

线性系统对偶Luenberger观测器设计

吴爱国^{1,2}, 段广仁^{2,1}

(1. 哈尔滨工业大学深圳研究生院 信息与控制研究所, 广东 深圳 518055;

2. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 提出了线性系统对偶Luenberger观测器的参数化设计方法. 基于一类广义Sylvester矩阵方程的显式参数化解, 根据一些自由参数给出了对偶Luenberger观测器所有增益矩阵的参数化表达. 该设计方法能提供所有的设计自由度, 它们能进一步用来实现系统的其他性能指标. 数值例子显示了该方法的设计过程.

关键词: 对偶Luenberger观测器; 线性系统; 参数化方法; 广义Sylvester矩阵方程

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Dual Luenberger observer design for linear systems

WU Ai-guo^{1,2}, DUAN Guang-ren^{2,1}

(1. Institute for Information and Control, Harbin Institute of

Technology Shenzhen Graduate School, Shenzhen Guangdong 518055, China;

2. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: A parametric approach is proposed for the design of the dual Luenberger observers of linear systems. Based on a complete parametric solution to a class of generalized Sylvester matrix equations, parametric expressions for all the gain matrices of the observer are derived. The approach provides all the degrees of design freedom, which can be utilized to achieve some additional design requirements. An illustrative example also shows the design procedure of the proposed approach.

Key words: dual Luenberger observer; linear systems; parametric approach; generalized Sylvester matrix equations

1 引言(Introduction)

当系统的状态不能完全量测得到时, 可以构造一个动力学系统来估计系统的状态或状态的函数, 然后通过这个估计的状态设计控制律. 这个估计系统状态的力学系统就是系统的观测器. 比较系统地描述线性系统观测器的是Luenberger的经典论文^[1]. 该文认为观测器就是一个由原系统驱动的力学系统. 基于这个思想提出了线性系统观测器的统一形式, 这在以后的文献中称之为Luenberger观测器. 事实上, 该文还构造了一个动力系统去驱动原系统, 这个动力系统就是所谓的对偶观测器. Luenberger观测器自提出后, 得到了广泛的研究. 文[2,3]详细地讨论了Luenberger观测器的最小阶数问题, 且提出了设计方法. 而文[4,5]还考虑了具有干扰解耦功能的Luenberger观测器设计. 但是, 对于文[1]提

出的对偶观测器很少有人研究. 据作者所知, 仅文[6]考虑基于文[1]提出的对偶观测器的环路复现问题, 较详细讨论了该类环路复现的结构特征. 在该文中, 这种观测器称为对偶Luenberger观测器. 和文[6]一样, 本文也将文[1]提出的对偶观测器称为对偶Luenberger观测器. 本文主要考虑对偶Luenberger观测器的设计方法, 也希望通过本文引起广大学者对对偶Luenberger观测器的注意, 期望对它的研究如同对Luenberger观测器一样系统完善, 如将其应用到故障检测, 干扰解耦等问题. 本文基于文[7]提出的Sylvester矩阵方程的一个完全参数化解, 建立了对偶Luenberger观测器的参数化设计方法. 根据3个设计参数集合, 即观测器系统矩阵特征值集合 $\{s_i, i = 1, 2, \dots, p\}$, 一组参向量 $\{g_i, i = 1, 2, \dots, p\}$ 及参数矩阵 W 和 N' , 给出了

所有观测器增益矩阵的参数形式. 这些自由参数表征了系统设计中存在的自由度. 本文的设计方能提供所有的设计自由度, 它们可用以进一步考虑系统的其他性能和指标(如干扰解耦、LTR、LQR、鲁棒性等), 因此有很强的应用潜力. 最后的数值例子说明了该设计方法的应用过程, 显示了本文设计方法的有效性.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑时不变线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 是 n 维状态向量, $u(t)$ 为 r 维输入控制向量, $y(t)$ 为 m 维输出向量; A, B, C 为适当维数的已知实矩阵. 假设系统(1)满足

