

基于等价空间的多速率数据采样系统快速残差的产生

刘云霞^{1,2}, 钟麦英²

(1. 深圳信息职业技术学院 软件工程系, 广东 深圳 518029; 2. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 研究一类多速率数据采样系统基于等价空间的快速残差产生问题. 首先应用一种提升技术, 建立多速率数据采样系统的线性时不变提升模型, 并以提升模型为基础将基于等价空间的残差产生器设计问题归结为最小化问题. 然后, 利用该最小化问题解不唯一的特点, 求得满足因果关系的最优残差产生器. 进一步, 应用逆提升技术实现残差产生同步于测量输出采样的快速化. 算例验证了所提方法的有效性.

关键词: 故障检测; 等价空间; 残差产生; 多速率; 数据采样系统

中图分类号: TP277 **文献标识码:** A

Fast residual-generation for multi-rate sampled-data systems based on the parity-space

LIU Yun-xia^{1,2}, ZHONG Mai-ying²

(1. Software Engineering Department, Shenzhen Institute of Information Technology, Shenzhen Guangdong 518029, China;

2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: Fast residual-generation based on the parity-space is studied for a class of multi-rate sampled-data systems. By applying a lifting technique, we develop a linear time-invariant system to model the multi-rate sampled-data systems and, based on this model, treat the design of the parity-space-based residual generator as a minimization problem. A causal residual generator is obtained by making use of the ununiqueness of the optimal solutions to the minimization problem. Furthermore, a fast synchronization of the residual signal with the measurement output can be realized by employing an inverse lifting technique. A numerical example is given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: fault detection; parity-space; residual-generation; multi-rate; sampled-data system

1 引言(Introduction)

基于模型的故障诊断理论经过近30年的发展已经取得了许多研究成果^[1~4], 特别是随着计算机控制技术的发展, 对数据采样(sampled-data, 简称SD)系统故障检测问题的研究也受到了控制界越来越多的关注^[5~12]. 文献[5, 6]研究了单速率SD系统的故障检测问题; 文献[7, 8]研究了多速率SD(multirate sampled-data, 简称MSD)系统的故障检测问题, 但是得到的是所谓的慢速残差产生器, 即残差信号的产生周期等于各不同测量输出采样周期的最小公倍数. 文献[9]应用MSD系统的提升模型, 设计了一种满足因果关系的基于未知输入观测器的故障诊断滤波器, 并应用逆提升技术实现了残差产生与测量输出采样的同步, 即MSD系统的快速残差产生器; 文献[10]研究了受数据传输时滞影响的MSD系统快速故障诊断问题, 设计了基于观测器的快速残差产生器; 文献[11]给出了一种基于观测

器的MSD系统快速残差产生器设计统一法(a unified approach), 并证明了快速化解的存在性. 等价空间是另外一种常用的故障检测方法, 文献[12]基于等价空间方法研究了MSD残差产生问题, 得到了一种残差产生与控制输入同步的快速残差产生器, 但是在只有控制输入而无输出采样时刻产生残差信号并无实际意义. 因此, 对基于等价空间的MSD快速残差产生问题进一步开展深入研究很有必要.

本文将首先建立MSD系统的提升模型, 通过选择适当维数的等价矩阵, 设计基于等价空间的残差产生器, 并利用等价矩阵解不唯一的特点, 求得使残差系统满足因果关系的最优等价矩阵; 然后通过逆提升运算, 实现残差产生同步于测量输出采样的快速化, 为MSD系统快速故障检测提供新的理论方法.

2 问题描述(Problem statement)

考虑由被控对象, A/D, D/A转换器, 控制器组成的MSD系统, 假设D/A转换器采样周期为 h , 测量

输出为多速率数据采样且各采样周期均为 h 的整数倍,以 h 为采样周期的被控对象的离散化系统模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_v v(k) + B_d d(k) + B_f f(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n, y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 分别为 kh 时刻的状态向量和测量输出, $v(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ 为控制输入序列, $d(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$ 为范数有界的未知输入, $f(k) \in \mathbb{R}^{n_f}$ 为故障信号, A, B_v, B_d, B_f 和 C 为已知的适当维数矩阵. 以 $y_l \in \mathbb{R}^{q_l \times 1}$ 表示输出向量中采样周期为 $T_l h$ 的分量, 即

$$\Psi_l(k) = y_l(kT_l h), l = 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots$$

