第 25 卷第 6 期
2008 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 6
Dec. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)06−1145−06

# 不确定离散奇异系统的时滞依赖鲁棒$H_\infty$控制

王惠姣[1,2], 王建中[1], 葛 铭[1], 薛安克[1], 鲁仁全[1]

(1. 杭州电子科技大学 信息与控制研究所, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江理工大学 自动化研究所, 浙江 杭州 310018)

**摘要**: 针对一类具时变时滞的范数有界不确定离散奇异系统, 本文研究其鲁棒$H_\infty$控制问题. 通过建立基于二次型的有限和不等式, 避免了模型变换和界定交叉项, 得出一个新的时滞依赖有界实引理, 并表示为严格线性矩阵不等式, 同时给出了状态反馈控制器设计算法, 保证对应的闭环系统对所有容许的不确定性是正则, 因果, 稳定且具给定的干扰衰减度. 最后, 数值例子证明了本文所给方法的有效性.

**关键词**: 离散奇异系统; 时滞依赖; 时变时滞; 有限和不等式; 不确定; 线性矩阵不等式(LMI)

**中图分类号**: TP273　　　**文献标识码**: A

# Delay-dependent robust H-infinity control for uncertain discrete singular systems

WANG Hui-jiao[1,2], WANG Jian-zhong[1], GE Ming[1], XUE An-ke[1], LU Ren-quan[1]

(1. Institute of Information & Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China;
2. Institute of Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

**Abstract:** The delay-dependent robust H-infinity control for uncertain discrete singular systems with time-varying delay is addressed. The uncertainty is assumed to be norm bounded. By establishing a finite sum inequality based on quadratic terms, which avoids using both model transformation and bounding technique for cross terms, we derive a new delay-dependent bounded real lemma in terms of linear matrix inequality(LMI). A suitable robust H-infinity state feedback control law is then presented, which guarantees the resultant closed-loop system to be regular, causal and stable with given disturbance attenuation level $\gamma$ for all admissible uncertainties. A numerical example is given to demonstrate the applicability of the proposed method.

**Key words:** discrete singular system; delay-dependent; time-varying delay; finite sum inequality; uncertainty; LMI

## 1 引言(Introduction)

在实际系统中, 时滞和不确定性是不可避免的, 也是引起系统不稳定以及性能恶化的主要因素. 人们采用多种方法来减少时滞系统的保守性, 对于小时滞系统, 模型变换和界定交叉项是最常用的两种方法[1~4]. 但是在模型变换过程中已经引入了额外的保守性[5,6], 对交叉项的界定也不可避免地产生保守性. 文[7]通过建立基于二次型的有限和不等式, 避免了模型变换和交叉项的界定, 设计了时滞依赖鲁棒滤波器, 数值例子证明了该方法具有更小的保守性.

另一方面, 奇异系统是比状态空间系统更具有广泛形式的动力学系统, 它也称为描述系统、广义系统、隐式系统及半状态系统[8,9]. 它广泛产生于电力网络、电路、神经网络、受限机器人、石油催化裂化等科学技术及大型工程的众多领域. 不确定奇异系统的鲁棒$H_\infty$控制的目标是设计一个状态反馈控制律, 使得对应的闭环系统对于所有容许的不确定性是正则、无脉冲(对连续奇异系统) 或因果(对离散奇异系统)、稳定、 且具有给定的干扰衰减度. 对于离散奇异系统, 文[10,11]给出了鲁棒$H_\infty$控制问题的充分条件, 然而这些条件都是时滞独立的, 这具有很大的保守性(尤其是小时滞情形), 而且文[11]得到的有界实引理中含有半正定矩阵以及非线性不等式, 难以用标准的矩阵不等式工具箱来求解. 就目前来说, 时变时滞不确定离散奇异系统的研究成果并不多见, 尤其时滞依赖鲁棒$H_\infty$控制问题还未见研究成果.

