第 25 卷第 6 期
2008 年 12 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 25 No. 6
Dec. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)06−1135−04

基于动态规划的约束优化问题多参数规划求解方法及应用

张　聚, 王万良

(浙江工业大学 信息工程学院 自动化研究所, 浙江 杭州 310014)

摘要: 结合动态规划和单步多参数二次规划, 提出一种新的约束优化控制问题多参数规划求解方法. 一方面能得到约束线性二次优化控制问题最优控制序列与状态之间的显式函数关系, 减少多参数规划问题求解的工作量; 另一方面能够同时求解得到状态反馈最优控制律. 应用本文提出的多参数二次规划求解方法, 建立无限时间约束优化问题状态反馈显式最优控制律. 针对电梯机械系统振动控制模型做了数值仿真计算.

关键词: 约束最优控制; 多参数二次规划; 动态规划; 分段线性状态反馈控制

中图分类号: TP273.1　　　**文献标识码**: A

Dynamic-programming-based multi-parametric programming method for constrained optimal control problem and its applications

ZHANG Ju, WANG Wan-liang

(Institute of Automation, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310014, China)

Abstract: By combining the dynamic programming techniques with one-step multi-parametric programming (control horizon 1), a new multi-parametric programming method for linear constrained quadratic optimal control problems is proposed. With this new method, the explicit solution of the optimization problem can be calculated with less computation burden, and the state feedback optimal control laws are obtained simultaneously. Applying the proposed multi-parametric programming method, an explicit algorithm for obtaining the state feedback optimal control law for the constrained linear infinite-time optimal control problem is established. At the end of the paper, simulations of a vibration control for the mechanical system of an elevator are performed.

Key words: constrained linear optimal control; multi-parameter quadratic programming; dynamic programming; piecewise linear state feedback optimal control

1　引言(Introduction)

多参数规划理论研究, 当优化问题所含的多个参数在一定的范围内变化时, 优化问题的解以怎样的规律变化. 多参数规划方法系统地分割参数区域, 在每个参数子区域内建立优化问题的解与参数之间的显式函数关系. 之后, 一旦确定了参数的值和所处的子区域, 无需重新求解优化问题即可得到问题的解[1,2]. 文献[3]把多参数二次规划理论应用于约束线性二次优化控制问题, 并给出了一种求解多参数二次规划问题的方法.

在文献[3]的基础上, 文献[4∼6]从离线、在线计算、状态空间的凸划分、快速确定当前状态所处的分区和计算当前时刻的控制量方面, 提出更为高效的求解多参数二次规划问题的算法. 文献[7,8]通过求解优化问题的次优解, 进一步简化了多参数规划算法的复杂度和减少了状态分区的数目. 现有文献[3∼8]中求解多参数二次规划问题的不同算法主要体现在, 对于多参数二次规划问题的整个可行区域的分区策略和搜索的方法不同. 文献中多参数规划问题求解方法的一个共同点是, 当优化控制问题的控制时域长度N较大时, 求解对应的多参数二次规划问题的计算工作量大, 计算复杂. 多参数二次规划问题的计算复杂度与N成指数关系.

本文结合动态规划和控制时域长度为1的单步多参数二次规划, 提出约束优化控制问题一种新的多参数规划求解方法, 减少多参数规划问题求解的工作量. 应用本文方法, 建立无限时间约束系统开环状态反馈最优控制律的显式求解算法.

收稿日期: 2007−05−20; 收修改稿日期: 2007−12−28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60604014).

2 约束线性最优控制问题多参数规划求解(Multi-parametric programming for constrained optimal control problem)

考虑约束线性有限时间最优控制问题:

$$\begin{cases} J^*(x(0)) = \min\limits_{U_N} J(U_N, x(0)), \\ \text{s.t. } Ex_k + Lu_k \leqslant M, k = 0, \cdots, N-1, \\ \qquad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, k \geqslant 0, \\ \qquad x_N \in \chi_f, \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中:

$$J(U_N, x(0)) = \|Px_N\|_2 + \sum_{k=0}^{N-1} (\|Qx_k\|_2 + \|Ru_k\|_2),$$

$x_N \in \chi_f$为终点状态约束, $\chi_f = \{x \in \mathbb{R}^n | H_f x \leqslant K_f\}$. U_N为决策向量, $U_N = [u_0', \cdots, u_{N-1}']' \in \mathbb{R}^s$. $Q = Q' \geqslant 0, R = R' > 0, P \geqslant 0$. 定义$\chi \subseteq \mathbb{R}^n$为满足(1)中约束条件的$x(0)$集合.

