

基于局部-整体反馈控制的多个体系统的稳定性

刘志新

(中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100190)

摘要: 本文提出了一类基于局部-整体反馈控制的多个体系统稳定性问题的框架. 该问题具有以下特点: 1) 每个个体有自身的动力学演化规律, 本文假设他们为带噪声的线性回归离散动态方程; 2) 每个个体通过优化自身的局部目标函数与其他个体耦合在一起. 在此框架下, 本文给出了最优的局部-整体反馈控制律, 并初步研究了在此控制律作用下系统的参数对闭环系统均方稳定性的影响.

关键词: 多个体系统; 均方稳定; 局部-整体反馈控制律; 局部目标函数

中图分类号: TP271+.8 **文献标识码:** A

Stability of multi-agent system based on local-global feedback control

LIU Zhi-xin

(Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: We present a framework for the stability problem in a class of multi-agent systems with local-global feedback control. It has the following features: 1) each agent has its own dynamics described by linear discrete dynamical equations with noises; 2) each agent is coupled with other agents by optimizing its own cost functions. In this framework, we derive the optimal local-global feedback control law, and analyzed the effect of the system parameters on the mean-square stability of the closed-loop system.

Key words: multi-agent systems; mean square stability; local-global control feedback; local cost function

1 引言(Introduction)

近年来复杂多个体系统的研究引起了各个领域科研人员的兴趣, 物理学家、生物学家、经济学家、工程学家、语言学家、数学家等都开始从不同的角度进行研究. 复杂系统的一个重要特征是由多个相对简单的个体组成, 每个个体都有自己的动力学演化方式, 个体与个体之间存在着相互作用, 当个体采取决策时不仅影响自身的行为, 还会影响其他个体的动力学行为, 因而整个系统可能会“涌现”出各种各样的结构和性质.

要对复杂系统进行建模, 系统中个体之间相互作用的量化是一个关键点. Vicsek等人^[1]提出了一个“局部信息”进行更新的规则. Jadbabaie等人^[2]将模型线性化, 通过分析指出系统在演化过程中形成的邻居关系图的拓扑结构对系统的一致或同步起着非常重要的作用. 该研究引起了多个体系统同步性研究的热潮^[3~5]. 但是这些条件加在系统的闭环轨迹上, 不宜验证.

黄民懿^[6]把所有个体通过局部目标函数联系起来(称为弱耦合), 并对一类连续的线性随机系统进行研究, 通过求解代数Ricatti方程找出每个个体的控制律(不一定是最优的), 证明了该控制律相对于每个个体的收益函数来说为 ϵ -Nash平衡点, 因而整个系统呈现出一种竞争、协作的相对稳定的状态. 但文献[6]并没有考虑系统的稳定性.

本文对如下一类具有 N 个个体的线性离散回归随机系统进行研究:

$$\begin{aligned}\Sigma_i: A_i(z)y_i(k+1) &= B_i(z)u_i(k) + w_i(k+1), \\ k \geq 0, i &= 1, \dots, N,\end{aligned}$$

假设每个个体追求的目标是: 使自身的状态尽量接近所获得的的整体信息(所有个体状态的平均), 但又不至于耗费太大的能量, 因而定义个体的局部目标函数为

$$J_i(u_i(k)) = E\{[y_i(k+1) - \bar{y}(k)]^2 + \lambda u_i^2(k) | \mathcal{F}(k)\},$$

在时刻 k , 每个个体 Σ_i 根据自身信息 $\{y_i(j), u_i(j-1), j \leq k\}$ (局部的)和 $\{\bar{y}(k)\}$ (整体的, 但只是平均量 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k)$)来得到其最优控制律. 我们研究在此最优控制律作用下系统的参数对闭环系统均方稳定性的影响, 得到了系统稳定与不稳定的充分条件.