本文研究了一类具时变时滞不确定离散奇异系统的时滞依赖鲁棒$H_\infty$控制问题, 不确定性为范数有

收稿日期: 2006−11−13; 收修改稿日期: 2007−05−09.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(60434020); 国家自然科学基金资助项目(60604003).

界的. 首次将文[7]基于二次型的有限和不等式用于离散奇异系统, 得出一个新的时滞依赖有界实引理, 并表示为严格线性矩阵不等式, 同时给出了状态反馈控制器设计算法. 最后, 数值仿真实例证明了本文设计方法的有效性.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下具时变时滞的不确定离散奇异系统:

$$\begin{cases} Ex(k+1)= \\ (A+\Delta A)x(k)+(A_{\rm d}+\Delta A_{\rm d})x(k-d(k))+ \\ (B+\Delta B)u(k)+B_\omega\omega(k), \\ z(k)=Cx(k)+Du(k), \\ x(k)=\phi(k), k=-\bar{d},-\bar{d}+1,\cdots,0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(k)\in\mathbb{R}^n$, $u(k)\in\mathbb{R}^m$, $\omega(k)\in\mathbb{R}^p$, $z(k)\in\mathbb{R}^q$分别为系统的状态, 控制输入, 干扰输入和受控输出, $\{\phi(k), k=-\bar{d},-\bar{d}+1,\cdots,0\}$为系统初始条件, $d(k)$是取值为正整数的时变时滞, 用$\underline{d},\bar{d}$分别表示其下界与上界. 即

$$0<\underline{d}\leqslant d(k)\leqslant\bar{d}<\infty,\ k=1,2,\cdots. \tag{2}$$

显然, 当$\bar{d}-\underline{d}=0$时, $d(k)$是时不变的, 即常数时滞; $E,A,A_{\rm d},B,B_\omega,C$和$D$为适当维数的已知常数矩阵, 且rank $E=r\leqslant n$, $\Delta A,\Delta A_{\rm d}$和$\Delta B$是具有适当维数的不确定时变矩阵, 假设具有如下形式:

$$\begin{bmatrix}\Delta A & \Delta A_{\rm d} & \Delta B\end{bmatrix}=MF(k)\begin{bmatrix}N_{\rm a} & N_{\rm d} & N_{\rm b}\end{bmatrix}, \tag{3}$$

这里: $M,N_{\rm a},N_{\rm d},N_{\rm b}$是具有适当维数的已知常阵, $F(k)$为满足$F^{\rm T}(k)F(k)\leqslant I$的有界不确定函数阵.

对于$u(k)=0$时非强迫标称离散奇异系统:

$$Ex(k+1)=Ax(k)+A_{\rm d}x(k-d(k)), \tag{4}$$

采用如下的定义:

**定义 1**[8,9,12]

1) 矩阵对$(E,A)$是正则的, 如果$\det(zE-A)\neq 0$;

2) 矩阵对$(E,A)$是因果的, 如果它是正则的而且deg(det$(zE-A)$)=rank $E$;

3) 如果矩阵对$(E,A)$是正则, 因果的, 则离散奇异系统(4)是正则, 因果的;

4) 离散奇异系统(4)是稳定的, 如果给定标量$\epsilon>0$, 存在标量$\delta(\epsilon)>0$使得对于任意相容初始条件$\phi(k)$满足 $\sup\limits_{-\bar{d}\leqslant k\leqslant 0}\|\phi(k)\|\leqslant\delta(\epsilon)$, 系统的轨迹$x(k)$满足$\|x(k)\|\leqslant\epsilon,\forall k\geqslant 0$, 并且$\lim\limits_{k\to\infty}x(k)=0$.