优化问题(1)的最优决策向量$U_N^*(x(0))$取决于$x(0)$. 文献[3]把状态$x(0)$看作优化问题(1)的参数向量, 给出一种多参数二次规划问题的求解方法, 建立$U_N^*(x(0))$与$x(0)$间的显式函数关系.

结论 1[3] 考虑约束线性最优控制问题(1), 则:

可行域χ为多面体域, $\chi = \{x \in \mathbb{R}^n | Hx \leqslant K\}$;

$U_N^*(x(0))$是$x(0)$的分段线性函数:

$U_N^*(x(0)) = F^i x(0) + G^i, x(0) \in CR^i$;

$J_z^*(x(0))$是$x(0)$的分段二次连续函数:

$J^*(x(0)) = x'(0)Q^i x(0) + L^i x(0) + C^i$, $x(0) \in CR^i$;

CR^i为多面体集, CR^i是χ的凸划分, 即

$\bigcup\limits_i CR^i = \chi$, $CR^i \bigcap CR^j = \varnothing (i \neq j)(i = 1, \cdots, N^r)$.

3 基于动态规划的多参数规划求解方法(Dynamic programming based multi-parametric programming method)

优化问题(1)当控制时域N较大时, 直接求解对应的多参数二次规划问题较为复杂. 基于动态规划, 本节通过求解多个单步多参数二次规划问题来简化原问题的求解, 而求解得到的结果与直接求解N步多参数二次规划问题的结果是一致的.

动态规划求解的第1步, 即$j = N-1$.

$$\begin{cases} J^*(x_{N-1}) = \\ \min\limits_{u_{N-1}} (\|Qx_{N-1}\|_2 + \|Ru_{N-1}\|_2) + \|Px_N\|_2, \\ \text{s.t. } Ex_{N-1} + Lu_{N-1} \leqslant M, \\ \qquad x_N = Ax_{N-1} + Bu_{N-1}, \\ \qquad x_N \in \chi_N = \chi_f, \end{cases} \tag{2}$$

问题(2)按文献[3]思路可转化为单步多参数二次规划问题(参数为x_{N-1}). 由结论1可得到: χ_{N-1}为凸多面体域.

u_{N-1}为参数x_{N-1}的分段线性状态反馈控制律:

$$u_{N-1} = f_{N-1}^i x_{N-1} + g_{N-1}^i, x_{N-1} \in CR_{N-1}^i. \tag{3}$$

$J^*(x_{N-1})$是x_{N-1}的分段二次函数:

$$\begin{cases} J^*(x_{N-1}) = \\ x_{N-1}' Q_{N-1}^i x_{N-1} + L_{N-1}^i x_{N-1} + C_{N-1}^i, \\ x_{N-1} \in CR_{N-1}^i. \end{cases} \tag{4}$$

CR_{N-1}^i为凸多面体集,

$CR_{N-1}^i \bigcap CR_{N-1}^j = \varnothing (i \neq j)$,

$\bigcup\limits_i CR_{N-1}^i = \chi_{N-1}$,

$CR_{N-1}^i = \{x_{N-1} \in \mathbb{R}^n | H_{N-1}^i x_{N-1} \leqslant K_{N-1}^i\}$,

$i = 1, \cdots, N_{N-1}^r$.

N_{N-1}^r为χ_{N-1}上的状态分区数目.

动态规划求解的第2步, 即$j = N-2$.

$$\begin{cases} J^*(x_{N-2}) = \min\limits_{u_{N-2}} (\|Qx_{N-2}\|_2 + \\ \qquad \|Ru_{N-2}\|_2 + J^*(x_{N-1})), \\ \text{s.t. } Ex_{N-2} + Lu_{N-2} \leqslant M, \\ \qquad x_{N-1} = Ax_{N-2} + Bu_{N-2}, \\ \qquad x_{N-1} \in \chi_{N-1}, \end{cases} \tag{5}$$