- ① 矩阵 C 行满秩, 即 $\text{rank } C = m$;
- ② 矩阵对 (A, C) 能观, 即对任意 $s \in \mathbb{C}$,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

对系统(1)构造对偶Luenberger观测器

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Mw(t), \\ w(t) = y(t) + CPz(t), \\ u(t) = Gz(t) + Nw(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $z \in \mathbb{R}^p$ 为观测器的动态变量. 如果期望输入为 $u = Ly(t)$, 则由文[1]知, 若系统(2)构成系统(1)的对偶观测器, 其系统矩阵应满足如下关系:

- ① 矩阵 F 是稳定的;

②

$$AP - BG = PF; \quad (3)$$

③

$$L = PM + BN. \quad (4)$$

基于上述表述, 本文的对偶Luenberger观测器设计问题可如下描述.

问题DLO 给定实矩阵 A, B, C 和 L , 求取矩阵 F, G, P, M 和 N 使得 F Hurwitz 稳定且满足关系(3)和(4).

3 问题的求解(Solution to problem DLO)

3.1 矩阵 F, G 和 P 的参数化表示(Parametric expressions of matrices F, G and P)

由于非退化矩阵有较小的特征值灵敏度. 不失一般性, 假设观测器矩阵 F 是非退化的, 即有如下表示

$$F = W^{-1}JW, J = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_p\}. \quad (5)$$

很显然矩阵 J 为 F 的 Jordan 标准型矩阵, 而矩阵 W 为

F 的特征向量矩阵. 进一步, 记

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_p],$$

则为保证观测器矩阵是实稳定矩阵, 如下的约束条件应该满足:

约束C1: $\text{Re}(s_i) < 0, i = 1, 2, \dots, p$ 且 $\{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ 自共轭;

约束C2: $w_i = \bar{w}_j$, 当 $s_i = \bar{s}_j$.

考虑到关系(5), 令

$$P = VW, G = -HW, \quad (6)$$

则矩阵方程(3)变为

$$AV + BH = VJ,$$

该方程就是文[7]研究的所谓 Sylvester 矩阵方程. 作如下右互质分解:

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)D^{-1}(s), \quad (7)$$

其中 $N(s) \in \mathbb{R}^{n \times r}[s]$ 和 $D(s) \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$ 右互质. 应用文[7]的结果并考虑到式(6)可以得到如下关于矩阵 P 和 G 参数化解.

定理 1 给定满足假设①和②的系统(1), 且矩阵 F 由式(5)参数化给出, 则满足矩阵方程(3)的所有矩阵 P 和 G 可参数化表示为

$$\begin{cases} P = [N(s_1)g_1 \ N(s_2)g_2 \ \dots \ N(s_p)g_p]W, \\ G = -[D(s_1)g_1 \ D(s_2)g_2 \ \dots \ D(s_p)g_p]W, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $N(s) \in \mathbb{R}^{n \times r}[s]$ 和 $D(s) \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$ 为满足分解(7)的右互质多项式矩阵, 而 $g_i \in \mathbb{C}^p, i = 1, 2, \dots, p$ 为一组任意的参数向量.

为保证矩阵 P 和 G 是实的, 自由参数向量 $g_i \in \mathbb{C}^p, i = 1, 2, \dots, p$ 还应满足如下约束条件:

约束C3: $g_i = \bar{g}_j$, 当 $s_i = \bar{s}_j$.

3.2 矩阵 M 和 N 的参数化表示(Parametric expressions of matrices M and N)

矩阵方程(4)可以等价地写为

$$L = [P \ B] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad (9)$$

由矩阵理论易知, 为使满足式(4)的矩阵存在还应满足如下约束条件:

约束C4:

$$\text{rank}[P \ B] = \text{rank}[P \ B \ L].$$

在约束C4的条件下, 可以得到如下定理所述关于矩阵 M 和 N 的参数化表达.