对于系统(1), 考虑如下线性状态反馈控制律:

$$u(k)=Kx(k), K\in\mathbb{R}^{m\times n}, \tag{5}$$

则相应的不确定闭环系统为

$$\begin{cases} Ex(k+1)=(A_{\rm c}+\Delta A_{\rm c})x(k)+(A_{\rm d}+ \\ \qquad \Delta A_{\rm d})x(k-d(k))+B_\omega\omega(k), \\ z(k)=C_{\rm c}x(k), \end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$A_{\rm c}=A+BK, \Delta A_{\rm c}=\Delta A+\Delta BK,$$
$$C_{\rm c}=C+DK.$$

鲁棒$\rm H_\infty$控制问题就是确定状态反馈控制律(5), 使对所有满足式(2) (3)的参数不确定闭环系统, 满足以下的设计指标:

1) 对所有允许的不确定性, 当$\omega(k)=0$时, 闭环系统(6)正则, 因果, 稳定;

2) 对零初始条件的$x(k)$及给定的正常数$\gamma>0$, 有

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\rm T}(k)z(k)-\gamma^2\omega^{\rm T}(k)\omega(k))<0.$$

**引理 1**[13] 给定适当维数矩阵$\varOmega$, $\varGamma$和$\varXi$, 其中$\varOmega$是对称的, 则: $\varOmega+\varGamma F\varXi+\varXi^{\rm T}F^{\rm T}\varGamma^{\rm T}<0$, 对所有满足$F^{\rm T}F\leqslant I$的矩阵$F$成立, 当且仅当存在一个常数$\epsilon>0$, 使得

$$\varOmega+\epsilon^{-1}\varGamma\varGamma^{\rm T}+\epsilon\varXi^{\rm T}\varXi<0.$$

## 3 主要结果(Main results)

### 3.1 时滞依赖有界实引理(Delay-dependent bounded real lemma)

针对$u(k)=0$时标称离散时变时滞奇异系统, 首先给出基于二次型项的有限和不等式, 并利用该有限和不等式, 得出一个新的时滞依赖有界实引理.

对于系统(1), 当$u(k)=0$, 对应的标称离散奇异时滞系统为

$$\begin{cases} Ex(k+1)=Ax(k)+A_{\rm d}x(k-d(k))+B_\omega\omega(k), \\ z(k)=Cx(k). \end{cases} \tag{7}$$

针对该系统(7), 引入如下两个变量:

$$\xi(k)=\begin{bmatrix}x^{\rm T}(k)\ x^{\rm T}(k-d(k))\ \omega^{\rm T}(k)\end{bmatrix}^{\rm T},$$
$$y(l)=x(l+1)-x(l),$$

则

$$\begin{aligned} Ex(k+1)&=[A\ A_{\rm d}\ B_\omega]\xi(k), \\ Ey(k)&=[A-E\ A_{\rm d}\ B_\omega]\xi(k). \end{aligned} \tag{8}$$

**引理 2**[7] 对任意实矩阵$N_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $N_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $W\in\mathbb{R}^{n\times p}$, 正定对称阵$Z\in\mathbb{R}^{n\times n}$以及取值为正整数的时变函数$d(k)$, 有

$$-\sum_{l=k-d(k)}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l)E^{\mathrm{T}}ZEy(l) \leqslant$$
$$\xi^{\mathrm{T}}(k)\{\varPi + d(k)Y^{\mathrm{T}}Z^{-1}Y\}\xi(k), \tag{9}$$

其中:

$$\varPi = \begin{bmatrix} N_1^{\mathrm{T}}E+E^{\mathrm{T}}N_1 & E^{\mathrm{T}}N_2-N_1^{\mathrm{T}}E & E^{\mathrm{T}}W \\ * & -N_2^{\mathrm{T}}E-E^{\mathrm{T}}N_2 & -E^{\mathrm{T}}W \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$
$$Y = [N_1\ \ N_2\ \ W]. \tag{10}$$

基于引理2, 下面的定理1给出了标称离散时变时滞奇异系统(7)的时滞依赖有界实引理.