终点状态的凸约束区域为$\chi_{N-1} = \bigcup\limits_i CR_{N-1}^i$, χ_{N-1}已由动态规划的上一步得到. 由动态规划的上一步已经得到$J^*(x_{N-1})$是x_{N-1}的分段二次函数, 因此优化问题(5)可以转化为N_{N-1}^r个不同的单步多参数二次规划问题(参数为x_{N-2}). 其中的第i个($i = 1, \cdots, N_{N-1}^r$)单步多参数二次规划问题为

$$\begin{cases} J^*(x_{N-2}) = \\ \min\limits_{u_{N-2}} (\|Qx_{N-2}\|_2 + \|Ru_{N-2}\|_2 + \\ x_{N-1}' Q_{N-1}^i x_{N-1} + L_{N-1}^i x_{N-1} + C_{N-1}^i), \\ \text{s.t. } Ex_{N-2} + Lu_{N-2} \leqslant M, \\ \qquad x_{N-1} = Ax_{N-2} + Bu_{N-2}, \\ \qquad x_{N-1} \in CR_{N-1}^i, \end{cases} \tag{6}$$

$x_{N-1} \in CR_{N-1}^i$为第i个单步多参数二次规划问题的终点约束, CR_{N-1}^i已由动态规划的上一步得到.

问题(6)(其参数为x_{N-2})可通过类似文献[3]中的替换, 化为标准多参数二次规划问题. 多参数二次规

划问题(6)的解为

$$u_{N-2}=f_{N-2}^{i,m}x_{N-2}+g_{N-2}^{i,m}, x_{N-2}\in CR_{N-2}^{i,m}$$
$$J^*(x_{N-2})=x_{N-2}^{'}Q_{N-2}^{i,m}x_{N-2}+L_{N-2}^{i,m}x_{N-2}+C_{N-2}^{i,m},$$

$CR_{N-2}^{i,m}$为凸多面体集, $\bigcup\limits_{m}CR_{N-2}^{i,m}=\chi_{N-2}^{i}$, $\bigcup\limits_{i}\bigcup\limits_{m}CR_{N-2}^{i,m}=\bigcup\limits_{i}\chi_{N-2}^{i}=\chi_{N-2}$, χ_{N-2}为凸多面体.

$$CR_{N-2}^{i,p}\bigcap CR_{N-2}^{i,q}=\varnothing,(p\neq q),$$
$$(i=1,\cdots,N_{N-1}^{r};\ m=1,\cdots,N_{N-2}^{i})$$

$CR_{N-2}^{i,m}(m=1,\cdots,N_{N-2}^{i})$是求解第$i$个单步多参数二次规划问题得到的状态分区.

求解N_{N-1}^{r}个单步多参数二次规划问题得到的状态分区能够全部覆盖χ_{N-2}. 但i个单步多参数二次规划问题可行的所有状态集合χ_{N-2}^{i}, 与第j个单步多参数二次规划问题的χ_{N-2}^{j}不同, 即$\chi_{N-2}^{i}\neq\chi_{N-2}^{j}$, 分区的数目也可能不同, 即$N_{N-2}^{i}\neq N_{N-2}^{j}$, 通常$\chi_{N-2}^{i}\bigcap\chi_{N-2}^{j}\neq\varnothing$. 令$\chi_{N-2}^{i}\bigcap\chi_{N-2}^{j}=R_{ij}$ $(i\neq j)$, R_{ij}可能包含$CR_{N-2}^{i,m}$和$CR_{N-2}^{j,l}(l=1,\cdots,N_{N-2}^{j})$中的多个凸多面体集. 因而在$R_{ij}$中, 1个凸多面体集可能对应多个$J^*(x_{N-2})$值, 根据$J^*(x_{N-2})$的大小来确定该多面体集对应的控制信号$u_{N-2}$和$J^*(x_{N-2})$, 分割或合并凸多面体集, 并确定对应的控制信号和目标函数值. 根据极大值原理, 动态规划方法求解得到的解(多个单步多参数二次规划方法)与单个多步多参数规划方法得到的解是一致, 根据结论1, 凸多面体集$CR_{N-2}^{i,m}(i=1,\cdots,N_{N-1}^{r};m=1,\cdots,N_{N-2}^{i})$经比较、分割和合并, 得到$(N-2)$时刻优化问题(5)的解为

$$u_{N-2}=f_{N-2}^{i}x_{N-2}+g_{N-2}^{i}, x_{N-2}\in CR_{N-2}^{i},\tag{7}$$
$$J^*(x_{N-2})=x_{N-2}^{'}Q_{N-2}^{i}x_{N-2}+L_{N-2}^{i}x_{N-2}+C_{N-2}^{i}.\tag{8}$$

CR_{N-2}^{i}为凸多面体集, $\bigcup\limits_{i}CR_{N-2}^{i}=\chi_{N-2}$ $CR_{N-2}^{i}\bigcap CR_{N-2}^{j}=\varnothing,(i\neq j),i=1,\cdots,N_{N-2}^{r}$. $CR_{N-2}^{i}=\{x_{N-2}\in\mathbb{R}^n|H_{N-2}^{i}x_{N-2}\leqslant K_{N-2}^{i}$, N_{N-2}^{r}为χ_{N-2}上的状态分区数目.