其中: T_l 为正整数, $\sum_{l=1}^N q_l = n_y$, $\Psi_l(k)$ 表示以 $T_l h$ 为采样周期的采样输出序列. 定义 T_M 为 T_l ($l = 1, \dots, N$) 的最小公倍数, 并令 $n_l = \frac{T_M}{T_l}$, $Q = \sum_{l=1}^N n_l q_l$. 类似于文献[9~11], 应用MSD系统研究中的提升技术, 可得如下提升模型:

$$\begin{cases} x(k_s + 1) = \\ \quad \underline{A}x(k_s) + \underline{B}_v \underline{v}(k_s) + \underline{B}_d \underline{d}(k_s) + \underline{B}_f \underline{f}(k_s), \\ \underline{\Psi}(k_s) = \\ \quad \underline{C}x(k_s) + \underline{D}_v \underline{v}(k_s) + \underline{D}_d \underline{d}(k_s) + \underline{D}_f \underline{f}(k_s). \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} x(k_s) &= x(k_s T_M h), \\ \underline{\Psi}(k_s) &= [\underline{\Psi}_1^T(k_s) \cdots \underline{\Psi}_N^T(k_s)]^T, \\ \underline{\Psi}_l(k_s) &= [\Psi_l^T(n_l k_s) \cdots \Psi_l^T(n_l k_s + n_l - 1)]^T, \\ \underline{\xi}(k_s) &= [\xi^T(k_s T_M) \cdots \xi^T((k_s + 1)T_M - 1)]^T, \\ \underline{A} &= A^{T_M}, \underline{B}_\xi = [A^{T_M-1} B_\xi \cdots A B_\xi B_\xi], \\ A_l &= A^{T_l}, \underline{C} = [\underline{C}_1^T \cdots \underline{C}_N^T]^T, l = 1, \dots, N, \\ \underline{C}_l &= [C_l^T \cdots (C_l A_l^{n_l-1})^T]^T, \\ B_{\xi l} &= [A^{T_l-1} B_\xi \cdots A B_\xi B_\xi], \\ \underline{D}_\xi &= [\underline{D}_{\xi 1}^T \cdots \underline{D}_{\xi N}^T]^T, \\ \underline{D}_{\xi l} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_l B_{\xi l} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ C_l A_l^{n_l-2} B_{\xi l} \cdots C_l B_{\xi l} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中 ξ 可分别代表 v, d 和 f . 给定等价空间阶数 $s > 0$, 由式(1)可得如下等价方程:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_s(k_s) &= \underline{H}_{0,s} x(k_s - s) + \underline{H}_{dv,s} \underline{v}_s(k_s) + \\ &\quad \underline{H}_{dd,s} \underline{d}_s(k_s) + \underline{H}_{df,s} \underline{f}_s(k_s). \end{aligned} \quad (2)$$

其中:

$$\underline{\Psi}_s(k_s) = [\underline{\Psi}^T(k_s - s) \cdots \underline{\Psi}^T(k_s)]^T,$$

$$\underline{\xi}_s(k_s) = [\xi^T(k_s - s) \cdots \xi^T(k_s)]^T,$$

$$\underline{H}_{0,s} = [\underline{C}^T (\underline{C} \underline{A})^T \cdots (\underline{C} \underline{A}^s)^T]^T,$$

$$\underline{H}_{d\xi,s} = \begin{bmatrix} \underline{D}_\xi & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \underline{C} \underline{B}_\xi & \underline{D}_\xi & 0 & \ddots & \vdots \\ \underline{C} \underline{A} \underline{B}_\xi & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \underline{C} \underline{A}^{s-1} \underline{B}_\xi \underline{C} \underline{A}^{s-2} \underline{B}_\xi \cdots \underline{C} \underline{B}_\xi \underline{D}_\xi \end{bmatrix}.$$

本文考虑如下基于等价空间的残差产生器:

$$\underline{r}(k_s) = V_s (\underline{\Psi}_s(k_s) - \underline{H}_{dv,s} \underline{v}_s(k_s)). \quad (3)$$

其中:

$$\underline{r}(k_s) = [\underline{r}_1^T(k_s) \cdots \underline{r}_N^T(k_s)]^T,$$

$$\underline{r}_i^T(k_s) = [r_i(k_s n_i) \cdots r_i(k_s n_i + n_i - 1)],$$

$$r_i(k_i) := r_i(k_i T_i h),$$

$$i = 1, 2, \dots, N, k_i = 1, 2, \dots,$$

$V_s \in \mathbb{R}^{Q \times Q(s+1)}$ 为待设计的等价矩阵. 选择等价矩阵 V_s 满足 $V_s \underline{H}_{0,s} = 0$, 由式(2)(3)可得

$$\underline{r}(k_s) = V_s (\underline{H}_{dd,s} \underline{d}_s(k_s) + \underline{H}_{df,s} \underline{f}_s(k_s)).$$