2 例子(Example)

下面关于生产的例子受Basar与Ho的工作^[7]的启发, 他们考虑的是由两家卖主组成的非零和静态不合作对策; 黄民懿^[6]将其拓展为由多个公司组成的动态模型. 我们在文献[6]的基础上将问题离散化(因为生产水平和价格的调整不会是每时每刻都在进行的).

考虑由 N 个公司 $F_i (1 \leq i \leq N)$ 生产同一种商品, $y_i(k)$ 代表第 i 个公司 F_i 在第 k 阶段的生产水平. 首先, 假定 $y_i(k)$ 满足下面的动力学方程:

$$y_i(k+1) = u_i(k) + c_i w_i(k+1), k \geq 0, \quad (1)$$

其中 $u_i(k)$ 表示第 i 个公司在第 k 阶段所采取的增加或减少产量的行动, 即系统的输入, c_i 为常数, $w_i(k)$ 为噪声的影响.

其次, 假定第 $k+1$ 阶段的价格按照下面的方式给出:

$$p(k+1) = \eta - \gamma \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k) \right), \quad (2)$$

这里 $\eta, \gamma > 0$ 为常数. $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k)$ 用 N 去平均, 这样允许更多的商家参与竞争以满足更大范围内的消费者进行消费. $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k)$ 表示扩大的市场上的平均生产水平, γ 为需求曲线的斜率. 记 $\bar{y}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k)$.

最后, 假定公司 F_i 根据当前价格调整自己的产量, 我们按照以下比较粗的方式来调整生产水平:

$$y_i(k+1) \approx \beta p(k+1) = \beta [\eta - \gamma \bar{y}(k)] \triangleq v^0, \quad (3)$$

其中 $\beta > 0$ 为一常数, $v^0 = \beta(\eta - \gamma \bar{y}(k))$. 另外, 我们还必须考虑调整 $u_i(k)$ 所消耗的能量, 我们把这一项的消耗记为 $ru_i^2(k)$, $r > 0$. 与文献[6]不同, 我们在此考虑每个公司 F_i 的一步超前二次指标函数:

$$J_i(k) = E\{(y_i(k+1) - v^0)^2 + ru_i^2(k)\}. \quad (4)$$

事实上, v^0 与 $\bar{\beta}[\eta + \bar{y}(k)]$ 具有共同的性质: 取所有个体的平均. 我们将目标函数中的 v^0 用 $\bar{\beta}[\eta + \bar{y}(k)]$ 来代替, 其中的常数项 $\bar{\beta}\eta$ 不影响优化, 我们取为0; 另外本文只考虑 $\bar{\beta} = 1$ 的情形, 当 $\bar{\beta} \neq 1$ 时讨论方法与本文类似, 但结果可能有所不同. 我们把动力学模型(1)推广到一般的ARMAX模型来考虑系统的稳定性.

3 问题的描述及常用记号(Problem statement and some notations)

考虑由 N 个个体组成的一类单输入单输出随机系统, 每个个体按照下面的动力学进行演化:

$$\Sigma_i: A_i(z)y_i(k+1) = B_i(z)u_i(k) + w_i(k+1), \\ i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

其中 $\{y_i(k)\}, \{u_i(k)\}$ 和 $\{w_i(k)\}$ 分别表示个体 Σ_i 的输出、输入及噪声过程(不失一般性, 对 $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ 假设 $u_i(k) = y_i(k) = w_i(k) = 0, \forall k < 0$), $\{A_i(z), B_i(z), i = 1, \dots, N\}$ 为后移算子 $z(z y_i(k) = y_i(k-1))$ 的多项式:

$$A_i(z) = 1 + a_{i1}z + \dots + a_{ip_i}z^{p_i}, p_i \geq 0;$$

$$B_i(z) = b_{i1} + b_{i2}z + \dots + b_{iq_i}z^{q_i-1}, q_i \geq 1,$$

其中 a_{ij}, b_{il} 是参数, 而 p_i 和 q_i 是系统的阶数, $a_{ip_i} \neq 0, b_{iq_i} \neq 0$. 引入参数向量

$$\theta_i = [-a_{i1}, \dots, -a_{ip_i}, b_{i2}, \dots, b_{iq_i}]^T \quad (6)$$

及相应的回归向量

$$\varphi_i(k) = [y_i(k), \dots, y_i(k-p_i+1), \\ u_i(k-1), \dots, u_i(k-q_i+1)]^T, \quad (7)$$