**定理 1**　给定$\gamma > 0$, 如果存在具有适当维数的正定对称阵$P, Q, Z$和矩阵$S, S_{\mathrm{d}}, S_\omega, N_1, N_2, W$, 使得以下线性矩阵不等式成立

$$\varXi = \begin{bmatrix} \varXi_{11} & \varXi_{12} & \varXi_{13} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & \varXi_{14} & A^{\mathrm{T}}P & C^{\mathrm{T}} \\ * & \varXi_{22} & \varXi_{23} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & \varXi_{24} & A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & \varXi_{33} & \bar{d}W^{\mathrm{T}} & \varXi_{34} & B_\omega^{\mathrm{T}}P & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

其中:

$$\begin{aligned} \varXi_{11} &= A^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}} + SR^{\mathrm{T}}A - E^{\mathrm{T}}PE + \\ &\quad N_1^{\mathrm{T}}E + E^{\mathrm{T}}N_1 + (\bar{d} - \underline{d} + 1)Q, \\ \varXi_{12} &= A^{\mathrm{T}}RS_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} + SR^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} + E^{\mathrm{T}}N_2 - N_1^{\mathrm{T}}E, \\ \varXi_{13} &= SR^{\mathrm{T}}B_\omega + A^{\mathrm{T}}RS_\omega^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}W, \\ \varXi_{14} &= \bar{d}(A-E)^{\mathrm{T}}Z, \\ \varXi_{22} &= A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}RS_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} + S_{\mathrm{d}}R^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} - N_2^{\mathrm{T}}E - E^{\mathrm{T}}N_2 - Q, \\ \varXi_{23} &= S_{\mathrm{d}}R^{\mathrm{T}}B_\omega + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}RS_\omega^{\mathrm{T}} - E^{\mathrm{T}}W, \\ \varXi_{24} &= \bar{d}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}Z,\ \varXi_{34} = \bar{d}B_\omega^{\mathrm{T}}Z, \\ \varXi_{33} &= -\gamma^2 I + B_\omega^{\mathrm{T}}RS_\omega^{\mathrm{T}} + S_\omega R^{\mathrm{T}}B_\omega, \end{aligned}$$

$R \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$为任意满足$E^{\mathrm{T}}R = 0$的列满秩矩阵, 则标称离散时变时滞奇异系统(7)是正则, 因果, 稳定且具有干扰衰减度$\gamma$.

**证**　考虑系统(7), 取如下泛函

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k), \tag{12}$$

其中:

$$V_1(k) = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k),$$
$$V_2(k) = \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{0}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} y^{\mathrm{T}}(l)E^{\mathrm{T}}ZEy(l),$$
$$V_3(k) = \sum_{l=k-d(k)}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l),$$
$$V_4(k) = \sum_{\theta=-\bar{d}+2}^{\underline{d}+1}\sum_{l=k-1+\theta}^{k-1} x^{\mathrm{T}}(l)Qx(l).$$

计算其前向差分$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$, 并注意到$E^{\mathrm{T}}R = 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} 0 = 2x^{\mathrm{T}}(k+1)E^{\mathrm{T}}R(S^{\mathrm{T}}x(k) + \\ S_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}x(k-d(k)) + S_\omega^{\mathrm{T}}\omega(k)), \end{aligned} \tag{13}$$

由$x(k)$的零初始条件, 并结合式(13)和引理2得到

$$\begin{aligned} &J = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)) \leqslant \\ &\sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(k)\omega(k)) + V(x_\infty) - V(x_0) = \\ &\sum_{k=0}^{\infty}\xi^{\mathrm{T}}(k)\varXi\xi(k), \end{aligned} \tag{14}$$

很容易由式(11)得出$J < 0$.

另一方面, 显然线性矩阵不等式(11)意味着

$$\begin{bmatrix} \varXi_{11} & \varXi_{12} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & \bar{d}(A-E)^{\mathrm{T}}Z & A^{\mathrm{T}}P \\ * & \varXi_{22} & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & \bar{d}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}Z & A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P \\ * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

则根据定义1和文[14]的结果, 可知当$\omega(k) = 0$时系统(7)是正则, 因果, 稳定的. 结合该两方面的证明, 可得标称离散时变时滞奇异系统(7)是正则, 因果, 稳定且具有干扰衰减度$\gamma$.　　证毕.