分别应用矩阵 $V_s \underline{H}_{dd,s}$ 和 $V_s \underline{H}_{df,s}$ 的2-范数表示残差对未知输入的鲁棒性和对故障的灵敏度, 从而可将残差产生器的设计问题归结为如下最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{V_s \in \mathbb{R}^{Q \times Q(s+1)}} & \frac{\|V_s \underline{H}_{dd,s}\|_2}{\|V_s \underline{H}_{df,s}\|_2}, \\ \text{s.t. } & V_s \underline{H}_{0,s} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

注意到, 产生的残差信号 $\underline{r}(k_s)$ 更新周期为 $T_M h$, 即残差产生器(3)为慢速残差产生器. 考虑到本文的主要目的是研究MSD系统的快速残差产生问题, 因此将要解决的主要问题包括: i) 通过求解最小化问题(4)设计残差产生器(3); ii) 实现残差产生的快速化.

3 主要结论(Main results)

3.1 残差产生器设计(Residual generator)

令 $N_b \in \mathbb{R}^{\alpha \times Q(s+1)}$ 为 $\underline{H}_{0,s}$ 左零空间的基矩阵, 则满足式(4)中约束条件 $V_s \underline{H}_{0,s} = 0$ 的最优矩阵 V_s 可进一步表示为 $V_s = P N_b$, 其中 $P \in \mathbb{R}^{Q \times \alpha}$, 从而可将最小化问题(4)等价于

$$\min_{P \in \mathbb{R}^{Q \times \alpha}} \frac{\|P N_b \underline{H}_{dd,s}\|_2}{\|P N_b \underline{H}_{df,s}\|_2}. \quad (5)$$

在 $N_b \underline{H}_{dd,s}$ 为行满秩, 即 $\text{rank}(N_b \underline{H}_{dd,s}) = \alpha$ 的假设条件下, 可得如下结论.

定理 1 设 $N_b \underline{H}_{dd,s}$ 行满秩, 且具有如下形式的奇异值分解:

$$N_b \underline{H}_{dd,s} = U_d \Sigma_d V_d^T. \quad (6)$$

其中: $U_d \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$, $V_d \in \mathbb{R}^{(s+1)n_d T_M \times (s+1)n_d T_M}$ 为正交矩阵, $\Sigma_d = [S \ 0_{\alpha \times ((s+1)n_d T_M - \alpha)}]$, $S = \text{diag}\{\sigma_{d1}, \sigma_{d2}, \dots, \sigma_{d\alpha}\}$, $\sigma_{d1} \geq \sigma_{d2} \geq \dots \geq \sigma_{d\alpha} > 0$, $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵. 若 $S^{-1}U_d^T N_b \underline{H}_{df,s}$ 的奇异值分解为

$$S^{-1}U_d^T N_b \underline{H}_{df,s} = U_{df} \Sigma_{df} V_{df}^T. \quad (7)$$

其中: $U_{df} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$, $V_{df} \in \mathbb{R}^{(s+1)n_f T_M \times (s+1)n_f T_M}$ 为正交矩阵, $\Sigma_{df} = [\text{diag}\{\sigma_{df1}, \sigma_{df2}, \dots, \sigma_{df\alpha}\} \ 0]$, $\sigma_{df1} \geq \sigma_{df2} \geq \dots \geq \sigma_{df\alpha} \geq 0$, $\sigma_{df1} > 0$, 则对任意具有如下奇异值分解的矩阵 $P_s^* \in \mathbb{R}^{Q \times \alpha}$:

$$P_s^* = U_p \Sigma_p U_{df}^T, \quad (8)$$

$P = P_s^* S^{-1} U_d^T$ 为最小化问题(5)的解, 且

$$\min_{P \in \mathbb{R}^{Q \times \alpha}} \frac{\|PN_b \underline{H}_{dd,s}\|_2}{\|PN_b \underline{H}_{df,s}\|_2} = \frac{1}{\sigma_{df1}}. \quad (9)$$

其中: $U_p \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ 为正交矩阵,

$$\Sigma_p = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_{p1}, \sigma_{p2}, \dots, \sigma_{pp'}\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_{p1} \geq \sigma_{p2} \geq \dots \geq \sigma_{pp'} > 0, p' = \min\{\alpha, Q\}.$$

注 1 定理1是文献[4]中对一般线性时不变系统基于等价空间的残差产生器设计方法的应用推广, 因版面所限, 证明略.