则系统(5)可化为如下的线性回归模型

$$y_i(k+1) = \theta_i^T \varphi_i(k) + b_{i1}u_i(k) + w_i(k+1), \\ i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

为了分析问题方便, 我们对噪声做如下假设:

假设 1 对任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j, \{w_i(k)\}$ 与 $\{w_j(k)\}$ 独立; 对任意的 $i, \{w_i(k), \mathcal{F}(k)\}$ 是鞅差序列, 且满足

$$\sup_k E[w_i^2(k+1)|\mathcal{F}(k)] = \sigma_i^2 < \infty.$$

上面假设中的 $\mathcal{F}(k)$ 可以取为

$$\mathcal{F}(k) = \sigma\{w_i(j), j \leq k, 1 \leq i \leq N\}.$$

根据第2部分关于生产的例子的分析, 将每个个体 Σ_i 的局部目标函数定义如下:

$$J_i(u_i(k)) = E\{[y_i(k+1) - \bar{y}(k)]^2 + \lambda u_i^2(k)|\mathcal{F}(k)\}, \\ 1 \leq i \leq N, \quad (9)$$

其中 $\lambda \geq 0$ 为加权系数, $\bar{y}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k)$ 为整体平均信息.

定义 1 对于个体 Σ_i , 局部-整体(Local-Global)简记作LG反馈控制律 $u_i(k)$ 是指: 存在函数 $f(\cdot)$ 使得 $u_i(k) = f(y_i(j), u_i(j-1), \bar{y}(k), j \leq k)$.

把个体 Σ_i 的LG反馈控制律的全体记做 $\mathcal{U}_i(k)$,

使(9)达到最优的LG反馈控制律为 $\{u_i^0(k), 1 \leq i \leq N\}$, 即:

$$u_i^0(k) = \arg \min_{u_i(k) \in \mathcal{U}_i(k)} J_i(u_i(k)).$$

定义2(均方稳定) 系统(5)称为均方稳定的是指对任意的个体 Σ_i , 其输出满足: $\sup_k \mathbb{E} y_i^2(k) < \infty$; 反之, 系统(5)称为均方不稳定的是指存在某个个体 Σ_i , 其输出满足: $\sup_k \mathbb{E} y_i^2(k) = \infty$.

本文的目的是对每个子系统 Σ_i , 在任何时刻 k , 基于局部信息 $\{y_i(j), u_i(j-1), j \leq k\}$ 和整体平均信息 $\{\bar{y}(k)\}$, 求出 $\{u_i^0(k), 1 \leq i \leq N\}$; 并考察在此最优LG反馈控制律作用下各个子系统是否均方稳定.

本文中用到的一些记号:

$$\begin{cases} F_i(z) = (b_{i1}B_i(z) + \lambda A_i(z)), \\ G_i(z) = \frac{1}{N}b_{i1}B_i(z)z, \\ Y(k+1) = [y_1(k+1), \dots, y_N(k+1)]^T, \\ \tilde{w}_i(k+1) = (\lambda + b_{i1}B_i(z))w_i(k+1), \\ \tilde{W}(k+1) = [\tilde{w}_1(k+1), \dots, \tilde{w}_N(k+1)]^T. \end{cases} \quad (10)$$

4 主要结果(Main results)