### 3.2　鲁棒$\mathrm{H}_\infty$状态反馈控制器设计(Robust $\mathrm{H}_\infty$ state feedback controller design)

本节给出基于线性矩阵不等式的鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制器设计算法. 为了叙述方便, 首先考虑标称系统, 代入状态反馈控制律(5)得如下闭环系统:

$$\begin{cases} Ex(k+1) = A_{\mathrm{c}}x(k) + A_{\mathrm{d}}x(k-d(k)) + B_\omega\omega(k), \\ z(k) = C_{\mathrm{c}}x(k). \end{cases} \tag{16}$$

以下定理给出系统(16)的$\mathrm{H}_\infty$控制器设计算法.

**定理 2**　给定标量$\gamma > 0$, 如果存在对称正定矩阵$P, Q, Z$和矩阵$S, N_1, N_2, W, X, L$满足如下的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & \Upsilon_{14} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 & B_\omega \\ * & \Upsilon_{22} & X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & \Upsilon_{24} & 0 & \bar{d}Z & 0 \\ * & * & \Upsilon_{33} & -EW & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{d}W^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

则可以构造状态反馈控制律

$$u(k) = LX^{-1}x(k)$$

使得离散时变时滞奇异系统(16)正则, 因果, 稳定且具干扰衰减度$\gamma$. 其中:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{11} =&(A-E)X + X^{\mathrm{T}}(A-E)^{\mathrm{T}} + BL + L^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \\
&N_1^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} + EN_1 + (\bar{d} - \underline{d} + 1)Q,\\
\Upsilon_{12} =&EP + SR^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}} + (A-E)X + BL,\\
\Upsilon_{13} =&X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} + EN_2 - N_1^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}},\\
\Upsilon_{14} =&(CX+DL)^{\mathrm{T}} + EW,\\
\Upsilon_{22} =&-X - X^{\mathrm{T}} + P, \Upsilon_{24} = (CX+DL)^{\mathrm{T}},\\
\Upsilon_{33} =&-Q - EN_2 - N_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

$R \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$为任意满足$ER=0$的列满秩矩阵.

**证** 采用同文[2]相同的思路, 将系统(16)写成如下的等价形式:

$$\begin{cases} \bar{E}\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{A}_{\mathrm{d}}\bar{x}(k-d(k)) + \bar{B}_\omega\omega(k),\\ z(k) = \bar{C}\bar{x}(k), \end{cases} \tag{18}$$

其中:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix},\ \bar{A} = \begin{bmatrix} E & I \\ A_{\mathrm{c}} - E & -I \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{\mathrm{d}} & 0 \end{bmatrix},\ \bar{C} = \begin{bmatrix} C_{\mathrm{c}} & 0 \end{bmatrix},\ \bar{B}_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\omega \end{bmatrix},$$

由定理1知, 如果线性矩阵不等式(11)成立, 则系统(18)是正则, 因果, 稳定且具干扰衰减度$\gamma$, 其中$E$, $A$, $A_{\mathrm{d}}$, $P$, $Q$, $Z$, $R$, $S$, $S_{\mathrm{d}}$, $S_\omega$, $N_1$, $N_2$, $W$分别替换成$\bar{E}$, $\bar{A}$, $\bar{A}_{\mathrm{d}}$, $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{Z}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{S}_{\mathrm{d}}$, $\bar{S}_\omega$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{W}$. 作为特例, 选择

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix},\ \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix},\ \bar{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix},$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix},\ \bar{S} = \begin{bmatrix} S & I \\ 0 & I \end{bmatrix},\ \bar{N}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix},$$

$$\bar{N}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix},\ \bar{W} = \begin{bmatrix} W \\ \beta I \end{bmatrix},\ \bar{S}_{\mathrm{d}} = \bar{S}_\omega = 0,$$