注意到最小化问题(5)的解并不唯一, 对任意正交矩阵 $U_p \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$, $V_s = U_p \Sigma_p U_{df}^T S^{-1} U_d^T N_b$ 都是最小化问题(4)的解. 因此, 可通过选择适当的 V_s 使满足(3)为因果系统, 从而应用逆提升技术, 得到与测量输出采样同步的快速残差信号.

3.2 快速残差信号的实现(Fast rate implementation)

令 Ξ 表示所有满足如下条件的 (i, j) 的组合,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n_1 q_1, \\ \sum_{k=1}^{m_j-1} n_k q_k + 1 \leq j \leq \sum_{k=1}^{m_j} n_k q_k, \\ (i-1)T_1 < (j - \sum_{k=1}^{m_j-1} n_k q_k - 1)T_{m_j}. \end{array} \right. \\ \text{或} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq j \leq n_1 q_1, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m_i-1} n_k q_k \leq i \leq \sum_{k=1}^{m_i} n_k q_k, \\ (i - \sum_{k=1}^{m_i-1} n_k q_k - 1)T_{m_i} < (j-1)T_1. \end{array} \right. \\ \text{或} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \sum_{k=1}^{m_i-1} n_k q_k \leq i \leq \sum_{k=1}^{m_i} n_k q_k, \\ \sum_{k=1}^{m_j-1} n_k q_k + 1 \leq j \leq \sum_{k=1}^{m_j} n_k q_k, \\ (i - \sum_{k=1}^{m_i-1} n_k q_k - 1)T_{m_i} < \\ (j - \sum_{k=1}^{m_j-1} n_k q_k - 1)T_{m_j}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (10)$$

$$m_i, m_j = 2, 3, \dots, N.$$

由定理1知, 等价矩阵 V_s 可表示为 $V_s = U_p V_s^*$, 其中, $V_s^* = \Sigma_p U_{df}^T S^{-1} U_d^T N_b$, $U_p \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ 为任意正交矩阵. 将 V_s^* 重新表示为 $V_s^* = [V_{s0} \ V_{s1} \ \dots \ V_{ss}]$, 其中 $V_{si} \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ ($i = 0, 1, \dots, s$). 令 $\Gamma_s = U_p V_{ss}$, 从 $\underline{H}_{v,s}$ 和 $\underline{D}_l$ 的结构可以看出, 只要 $\Gamma_s(i, j) = 0$ 对满足条件(10)的任意 (i, j) 都成立, 则残差 $r(k_s)$ 的各分量不依赖 $\underline{V}_s(k_s)$ 和 $\underline{v}_s(k_s)$ 中将来时刻的值, 即残差产生系统(3)满足因果关系. 因此, 可实现快速残差产生的条件为

$$\Gamma_s(i, j) = 0, \forall (i, j) \in \Xi. \quad (11)$$

记

$$U_p = \begin{bmatrix} u_1^T & \dots & u_{n_1 q_1}^T & \dots & u_{1+\sum_{i=1}^{N-1} n_i q_i}^T & \dots & u_Q^T \end{bmatrix}^T,$$

$$V_{ss} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{n_1 q_1} & \dots & \gamma_{1+\sum_{i=1}^{N-1} n_i q_i} & \dots & \gamma_Q \end{bmatrix},$$

则 $u_i \gamma_j = 0, \forall (i, j) \in \Xi$. 另外, $u_i u_k^T = 0$ ($i \neq k$), $u_i u_i^T = 1$. 从而可根据上述分析确定正交矩阵 U_p , 并得满足条件(11)的等价矩阵 $V_s = U_p \Sigma_p U_{df}^T S^{-1} U_d^T N_b$.

注 2 只要 V_{ss} 为方阵, 则满足条件(11)的正交矩阵 U_p 一定存在, 关于 U_p 的存在性证明与文献[11]中的定理5类似, 此处略.