将(8)带入局部目标函数(9), 利用假设1, 可得

$$\begin{aligned} J_i(u_i^0(k)) &= \mathbb{E} \left\{ [\theta_i^T \varphi_i(k) + b_{i1}u_i(k) + \right. \\ &\quad \left. w_i(k+1) - \bar{y}(k)]^2 + \lambda u_i^2(k) | \mathcal{F}(k) \right\} = \\ &= \mathbb{E} \left\{ [\theta_i^T \varphi_i(k) + b_{i1}u_i(k) - \right. \\ &\quad \left. \bar{y}(k)]^2 + \lambda u_i^2(k) | \mathcal{F}(k) \right\} + \sigma_i^2, \end{aligned}$$

极小化上式, 很容易得到最优LG控制律为

$$u_i^0(k) = b_{i1} \frac{\bar{y}(k) - \theta_i^T \varphi_i(k)}{b_{i1}^2 + \lambda}, \quad (11)$$

其中记号 θ_i 及 $\varphi_i(k)$ 分别由(6)(7)定义. 把(11)代入(8)经过整理可得闭环子系统为

$$\begin{aligned} y_i(k+1) &= \\ &= \theta_i^T \varphi_i(k) + b_{i1} \frac{\bar{y}(k) - \theta_i^T \varphi_i(k)}{b_{i1}^2 + \lambda} + w_i(k+1) = \\ &= \frac{\lambda}{b_{i1}^2 + \lambda} \theta_i^T \varphi_i(k) + \frac{b_{i1}^2}{b_{i1}^2 + \lambda} \bar{y}(k) + w_i(k+1). \end{aligned} \quad (12)$$

对上述闭环系统, 有以下定理成立.

定理1 在假设1下, 在由(11)所定义的最优LG反馈控制律 $\{u_1^0(k), \dots, u_N^0(k)\}$ 作用下, 下面结果成立:

i) 若 $\lambda = 0$, 无论系统的参数 $\{a_{ij}, b_{il}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq p_i, 1 \leq l \leq q_i\}$ 如何选取, 系统(5)都是

均方不稳定的, 并且每个子系统都均方不稳定, 即对每个个体 Σ_i , 都有:

$$\sup_k \mathbb{E} y_i^2(k+1) = \infty; \quad (13)$$

ii) 若 $\lambda > 0$, 如果系统(5)的参数 $\{a_{ij}, b_{il}, 1 \leq j \leq p_i, 1 \leq l \leq q_i, 1 \leq i \leq N\}$ 及(9)中的 λ 使得关于 z 的方程

$$\prod_{i=1}^N [F_i(z)] - \sum_{i=1}^N G_i(z) \prod_{j \neq i} [F_j(z)] = 0 \quad (14)$$

的根都在单位圆外, 则闭环系统(12)是均方稳定的, 其中 $F_i(z), G_i(z)$ 的定义见(10).

在证明定理之前, 先介绍一个引理. 证明从略.

引理1 设 $a_i(z), b_i(z), i = 1, \dots, N$ 是算子 z 的多项式, 矩阵 $F(z) = [f_{ij}(z)]_{N \times N}$ 的元素为:

$$f_{ii}(z) = a_i(z) - b_i(z); f_{ij}(z) = -b_i(z), i \neq j,$$

则

$$\det(F(z)) = \prod_{i=1}^N a_i(z) - \sum_{i=1}^N b_i(z) \prod_{j \neq i} a_j(z).$$

定理1的证明.

分两种情形:

1) 若 $\lambda = 0$, 则闭环系统(12)退化成下面的形式:

$$y_i(k+1) = \bar{y}(k) + w_i(k+1), \quad (15)$$

将(15)两边对 i 求平均得到

$$\bar{y}(k+1) = \bar{y}(k) + \bar{w}(k+1) = \bar{y}(0) + \sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j),$$

其中 $\bar{w}(k+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i(k+1)$, 因而

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{y}(k+1)^2) &= \mathbb{E}(\bar{y}(0) + \sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j))^2 = \\ &= (\bar{y}(0))^2 + \bar{y}(0) \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j)) + \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j))^2 = \\ &= (\bar{y}(0))^2 + \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j))^2, \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)中的最后一项为

$$\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{k+1} \bar{w}(j))^2 = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{E}(\bar{w}(j))^2 + 2 \sum_{j < l} \mathbb{E}(\bar{w}(j)\bar{w}(l)),$$