其中$P \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$为正定对称阵, $R \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$为任意满足$E^{\mathrm{T}}R = 0$的列满秩矩阵, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$为任意非奇异矩阵, $S \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}, N_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, N_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, W \in \mathbb{R}^{n\times p}$为任意矩阵. 容易验证$\bar{R}$为列满秩矩阵且满足$\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{R} = 0$. 由Schur补引理，并令$\beta \to 0$可得

$$\begin{bmatrix} \varLambda_{11} & \varLambda_{12} & \varLambda_{13} & \varLambda_{14} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 & C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \\ * & \varLambda_{22} & X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} & X^{\mathrm{T}}B_\omega & 0 & \bar{d}Z & 0 \\ * & * & \varLambda_{33} & -E^{\mathrm{T}}W & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{d}W^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\varLambda_{11} =& (A_{\mathrm{c}} - E)^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}(A_{\mathrm{c}} - E) + \\
&N_1^{\mathrm{T}}E + E^{\mathrm{T}}N_1 + (\bar{d} - \underline{d} + 1)Q,\\
\varLambda_{12} =& E^{\mathrm{T}}P + SR^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}} + (A_{\mathrm{c}} - E)^{\mathrm{T}}X,\\
\varLambda_{13} =& X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} + E^{\mathrm{T}}N_2 - N_1^{\mathrm{T}}E,\\
\varLambda_{14} =& X^{\mathrm{T}}B_\omega + E^{\mathrm{T}}W,\\
\varLambda_{22} =& -X - X^{\mathrm{T}} + P,\\
\varLambda_{33} =& -Q - E^{\mathrm{T}}N_2 - N_2^{\mathrm{T}}E,
\end{aligned}$$

现在考虑如下离散时变时滞奇异系统:

$$\begin{cases} E^{\mathrm{T}}\varsigma(k+1) = A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\varsigma(k) + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\varsigma(k-d(k)) + C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\eta(k),\\ z(k) = B_\omega^{\mathrm{T}}\varsigma(k), \end{cases} \tag{20}$$

其中: $\varsigma(k) \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $\eta(k) \in \mathbb{R}^q$为干扰输入向量, 其他变量与(1)中定义相同.

注意到$\det(zE - A_{\mathrm{c}}) = \det(zE^{\mathrm{T}} - A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}})$, 因此矩阵对$(E, A_{\mathrm{c}})$是正则, 因果的, 当且仅当矩阵对$(E^{\mathrm{T}}, A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}})$是正则, 因果的. 因此系统(16)是正则, 因果的, 当且仅当系统(20)是正则, 因果的. 同时由于$\det(zE - A_{\mathrm{c}} - A_{\mathrm{d}}z^{-d(k)}) = 0$的解与$\det(zE^{\mathrm{T}} - A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} - A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}z^{-d(k)}) = 0$的解相同, 因此系统(16)在$\omega(k) = 0$时是稳定的, 当且仅当系统(20)在$\eta(k) = 0$时是稳定的. 采用与定理1相类似的证明步骤, 可以证明系统(20)的性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2\eta^{\mathrm{T}}(k)\eta(k)) < 0.$$

因此, 如果仅仅考虑系统的正则性, 因果性, 稳定性和$\mathrm{H}_\infty$性能, 可以认为系统(16)和系统(20)是等价的. 故在不等式(19)中把$E, A_{\mathrm{c}}, A_{\mathrm{d}}, B_\omega$和$C_{\mathrm{c}}$分别替换为$E^{\mathrm{T}}, A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}, A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}, C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}$和$B_\omega^{\mathrm{T}}$, 并引入矩阵$L = KX$, 可得(17). 证毕.

以下定理进一步给出不确定离散时变时滞奇异系统(1)的鲁棒$\mathrm{H}_\infty$控制器设计算法.