动态规划解的第3步直至第N步, 按第2步求解的思路和步骤进行, 得到各个时刻的控制律与对应时刻状态之间的分段线性状态反馈显式关系.

4　无限时间约束优化问题状态反馈显式解(State feedback solution for infinite-time constrained optimal control problem)

应用上节提出的多参数规划问题求解方法, 建立无限时间约束优化问题的状态反馈最优控制律.

考虑无限时间约束线性优化控制问题(9)和对应的有限时间约束控制问题(10):

$$\begin{cases}J_{\infty}^*(x(0))=\min\limits_{U}\{\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\|Qx_k\|_2+\|Ru_k\|_2)\},\\ \text{s.t. } Ex_k+Lu_k\leqslant M,\ k=0,1,\cdots,\\ \qquad x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\end{cases}\tag{9}$$

$U=[u_0',u_1',\cdots,u_N',\cdots]'$为无限时间最优控制律.

$$\begin{cases}J_N^*(x(0))=\\ \min\limits_{U_N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(\|Qx_k\|_2+\|Ru_k\|_2)+\|P_{\infty}x_N\|_2,\\ \text{s.t. } Ex_k+Lu_k\leqslant M,k=0,\cdots,N-1,\\ \qquad x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\\ \qquad x_N\in\chi_I,\end{cases}\tag{10}$$

如果优化问题(10)的终点状态满足$x_N\in\chi_I$, 则无限时间优化问题(9)的解等价于问题(10)的解[9], 即$U_{\infty}^*(x(0))=[U_N^*(x(0)),Kx_N,Kx_{N+1},\cdots]$, $J_{\infty}^*(x(0))=J_N^*(x(0))$. 终点状态约束区域$\chi_I$为优化问题(9)的输出不变集. 即

$$\chi_I=\begin{Bmatrix}x(0)\in\mathbb{R}^n|Ex_k+Lu_k\leqslant M,u_k=Kx_k,\\ x_{k+1}=(A+BK)x_k,k\geqslant 0,\end{Bmatrix}$$

K为与优化问题(9)对应的无约束无限时间优化控制问题的状态反馈阵.

求解多参数二次规划问题(10)而得到的最优控制序列$U_N=[u_0',\cdots,u_{N-1}']'$, 由结论1知$u_0^*(x(0))$是$x(0)$的状态反馈分段线性函数, 而$U_N$中的第$j$个控制量$u_j^*(j=1,\cdots,N-1)$, 并不是状态$x(j)$的反馈线性函数. 由上节基于动态规划的多参数规划方法求解过程可以看到, 把控制时域长度为N的多参数二次规划问题转化为求解N个控制时域长度为1(单步)多参数二次规划问题的同时, 能求解得到各个时刻的显式分段线性状态反馈最优控制律$u_j^*(x(j))=f_j(x(j))(j=0,\cdots,N-1)$. 应用本文方法求解优化问题的状态反馈最优控制律, 可得到

1) 约束线性优化问题(10)的状态反馈最优控制律$u_j^*(x(j))(j=0,\cdots,N-1)$为

$$u_j^*(x(j))=f_j^i(x(j))+g_j^i,x(j)\in CR_j^i,$$
$$i=1,\cdots,N_j^r.$$

CR_j^i为多面体集,

$$CR_j^i=\{x\in\mathbb{R}^n|H_j^ix\leqslant K_j^i\},$$
$$\bigcup_i CR_j^i=\chi_j,CR_j^i\bigcap CR_j^m=\varnothing,i\neq m.$$

2) 本节虽然求解有限时域优化问题, 但该有限时域优化问题(含终点状态的约束条件)与相应的无

限时间约束优化问题是等价的[9]. 通过求解有限时域约束优化问题, 可直接得到无限时间约束优化问题的控制律, 因此能够保证无限时间约束最优控制问题的全局性和最优性.