利用假设1, 对任意的 j , 有

$$\mathbb{E}(\bar{w}(j))^2 = \mathbb{E}(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i(j))^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2, \quad (17)$$

进一步, 对任意的 $j < l$, 有

$$\mathbb{E}(\bar{w}(j)\bar{w}(l)) = \mathbb{E}[\bar{w}(j)\mathbb{E}(\bar{w}(l)|\mathcal{F}(j))] = 0, \quad (18)$$

再次利用假设1可知

$$\begin{aligned} E y_i^2(k+1) &= E(\bar{y}(k) + w_i(k+1))^2 = \\ E \bar{y}^2(k) + \sigma_i^2 + 2E(\bar{y}(k)w_i(k+1)) &= \\ E \bar{y}^2(k) + \sigma_i^2, \end{aligned} \quad (19)$$

综合(16)~(19)可得

$$E(y_i(k+1))^2 = \bar{y}^2(0) + \sigma_i^2 + \frac{k}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2,$$

很显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} E(y_i(k+1))^2 = +\infty$. 从而定理中的i)得证.

2) 若 $\lambda > 0$, 由记号(6)(7)和控制律(11)可得

$$\begin{aligned} \theta_i^T \varphi_i(k) &= \\ -a_{i1}y_i(k) - \cdots - a_{ip_i}y_i(k-p_i+1) + \\ b_{i2}u_i^0(k-1) + \cdots + b_{iq_i}u_i^0(k-q_i+1) &= \\ (1-A_i(z))y_i(k+1) + (B_i(z)-b_{i1})u_i^0(k) = \\ (1-A_i(z))y_i(k+1) + \\ (B_i(z)-b_{i1})(b_{i1}\frac{\bar{y}(k)-\theta_i^T \varphi_i(k)}{b_{i1}^2+\lambda}), \end{aligned} \quad (20)$$

将等式两边合并得到

$$\begin{aligned} [1 + \frac{b_{i1}(B_i(z)-b_{i1})}{\lambda + b_{i1}^2}] \theta_i^T \varphi_i(k) &= \\ (1-A_i(z))y_i(k+1) + \frac{b_{i1}}{\lambda + b_{i1}^2} (B_i(z)-b_{i1})\bar{y}(k), \end{aligned}$$

化简后有

$$\begin{aligned} (\lambda + b_{i1}B_i(z))\theta_i^T \varphi_i(k) &= \\ (\lambda + b_{i1}^2)(1-A_i(z))y_i(k+1) + b_{i1}(B_i(z)-b_{i1})\bar{y}(k). \end{aligned}$$

将(12)两边同乘以 $(\lambda + b_{i1}B_i(z))$ 并将上式代入得

$$\begin{aligned} (\lambda + b_{i1}B_i(z))y_i(k+1) &= \\ \frac{\lambda}{\lambda + b_{i1}^2} [(\lambda + b_{i1}^2)(1-A_i(z))y_i(k+1) + \\ b_{i1}(B_i(z)-b_{i1})\bar{y}(k)] + \frac{b_{i1}^2}{b_{i1}^2 + \lambda} [\lambda + b_{i1}B_i(z)]\bar{y}(k) + \\ [\lambda + b_{i1}B_i(z)]w_i(k+1), \end{aligned} \quad (21)$$

经过整理可以得到

$$\begin{aligned} (b_{i1}B_i(z) + \lambda A_i(z))y_i(k+1) &= \\ b_{i1}B_i(z)\bar{y}(k) + (\lambda + b_{i1}B_i(z))w_i(k+1), \end{aligned}$$

将上式改写为矩阵的形式

$$M(z)Y(k+1) = \widetilde{W}(k+1), \quad (22)$$

其中矩阵 $M(z) = [m_{ij}(z)]$ 的元素满足:

1) $m_{ii}(z) = F_i(z) - G_i(z)$; 2) $m_{ij}(z) = -G_i(z)$.