4 算例(A numerical example)

假设MSD系统的离散化模型参数矩阵为

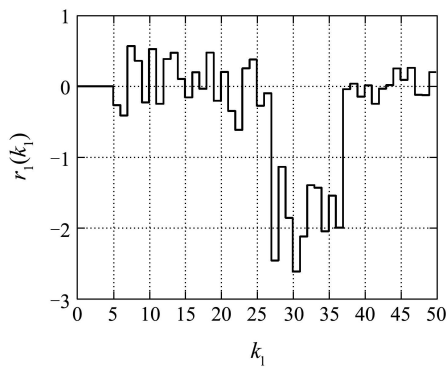
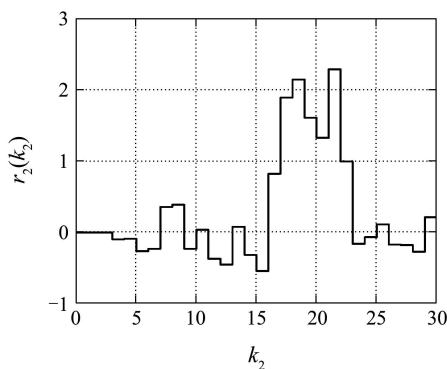
$$A = \begin{bmatrix} 0.61 & 1.19 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.42 \\ 0.32 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.32 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.32 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

取采样周期 $h = 1$ s, $T_1 = 3$, $T_2 = 5$, $s = 1$, $\sigma_{pi} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 8$), 从而可求得等价矩阵 V_s (因版面所限不再列出). 在 $k = 0, 1, \dots, 150$ 时, 假设控制输入为单位阶跃信号, 未知输入为能量为0.1的白噪声信号. 在 $k = 75, 76, \dots, 105$ 时, 幅值为1的常数故障发生. 图1和图2分别为以 $3h$ 为步长的残差信号 $r_1(k_1)$ 和以 $5h$ 为步长的残差信号 $r_2(k_2)$. 由仿真结果知, 实现了残差产生与测量输出同步的快速化.

5 结论(Conclusion)

对一类MSD系统给出了一种新的基于等价空间的快速残差产生方法. 应用MSD系统研究中的提升技术, 建立了该MSD系统的线性时不变提升模型, 将基于等价空间的残差产生器设计问题归结为最小化问题, 进一步利用其设计自由度求得满足因果关系的最优残差产生器, 从而通过逆提升运算得到了与测量输出同步的快速残差信号.

图1 残差信号 $r_1(k_1)$ Fig. 1 Residual signal $r_1(k_1)$ 图2 残差信号 $r_2(k_2)$ Fig. 2 Residual signal $r_2(k_2)$

参考文献(References):

- [1] CHEN J, PATTON R J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] 周东华, 叶银忠. 现代故障诊断与容错控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
(ZHOU Donghua, YE Yinzong. *Modern Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000.)
- [3] FRANK P M, DING Steven X, KOPPEN-SELIGER B. Current developments in the theory of FDI[C]//*Proceedings of the 4th IFAC SAFEPROCESS'2000*. Budapest, Hungary: Elsevier Press, 2000, 6: 16 – 27.
- [4] DING S X, DING E L, JEINSCH T. An approach to analysis and design of observer and parity relation based FDI systems[C]//*Proceedings of the IFAC World Congress*. Beijing: Tsinghua University Press, 1999, 6: 37 – 42.
- [5] ZHANG P, DING S X, WANG G Z, et al. An FDI approach for sampled-data systems[C]//*Proceedings of the American Control conference*. Arlington, USA: IEEE Press, 2001, 6: 2702 – 2707.
- [6] ZHANG P, DING S X, WANG G Z, et al. A frequency domain approach to fault detection in sampled-data system[J]. *Automatica*, 2003, 39(7): 1303 – 1307.
- [7] FADALI M S. Observer-based robust fault detection of multirate linear system using a lift reformulation[J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2003, 29(1): 235 – 243.
- [8] ZHANG P, DING S X, WANG G Z, et al. Fault detection for multi-rate sampled-data systems with time delays[J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(18): 1457 – 1471.
- [9] ZHONG M Y, MA C F, LIU Y X. Fast rate fault detection filter for multirate sampled-data systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(3): 433 – 437.
- [10] ZHONG M Y, YE H, DING S X, et al. Fast rate fault detection for multirate sampled-data systems with time-delays[C]//*Proceedings of the 6th IFAC SAFEPROCESS'2006*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006, 8: 577 – 582.
- [11] ZHONG M Y, YE H, DING S X, et al. Observer-based fast rate fault detection for a class of multirate sampled-data systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(3): 520 – 525.
- [12] IZADI I, ZHAO Q, CHEN T W. An optimal scheme for fast rate fault detection based on multirate sampled data[J]. *Journal of Process Control*, 2005, 15(3): 307 – 319.

作者简介:

刘云霞 (1979—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为网络控制系统、故障诊断与容错控制, E-mail: yunxialiu@126.com;

钟麦英 (1965—), 女, 教授, 主要研究方向为鲁棒控制、故障诊断与容错控制等, E-mail: myzhong@sdu.edu.cn.