3) 约束线性优化控制问题的状态反馈最优控制律为时变的分段线性状态反馈控制律.

5 数值仿真例子(Numerical example)

本节对于约束线性机械振动系统[10], 应用本文的方法做仿真计算. 简化的动力学模型为

$$A=\begin{bmatrix}-0.4084 & -75.16\\ 0.007516 & 0.2581\end{bmatrix},$$
$$B=[0.007516\quad 0.0001258]^{\mathrm{T}},$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 10^4\end{bmatrix}, D=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

为了保证舒适性, 对于电梯振动的位移、速度和加速度必须加以限制. 相应的约束条件为

$$-1\leqslant x_1(k)\leqslant 1, k=1,2,\cdots,$$
$$-10^{-3}\leqslant x_2(k)\leqslant 10^{-3}, k=1,2,\cdots,$$
$$-10\leqslant u(k)\leqslant 10, k=0,1,\cdots.$$

考虑与无限时间约束优化控制问题对应的有限时域问题. 对于控制时域长度$N=2$, 求得状态范围、状态的分区$\chi=\bigcup\limits_i CR_i$和分区上对应的控制律. 图1中最中间的分区为$\chi_I$. 围绕$\chi_I$的分区为$\chi=\bigcup\limits_i CR_i$, 最外面的边框为不考虑终点约束$x_N\in\chi_I$时的状态范围和分区.

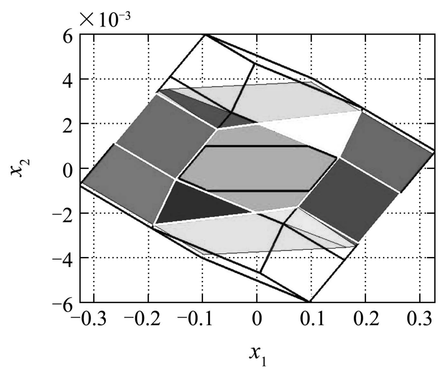

图 1 优化问题的状态范围及分区

Fig. 1 States' region and partitions for optimal control problem

6 结语(Conclusion)

结合动态规划和单步多参数二次规划, 提出一种新的约束最优控制问题多参数规划求解方法. 应用提出的方法, 建立无限时间约束优化问题状态反馈最优控制律的显式求解算法.

参考文献(References):

[1] DUA V, PISTIKOPOULOS E N. An algorithm for the solution of multi-parametric mixed integer linear programming problems[J]. *Annals of Operations Research*, 2000, 99(1): 123 – 139.

[2] DUA V, BOZINIS N A, PISTIKOPOULOS E N. A multi-parametric programming approach for mixed-integer quadratic engineering problems[J]. *Computer and Chemical Engineering*, 2002, 26(4): 715 – 733.

[3] BEMPORAD A, MORARI M, DUA V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 3 – 20.

[4] TONDEL P, JOHANSEN T A, BEMPORAD A. An algorithm for multiparametric quadratic programming and explicit MPC solutions[J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 489 – 497.

[5] TONDEL P, JOHANSEN T A, BEMPORAD A. Evaluation of piecewise affine control via binary search tree[J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 945 – 950.

[6] SUARD R, LOFBERG J, GRIEDER P, et al. Efficient computation of controller partitions in multiParametric programming[C]//*Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island Bahamas: IEEE Press, 2004, 12: 14 – 17.

[7] BEMPORAD A, FILIPPI C. Suboptimal explicit MPC via approximate quadratic programming[C]//*Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA: IEEE Press, 2001, 12: 4 – 7.

[8] JOHANSEN T A, GRANCHAROVA A. Approximate explicit constrained linear model predictive control via orthogonal search tree[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 810 – 815.

[9] CHMIELEWSKI D, MANOUSIOUTHAKIS V. On constrained infinite-time linear quadratic optimal control[J]. *Systems & Control Letters*, 1996, 29(3): 121 – 130.

[10] 张聚, 朱光汉. 参数不确定电梯机械系统振动H_∞鲁棒控制[J]. 振动与冲击, 2001, 20(4): 22 – 24.
(ZHANG Ju, ZHU Guanghan. H_∞ robust vibration control of elevator's mechanical system with parameter uncertainty[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2001, 20(4): 22 – 24.)

作者简介:

张 聚 (1973—), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为模型预测控制、机电系统振动控制, E-mail: zjk@zjut.edu.cn;

王万良 (1957—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能调度与控制, E-mail: wwl@zjut.edu.cn.