根据引理1可知:

$$\det M(z) = \prod_{i=1}^N F_i(z) - \sum_{i=1}^N G_i(z) \prod_{j \neq i} F_j(z), \quad (23)$$

若 $\det M(z) = 0$ 的根都在单位圆外, 则存在 $\lambda_{ij} \in (0, 1)$, 使得

$$(y_i^2(k+1)) = O\left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^k (\lambda_{ij})^{k-l} w_j^2(l)\right), \quad (24)$$

因而 $\sup_k E(y_i^2(k+1)) < \infty$. 定理中的ii)得证.

推论 1 若进一步假设: $B_i(z) \neq 0, \forall |z| \leq 1, i = 1, \dots, N$. 对于定理1的i), ii)两种情形, 都有

$$\sup_k J_i(u_i^0(k)) < \infty, i = 1, \dots, N. \quad (25)$$

证 1) 若 $\lambda = 0$, 根据(15), 可知

$$y_i(k+1) = \bar{y}(k) + w_i(k+1) \quad (26)$$

成立. 此时局部目标函数值为

$$\begin{aligned} J_i(u_i^0(k)) &= E\{[y_i(k+1) - \bar{y}(k)]^2\} = \\ Ew_i^2(k+1) &= \sigma_i^2. \end{aligned}$$

因而结论成立.

2) 若 $\lambda > 0$, 根据定理1有

$$\sup_k E y_i^2(k) < \infty, i = 1, \dots, N, \quad (27)$$

因而有

$$\begin{aligned} \sup_k E \bar{y}^2(k) &= \\ \sup_k \frac{1}{N^2} E\left\{\sum_{i=1}^N y_i^2(k) + \sum_{j \neq i} y_j(k)y_l(k)\right\} &\leq \\ \sup_k \frac{1}{N} E \sum_{i=1}^N y_i^2(k) &< \infty. \end{aligned} \quad (28)$$

注意到系统(5)的形式, 在推论1的条件下可知存在 $\lambda_i \in (0, 1)$, 使得

$$u_i^2(k) = O\left(\sum_{j=0}^k \lambda_i^{k-j} y_i^2(j)\right) + O\left(\sum_{j=0}^k \lambda_i^{k-j} w_i^2(j)\right), \quad (29)$$

根据(28)和假设1可以得到

$$\sup_k E(u_i^2(k)) < \infty, \quad (30)$$

综合(28)~(31), 利用 $J_i(u_i^0(k))$ 的定义可知

$$\sup_k J_i(u_i^0(k)) < \infty.$$

推论1得证.

结论 1 由定理1和推论1可以看到, 在 $\lambda > 0$ 与 $\lambda = 0$ 时, 系统的目标函数值有下面的关系:

$$J_i(u_i^0(k))|_{\lambda > 0} \geq J_i(u_i^0(k))|_{\lambda = 0}. \quad (31)$$

但 $\lambda = 0$ 时, 系统自身是不稳定的, 甚至会导致系统的崩溃; 因此我们在实际中不能盲目的追求目标而

不考虑为此而付出的代价。

例1 设目标函数(9)中 $\lambda = 0.5$; 系统(5)中的 $A_i(z) = 1 + 0.2z$; $B_i(z) = -5 + 2z, i = 1, \dots, N$, 则根据定理1和推论1可知系统(5)均方稳定, 且局部目标函数有界。

5 结论(Concluding remarks)

本文主要提出了一类基于局部-整体反馈控制的多个体系统的稳定性问题的框架, 并在此框架下研究了一类线性随机系统的均方稳定性。但这些结果都是很初步的, 并且所用的方法有一定的局限性, 还有大量问题值得进一步深入研究, 例如, 我们没有考虑反映整个系统状态的整体目标函数(例如同步性问题等); 本文中的邻居关系还有很大的局限性, 实际中, 个体能预测到的平均信息可能是局部的。希望在今后的研究中进一步考虑这些问题。

参考文献(References):

- [1] VICSEK T, CZIROK A, JACOB B E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [2] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [3] SAVKIN AV. Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: analysis of Vicsek's model[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 39(6): 981 – 983.
- [4] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [5] MOUREAU L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 169 – 181.
- [6] HUANG M Y. *Stochastic control for distributed systems with applications to wireless communications*[D]. Canada: McGill University Press, 2003.
- [7] BASAR T, HO Y C. Information properties of the Nash solutions of two stochastic nonzero-sum games[J]. *Journal of Economic Theory*, 1974, 7(4): 370 – 387.
- [8] 张明, 施鼎汉. 联参数不确定系统的 H_∞ 滤波器-基于代数Riccati不等式的判据与设计方法[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(5): 711 – 714.
(ZHANG Ming, SHI Dinghan. An H_∞ filter for uncertain parameter System—a criterion and design method based on algebraic Riccati inequality[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(5): 711 – 714.)
- [9] RAMI S M, BRENT D A, GEROGEE C V. Stochastic Interpretation of H_∞ and Robust Estimation[C] // *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista: IEEE Press, 1994, 3943 – 3948.
- [10] 岳晓奎, 袁建平. H_∞ 滤波算法及其在GPS/SINS组合导航系统中的应用[J]. *航空学报*, 2001, 22(4): 366 – 368.
(YUE Xiaokui; YUAN Jianping. H_∞ filtering algorithm and its application in GPS/SINS integrated navigation system[J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2001, 22(4): 366 – 368.)
- [11] 王新屏, 张显库, 张丽坤. H_∞ 鲁棒滤波器与Kalman滤波器的对比[J]. *系统工程与电子技术*, 2003, 25(10): 1267 – 1269.
(WANG Xinping, ZHANG Xianku, ZHANG Likun. Comparison of H_∞ robust filter and Kalman filter[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2003, 25(10): 1267 – 1269.)
- [12] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [13] 贾志凯, 房建成, 李艳华. 带遗忘因子的在机载SAR运补系统中的应用[J]. *中国惯性技术学报*, 2003, 11(2): 5 – 8.
(JIA Zhikai, FANG Jiancheng, LI Yanhua. On H_∞ filtering with forgetting factor for airborne SAR motion compensation system[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2003, 11(2): 5 – 8.)
- [14] 徐景硕, 秦永元, 彭蓉. 自适应卡尔曼滤波器渐消因子选取方法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(11): 1552 – 1554.
(XU Jingshuo, QIN Yongyuan, PENG Rong. New method for selecting adaptive Kalman filter fading factor[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(11): 1552 – 1554.)
- [15] 赵伟, 袁信, 林雪原. 采用 H_∞ 滤波器的GPS/INS全组合导航系统[J]. *航空学报*, 2002, 23(3): 265 – 269.
(ZHAO Wei, YUAN Xin, LIN Xueyuan. Research on complete gps/ins integration using H_∞ filter[J]. *Acta Aeronautica on Astronautica Sinica*, 2002, 23(3): 265 – 269.)
- [16] KANG G H, LIU J Y, ZHU Y H, et al. Realization of GPS/SST/SINS integrated navigation filter algorithm for ballistic missile[J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Theory and Applications*, 2005, 22(2): 115 – 118.

作者简介:

刘志新 (1979—), 女, 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所博士研究生, 研究方向为复杂多个体系统, E-mail: lzx@amss.ac.cn.

(上接第550页)

作者简介:

康国华 (1978—), 男, 2006年获南京航空航天大学导航、制导与控制博士学位, 现从事惯导、卫星定位与组合导航和微小卫星姿控等领域的研究, E-mail: kghnuaa@nuaa.edu.cn;

刘建业 (1957—), 男, 南京航空航天大学自动化学院教授、博士生导师, 从事惯性技术、卫星定位、组合导航的研究, E-mail: Ljyac@nuaa.edu.cn.