定理 2 给定满足假设①和②的系统(1), 且观测器增益矩阵 F, P 和 G 由式(5)(8)参数化给出. 则在约束C1~C4成立的条件下, 存在一个矩阵 $L_0 \in$

$\mathbb{R}^{m^* \times m}$ 和可逆矩阵 Q 满足

$$Q' \begin{bmatrix} P & B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q'L = \begin{bmatrix} L_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中: $T_0 \in \mathbb{R}^{m^* \times m^*}$ 非奇异, m^* 为约束C4的公共秩. 这时, 矩阵 M 和 N 由下式给出

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} T_0^{-1} L_0 \\ N' \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中 $N' \in \mathbb{R}^{(m+p-m^*) \times m}$ 为实参数矩阵.

证 在约束C4的条件下, 存在非奇异矩阵 Q' 和 Q 满足式(10). 在式(9)两端左乘 Q' 并考虑到(10)可得

$$\begin{bmatrix} L_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix},$$

这等价于

$$L_0 = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}. \quad (12)$$

令

$$Q^{-1} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M' \\ N' \end{bmatrix}, N \in \mathbb{R}^{(r+p-m^*) \times m}, \quad (13)$$

则式(12)变为

$$L_0 = M'T_0. \quad (14)$$

结合式(13)就可得到增益矩阵 M 和 N 的参数化表达式(11).

3.3 算法(Algorithm)

总结上面的结果, 可以得到如下关于求解问题DLO的定理.

定理3 给定满足假设①和②的系统(1), 则

① 系统(1)存在形如(2)的且观测器矩阵 F 非退化的对偶观测器当且仅当存在参数 $s_i, w_i, g_i, i = 1, 2, \dots, p$ 满足约束C1~C4.

② 当条件①满足时, 对偶观测器(2)的增益矩阵由式(5)(8)和(11)给出.

基于上面的工作, 可以得到求解问题DLO的算法.

算法DLO

第1步 求解满足右互质分解式(7)的右互质多项式矩阵 $D(s)$ 和 $N(s)$;

第2步 确定观测器的阶并获得约束C1~C4的参数表达;

第3步 求解满足式(10)的矩阵 T_0, L_0 和 Q ;

第4步 找到一组满足约束C1~C4的参数 $s_i, w_i, g_i, i = 1, 2, \dots, p$;

第5步 给定参数矩阵 N' 的值并基于上一步获

得的参数, 根据式(5)(8)和(11)给出对偶观测器的增益矩阵.

注1 上面算法第1步中的右互质多项式矩阵的求解方法已由文[7]给出. 对矩阵

$$G = \begin{bmatrix} I_n & A - sI_n & B \\ 0 & I_{n+r} \end{bmatrix} \quad (15)$$

的前 n 行实施初等行变换, 对其后 $n+r$ 列实施初等列变换, 将其化为如下形式:

$$H = \begin{bmatrix} P(s) & 0 & I_n \\ 0 & Q(s) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中 $P(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}[s]$ 和 $Q(s) \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}[s]$ 为单位模阵, 则 $Q(s)$ 的前 n 列恰好给出矩阵 $\begin{bmatrix} N^T(s) & D^T(s) \end{bmatrix}^T$.

注2 如果闭环极点是固定的, 可以采用文[8]提出的方法, 不必求取矩阵多项式形式的 $N(s)$ 和 $D(s)$. 可以对矩阵 $\begin{bmatrix} B & A - s_i I \end{bmatrix}$ 进行如下奇异值分解:

$$\Phi_i \begin{bmatrix} B & A - s_i I \end{bmatrix} \Psi_i = \begin{bmatrix} \Sigma_i & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, p,$$

其中 $\Phi_i, \Psi_i, i = 1, 2, \dots, p$ 是适当维数的酉矩阵, Σ_i 是由 $\begin{bmatrix} B & A - s_i I \end{bmatrix}$ 的奇异值构成的对角矩阵. 对 Ψ_i 进行分块就有

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} * & D(s_i) \\ * & N(s_i) \end{bmatrix},$$

这样就可以得到数值右互质分解. 由于用的是奇异值分解, 因此有很好的数值稳定性, 而且所采用方法可以避开矩阵多项式的计算.

