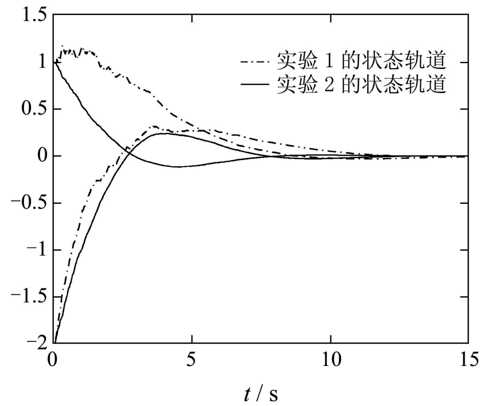

图 1 随机切换序列驱动下系统状态轨线

Fig. 1 State trajectories under random switching action

注 3 仿真算例给出了检验时滞项满足约束条件(3)与(10)的方法: 通过求解Lyapunov不等式得到线性切换系统的稳定裕度, 进而利用式(3)或(10)给出这种稳定裕度所能承受的最大时滞扰动的能力.

5 结束语(Conclusions)

本文以Halanay微分不等式及微分方程常数变易公式为主要引理, 分析时滞现象对于切换系统稳定性的影响; 分析方法突出了切换系统的时变性; 结论说明Lyapunov方程不但能够分析模型不确定的鲁棒稳定性问题, 还具有刻画系统承受时滞扰动的能力. 仿真算例验证了主要结论.

参考文献(References):

[1] HALE J K. *Theory of Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1977.

[2] MOLCHANOV A P, PYATNITSKIY Y S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory[J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 13(1): 59 – 64.

[3] BLANCHINI F. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control[J]. *Automatica*, 1995, 31(3): 451 – 461.

[4] POLANSKI A. Lyapunov function construction by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(7): 1013 – 1016.

[5] CHENG D, GUO L, HUANG J. On quadratic Lyapunov function[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 885 – 890.

[6] LIBERZON D, HESPANHA J P, MORSE S. Stability of switched system: a Lie-algebra condition[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(3): 117 – 122.

[7] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2469 – 2471.

[8] OOBA T, FUNAHASHI Y. Two conditions concerning common QLF's for linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(5): 719 – 721.

[9] OOBA T, FUNAHASHI Y. On a common quadratic Lyapunov function of widely distant systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(12): 1697 – 1699.

[10] OOBA T, FUNAHASHI Y. Stability robustness for linear state space models-A Lyapunov mapping approach[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 29(4): 191 – 196.

[11] HALANAY A. *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*[M]. New York: Springer-Verlag, 1966.

[12] DAYAWANSA W, MARTIN C. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 751 – 760.

作者简介:

从 岫 (1976—), 男, 博士, 研究方向为切换系统与时滞系统的稳定性分析与控制, E-mail: shen_tsong@163.com;

费树岷 (1961—), 男, 教授, 研究方向为非线性系统几何理论、切换系统与时滞系统的稳定性分析;

李 涛 (1979—), 男, 博士研究生, 研究方向为泛函微分方程定性理论与稳定性理论.