**定理 3**　考虑不确定离散时滞时变奇异系统(1), 对给定标量$\gamma > 0$, 如果存在正定对称矩阵$P$, $Q, Z$, 矩阵$S, N_1, N_2, W, X, L$和标量$\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \varUpsilon_{12} & \varUpsilon_{13} & \varUpsilon_{14} & \bar{d}N_1^{\mathrm{T}} & 0 & B_\omega & \Theta_{18} & X^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & \varUpsilon_{22} & X^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & \varUpsilon_{24} & 0 & \bar{d}Z & 0 & \Theta_{28} & X^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & * & \Theta_{33} & -EW & \bar{d}N_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{d}W^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{d}Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

则可以构造如下的状态反馈控制律$u(k) = LX^{-1}x(k)$ 使得闭环系统对于任意的容许不确定性都是正则, 因果, 稳定且具干扰衰减度$\gamma$, 其中:

$$\Theta_{11} = \varUpsilon_{11} + \epsilon_1 MM^{\mathrm{T}},$$
$$\Theta_{33} = \varUpsilon_{33} + \epsilon_2 MM^{\mathrm{T}},$$
$$\Theta_{18} = \Theta_{28} = (N_{\mathrm{a}}X + N_{\mathrm{b}}L)^{\mathrm{T}},$$

$\varUpsilon_{11}, \varUpsilon_{12}, \varUpsilon_{13}, \varUpsilon_{14}, \varUpsilon_{22}, \varUpsilon_{24}, \varUpsilon_{33}$和式(17)中定义相同.

**证**　把式(17)中的$A, A_{\mathrm{d}}$和$B$ 分别替换为$A+MF(k)N_{\mathrm{a}}, A_{\mathrm{d}} + MF(k)N_{\mathrm{d}}$和$B + MF(k)N_{\mathrm{b}}$并由引理1, 可得式(21).　证毕.

**注 1**　从式(21)可以看出$\varUpsilon_{22} = -X - X^{\mathrm{T}} + P < 0$. 因此如果式(21)有可行解, 则$X$一定是非奇异的.要特别提到的, 目前文献还没有发表过对于不确定离散时滞时变奇异系统的基于严格线性矩阵不等式方法的时滞依赖鲁棒H$_\infty$控制器设计算法.

**注 2**　定理3提供了不确定离散时滞时变奇异系统的时滞依赖鲁棒H$_\infty$控制器设计算法. 该设计算法依赖于时变时滞的上确界和下确界. 因此, 当时变时滞的上确界和下确界已知时, 定理3能得到期望的结果. 另外, 当下确界未知时, 可以假定下确界为零. 当下确界等于上确界时, 显然意味着时滞是固定的. 因此, 定理3能处理一大类离散奇异系统的鲁棒H$_\infty$控制问题.

**注 3**　如果干扰衰减度$\gamma$给定, 可通过解式(21)的可行性问题得到一个合适的状态反馈控制律, 否则, 可通过解下面的最优问题:

$$\begin{aligned} &\min \gamma \\ &\text{s.t. LMI(21)}, P > 0, Q > 0, Z > 0, \epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0 \end{aligned} \tag{22}$$

得到一个最小的干扰衰减度$\gamma_{\min}$.

## 4　数值仿真例子(Numerical examples)

本节给出一个数值实例证明本文所提方法的有效性.

考虑具有如下参数的不确定离散奇异系统(1):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.07 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = B_\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$C = [0 \quad 1], D = 0.2,$$
$$M = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, N_{\mathrm{a}} = N_{\mathrm{d}} = [1 \quad 2],$$
$$N_{\mathrm{b}} = 0.3.$$

取$R = [0 \ \ 1]^{\mathrm{T}}$, 假设时变时滞满足: $1 \leqslant d(k) \leqslant 5$, 对于给定的$\gamma = 1.5$, 则由定理3可知, 通过求解线性矩阵不等式(21)的可行解问题, 一个合适的状态反馈控制律为

$$u(k) = [-5.5119 \quad -12.2362]x(t).$$

如果该例中的时滞是固定的, 即$\bar{d} = \underline{d}$, 根据文[10]的定理4和注2, $\gamma$未知时, 通过解最优化问题可得$\gamma_{\min} = 0.175$, 而采用本文的方法, 通过解最优化问题(22)可得$\gamma_{\min} = 0.1$, 因而本文所提的时滞依赖方法具有更小的保守性.

## 5　结论(Conclusion)

本文研究了一类具有时变时滞的不确定离散奇异系统的时滞依赖鲁棒H$_\infty$控制问题. 首次将基于二次型的有限和不等式用于离散奇异系统中, 得出一个新的时滞依赖有界实引理, 并表示为严格线性矩阵不等式. 此外, 基于该时滞依赖有界实引理, 得出鲁棒H$_\infty$控制器设计方法, 确保闭环系统对所有容许的不确定性和时变时滞是正则, 因果, 稳定且具干扰衰减度$\gamma$. 最后, 一个数值实例证明了本文所提方法的有效性.

## 参考文献(References):


[1] FRIDMAN E, SHAKED U. New Lyapunov-Krasovskii functional for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 43(4): 309 – 319.

[2] FRIDMAN E, SHAKED U. A descriptor approach to $H_\infty$ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253 – 270.

[3] PARK P G, MOON Y S, KWON W H. A delay-dependent robust stability criterion for uncertain time-delay systems[C]//*Proceedings of American Control Conference.* Philadelphia, Pennsylvania: OMNIPRESS, 1998: 1963 – 1964.

[4] PARK P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 876 – 877.

[5] GU K, NICULESCU S I. Additional dynamics in transformed time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 572 – 575.

[6] GU K, NICULESCU S I. Further remarks on additional dynamics in various model transformation of linear delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(3): 497 – 500. 7

[7] ZHANG X M, HAN Q L. Delay-dependent robust $H_\infty$ filtering for uncertain discrete-Time dystems with time-varying delay based on a finite sum inequality[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2006, 53(12): 1466 – 1470.

[8] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[9] LEWIS F L. A Survey of linear singular systems[J]. *Circuits Systems Signal Processing*, 1986, 5: 3 – 36.

[10] JI X, SU H, CHU J. Robust $H_\infty$ control for uncertain discrete singular time-delay systems[C]//*Proceedings of the International Conference on Sensing, Computing and Automation.* Waterloo: Watam Press, 2006: 2489 – 2493.

[11] XU S, LAM J, YANG C. Robust $H_\infty$ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2002, 9: 539 – 554.

[12] XU S, DOOREN P V, STEFAN R, LAM J. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 – 1128.

[13] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

[14] WANG H J, ZHAO X D, XUE A K, et al. Delay-dependent robust control for uncertain discrete singular systems with time-varying delay[J]. *Journal of Zhejiang University Science A*, 2008, 9(8): 1034 – 1042.


## 作者简介:


**王惠姣** (1976—), 女, 博士, 浙江理工大学教师, 研究方向为鲁棒控制、信息融合、奇异系统的控制, E-mail: hjwang@hdu.edu.cn;

**王建中** (1963—), 男, 教授, 研究方向为鲁棒控制、生产调度、信息融合等, E-mail: wangjz@hdu.edu.cn;

**葛 铭** (1971—), 男, 高级工程师, 研究方向为鲁棒控制、先进控制、生产调度、信息融合等, E-mail: ming.ge@honeywell.com;

**薛安克** (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 杭州电子科技大学校长, 研究方向为鲁棒控制、信息融合、智能控制和奇异系统的控制, E-mail: akxue@hdu.edu.cn;

**鲁仁全** (1971—), 男, 博士, 副教授, 研究方向为鲁棒控制、奇异系统的控制和信息融合, E-mail:rqlu@hdu.edu.cn.