4 数值算例(An illustrative example)

考虑形如(1)的线性系统, 其系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

且增益矩阵取为 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. 下面应用算法DLO给该系统设计一个形如(2)的对偶Luenberger观测器.

第1步 应用文[7]给出的方法得满足分解(7)的右互质多项式为

$$N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-1 \\ s^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

第2步 对本例, 设计形如式(2)的一阶对偶Luenberger观测器. 不失一般性, 矩阵 W 可取为1, 这样约束C2满足. 为满足约束C1, 使观测器极点 s 取为负实数, 这样 $F = s$. 选取实参数向量

$$g = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}^T,$$

则约束C3自动成立. 考虑到式(8), 则矩阵 P 和 G 的参数化表达为

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ s\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} (s-1)\alpha_2 \\ s^2\alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

这样约束C1为 $\alpha_1 \neq 0$, 这时 $m^* = 3$.

第3步 在条件 $\alpha_1 \neq 0$ 下, 矩阵 Q' 和 Q 均可选为单位阵, 这时矩阵 T_0 和 L_0 为

$$T_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

第4步 总结以上内容, 此例中的设计自由度包括特征值 s 和参数 α_1, α_2 .

第5步 矩阵 M 和 N 可参数化表达为

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1 \\ -s \end{bmatrix}.$$

这样

$$M = \frac{1}{\alpha_1}, N = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1 \\ -s \end{bmatrix}.$$

特别选取 $s = -1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$, 则可得到形如式(2)具有如下增益矩阵的对偶Luenberger观测器:

$$F = -1, P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, M = 1, N = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5 结语(Conclusions)

基于一类广义Sylvester矩阵方程的显式参数化通解提出了线性系统的对偶Luenberger观测器的参数化设计方法. 该方法能提供所有的设计自由度. 这些设计自由度由观测器系统的特征值, 一组参数向量和一个参数矩阵等几部分构成. 这些设计参数可

以用来进一步获得系统的其他性能指标. 另外也希望本文能引起广大学者对对偶Luenberger观测器的注意, 进一步考虑其他性质及其在各方面的应用.

参考文献(References):

- [1] LUENBERGER D L. An introduction to observers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6): 596 – 602.
- [2] TSUI C C. What is the minimum function observer order?[J]. *Journal of Frank Institution*, 1998, 335B(4): 623 – 628.
- [3] ALDEEN M, TRINH H. Reduced-order linear functional observer for linear systems[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 1999, 146(5): 399 – 405.
- [4] VALCHER M E. State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 397 – 401.
- [5] CHU D. Disturbance decoupled observer design for linear time-invariant systems: a matrix pencil approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(8): 1569 – 1575.
- [6] TERRA M H, LEITE V M P. The structure of loop transfer recovery (LTR) via dual Luenberger observer[C] // *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*. New York: IEEE Press, 1996, 4: 4767 – 4768.
- [7] DUAN G R. Solutions to matrix equation $AV + BW = VF$ and their application to eigenstructure assignment in linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(2): 276 – 280.
- [8] DUAN G R. Parametric eigenstructure assignment via state feedback: A simple numerically reliable approach[C] // *Proceedings of 4th World Congress on Intelligent Control and Automatic*. New York: IEEE Press, 2002, 1: 165 – 173.

作者简介:

吴爱国 (1980—), 男, 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心的博士研究生, 目前感兴趣的研究方向有广义系统理论和观测器设计, E-mail: ag.wu@163.com;

段广仁 (1962—), 男, 博士生导师, 国家杰出青年基金获得者, 长江学者奖励计划特聘教授, 现为哈尔滨工业大学教授, 控制理论与制导技术研究中心主任, 目前的主要兴趣是广义线性系统理论、鲁棒控制及其在航天控制中的应用, E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn.