文章编号: 1000−8152(2008)06−1151−04

# 滑模控制一类非线性分布式时滞系统

吴立刚[1,2], 胡跃明[1]

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640;

2. 哈尔滨工业大学大学 空间控制与惯性技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要**: 针对一类状态不可测的非线性不确定分布式时滞系统, 给出了系统滑动模态鲁棒渐近稳定的充分条件. 设计了一类滑模观测器, 同时采用线性矩阵不等式的处理方法给出了该观测器存在的充分条件. 再应用滑模控制的趋近率方法和基于观测器所得到的估计状态, 综合了一类滑模控制器. 该控制器同时保证了估计状态下的滑模面和估计误差状态下的滑模面的渐近可达性.

**关键词**: 滑模控制; 状态测器; 分布式时滞; 非线性; 线性矩阵不等式

**中图分类号**: TP273　　　**文献标识码**: A

# Sliding mode control for a class of nonlinear systems with distributed delay

WU Li-gang[1,2], HU Yue-ming[1]

(1. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. Space Control and Inertial Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** The design problems of sliding mode observer and the observer-based controller are addressed for a class of uncertain nonlinear systems with distributed delays. According to the sliding mode control theory, we propose a sufficient condition of robust asymptotic stability for the sliding mode dynamics. A sliding mode observer is designed, and the sufficient condition is given for the existence of such an observer in terms of linear matrix inequality (LMI). Based on the observed states, a controller is synthesized by using the sliding mode control theory and the reaching law technique. The proposed control scheme guarantees the reachability of the sliding surfaces defined in both the observed state space and the observed state-error space.

**Key words:** sliding mode control; state estimation; distributed delay; nonlinear; linear matrix inequalities (LMIs)

## 1 引言(Introduction)

关于线性不确定时滞系统状态观测器的设计问题一直以来受到了广泛的关注, 并取得了一系列研究成果, 但当系统中含有非线性时, 设计就变得很困难. 近年来, 发展了一种滑模观测器, 该观测器由于包含一项切换式的控制能有效地处理非线性系统的状态观测问题. 从最近的文献[1～3]看, 关于滑模观测器的设计主要有两种方法: 一种是在Luenberger观测器的基础上增加一个滑模控制器, 该控制器能用来消除非线性和不确定性带来的影响[1]; 另一种是由Utkin根据滑模面上的等价控制原理提出的[2]. 近年来, 关于分布式时滞系统的鲁棒稳定性和鲁棒镇定问题也取得一定的进展[4~6], 但这些结论都在系统状态可观测的条件下得到的. 因此, 关于分布式时滞系统的观测器设计和基于观测器的鲁棒控制问题, 尚待进一步研究.

本文研究了一类非线性不确定分布式时滞系统的滑模观测器设计和基于观测状态下的滑模控制问题. 文中首先给出了系统滑动模态鲁棒渐近稳定的充分条件; 其后设计了一类滑模观测器并相应地给出了该观测器存在的充分条件; 在已得到的系统估计状态基础上应用趋近率的方法综合了滑模控制器, 该控制器同时保证了估计状态下的滑模面和估计误差状态下的滑模面的渐近可到达性.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下非线性不确定分布式时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+[A_{d1}+\Delta A_{d1}(t)]x(t-\\ \qquad \tau_1(t))+[A_{d2}+\Delta A_{d2}(t)]\int_{t-\tau_2}^{t}x(\theta)\mathrm{d}\theta+\\ \qquad B(u(t)+f(x(t),t)),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0],\\ y(t)=Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2005−04−12; 收修改稿日期: 2008−03−12.

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目(20070420139); 中国博士后科学基金特别资助项目(200801253); 国家自然科学基金资助项目(60804002).

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为系统状态向量; $u(t) \in \mathbb{R}^m$为控制输入; $y(t) \in \mathbb{R}^p$为测量输出; $0 \leqslant \tau_1(t) \leqslant \tau_1$为时变有界时滞且满足$\dot{\tau}_1(t) \leqslant \mu < 1$; $\tau_2$为已知的实常数时滞, 设$\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$; $f(x(t), t)$为非线性函数; $\phi(t)$为状态初始条件; $\Delta A(t)$, $\Delta A_{d1}(t)$, $\Delta A_{d2}(t)$表示时变参数不确定性, 假定其范数有界且满足

$$[\Delta A(t)\ \ \Delta A_{d1}(t)\ \ \Delta A_{d2}(t)] = MF(t)[N\ \ N_{d1}\ \ N_{d2}],$$

其中: $M, N, N_{d1}, N_{d2}$为已知实常数矩阵; $F(t)$为未知的时变实矩阵且满足 $F(t)F(t) \leqslant 1$.

设计如下形式的滑模观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_{d1}\hat{x}(t-\tau_1(t)) + \\ \qquad A_{d2}\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{x}(\theta)\mathrm{d}\theta + B(u(t) + \\ \qquad v(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$为系统状态$x(t)$的估计值; $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$为待设计的观测器增益矩阵; $v(t)$为待设计的外部非连续反馈补偿控制, 也即滑模控制器. 由式(1)(2)可得到如下状态估计误差动态方程:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \\ [A - LC + \Delta A(t)]e(t) + [A_{d1} + \Delta A_{d1}(t)]\cdot \\ e(t-\tau_1(t)) + [A_{d2} + \Delta A_{d2}(t)]\int_{t-\tau_2}^{t}e(\theta)\mathrm{d}\theta + \\ \Delta A_{d2}(t)\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{x}(\theta)\mathrm{d}\theta + \\ \Delta A_{d1}(t)\hat{x}(t-\tau_1(t)) - B(v(t) - f(x(t), t)), \\ e_y(t) = Ce(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$为估计误差状态.

本文针对系统(1)设计形如式(2)的滑模观测器, 并基于估计状态设计滑模控制器, 使动态式(2)和(3)鲁棒渐近稳定, 并保证在有限时间内式(2)和(3)的轨迹分别到达在各自定义的滑模面上.

## 3 主要结论(Main results)

选择如下线性滑模面函数:

$$s(x(t), t) = B^{\mathrm{T}}P^{-1}x(t), 0 < P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{4}$$

引入状态变换[7]:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} (\tilde{B}^{\mathrm{T}}P\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^{\mathrm{T}} \\ (B^{\mathrm{T}}P^{-1}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}P^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中: $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{B} \in (M : B^{\mathrm{T}}M = 0)$. 容易得出: $T^{-1} \in [P\tilde{B}\ \ \ B]$和

$$s(x(t), t) = B^{\mathrm{T}}P^{-1}T^{-1}z(t) = B^{\mathrm{T}}P^{-1}Bz_2(t), \tag{6}$$

因此, $(n-m)$维降阶滑动模态方程可描述为

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1(t) = \\ &(\tilde{B}^{\mathrm{T}}P\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^{\mathrm{T}}[(A + \Delta A(t))P\tilde{B}z_1(t) + \\ &(A_{d1} + \Delta A_{d1}(t))P\tilde{B}z_1(t-\tau_1(t)) + \\ &(A_{d2} + \Delta A_{\mathrm{d}2}(t))P\tilde{B}\int_{t-\tau_2}^{t}z_1(\theta)\mathrm{d}\theta]. \end{aligned} \tag{7}$$

下面给出了滑动模态(7)鲁棒渐近稳定的充分条件.

**定理 1** 如果存在适当维数的正定对称矩阵$P > 0$, $Q > 0$, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, $R > 0$以及标量$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$使得以下线性矩阵不等式成立, 那么滑动模态(7)鲁棒渐近稳定.

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & A_{d1}P & 0 & Q + A_{d2}P & PN^{\mathrm{T}} \\ * & \Upsilon_{22} & 0 & 0 & PN_{d1}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -Q_2 - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & -Q & 0 \\ * & * & * & -\tau_2^{-1}R - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & PN_{d2}^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

其中:

$$\Upsilon_{22} \triangleq -(1-\mu)Q_1 - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B,$$

$$\Upsilon_{11} \triangleq Q_1 + Q_2 + \tau_2 R + AP + PA^{\mathrm{T}} - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B + \lambda_2 MM^{\mathrm{T}}.$$

分别定义如下的滑模面函数:

$$\hat{s}(t) \triangleq \hat{s}(\hat{x}(t), t) = B^{\mathrm{T}}X\hat{x}(t), \tag{9}$$

$$s_e(t) \triangleq s_e(e(t), t) = B^{\mathrm{T}}Xe(t), \tag{10}$$

其中$X > 0$且假定存在矩阵$N$使得$B^{\mathrm{T}}X = NC$. 因此, $s_e(t) = B^{\mathrm{T}}Xe(t) = N(y(t) - \hat{y}(t))$. 给出外部非连续反馈补偿控制如下:

$$v(t) = \varepsilon_1 s_e(t) + (\rho(t) + \varepsilon_1)\mathrm{sign}(s_e(t)), \tag{11}$$

其中: $\varepsilon_1$为正实常数, $\rho(t)$为$f(x(t), t)$的上界函数, 即 $\|f(x(t), t)\| \leqslant \rho(t)$.

根据文献[8]给出如下基于估计状态的等价控制和切换控制:

$$\begin{cases} u_{eq}(t) = -B^{\mathrm{T}}X[A\hat{x}(t) + A_{d1}\hat{x}(t-\tau_1(t)) + \\ \qquad A_{d2}\int_{t-\tau_2}^{t}\hat{x}(\theta)\mathrm{d}\theta], \\ u_n(t) = -\varepsilon_2\hat{s}(t) - (\rho(t) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathrm{sgn}(\hat{s}(t)), \end{cases} \tag{12}$$

其中常数$\varepsilon_2$满足$\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1/2 > 0$. 系统控制输入为$u(t) = u_{eq}(t) + u_n(t)$.

以下定理将给出该观测器增益矩阵$L$的求解.

**定理 2** 如果存在具有适当维数的正定对称矩阵$X > 0, S_1 > 0, S_2 > 0, W_1 > 0, W_2 > 0, Z_j > 0 (j = 1,2,3,4)$和一般矩阵$Y$以及实标量$\lambda_i > 0 (i = 1,2,3,4,5,6)$使得以下线性矩阵不

等式和$B^{\mathrm T}X = NC$成立, 那么包含状态估计动态(2)和状态估计误差动态(3)的整个闭环系统将鲁棒渐近稳定, 且观测器增益阵$L$可表示为$L = X^{-1}Y$.

$$\begin{bmatrix}
\Pi_{11} & XA_{d1} & 0 & XA_{d1}+S_1^{\mathrm T} & C^{\mathrm T}Y^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_3\\
* & \Pi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & -Z_2 & -S_1^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & \Pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & \Pi_{55} & XA_{d1} & 0 & XA_{d2}+S_2^{\mathrm T} & 0 & 0 & \kappa_1 & 0\\
* & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & 0 & 0 & A_{d1}^{\mathrm T}X & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & -Z_4 & -S_2^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88} & A_{d2}^{\mathrm T}X & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa_2 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa_4
\end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

其中:

$$\kappa_1 \triangleq (\sqrt{3}XBB^{\mathrm T}, A^{\mathrm T}X),\ \kappa_2 \triangleq \mathrm{diag}\{I, I\},$$
$$\kappa_3 \triangleq (XM, XM, XM, XM, XM, XM),$$
$$\kappa_4 \triangleq \mathrm{diag}\{\lambda_1 I, \lambda_2 I, \lambda_3 I, \lambda_4 I, \lambda_5 I, \lambda_6 I\},$$
$$\Pi_{11} \triangleq \mathrm{sym}(XA - YC) + \lambda_1 N^{\mathrm T}N + \tau_2 W_1 + Z_1 + Z_2,$$
$$\Pi_{22} \triangleq \lambda_2 N_1^{\mathrm T}N_1 - (1-\mu)Z_1,$$
$$\Pi_{44} \triangleq \lambda_3 N_2^{\mathrm T}N_2 - \tau_2^{-1}W_1,$$
$$\Pi_{55} \triangleq XA + A^{\mathrm T}X + \lambda_4 N^{\mathrm T}N + \tau_2 W_2 + Z_3 + Z_4,$$
$$\Pi_{66} \triangleq \lambda_5 N_1^{\mathrm T}N_1 - (1-\mu)Z_3,$$
$$\Pi_{88} \triangleq \lambda_6 N_2^{\mathrm T}N_2 - \tau_2^{-1}W_2.$$

由于篇幅所限, 本定理的证明从略.

值得注意的是, 定理2中存在矩阵等式$B^{\mathrm T}X = NC$, 因此不能通过MATLAB的LMI工具箱直接求解. 但可知等式等价于

$$\mathrm{tr}[(B^{\mathrm T}X - NC)^{\mathrm T}(B^{\mathrm T}X - NC)] = 0, \quad (14)$$

因此可引进如下条件:

$$(B^{\mathrm T}X - NC)^{\mathrm T}(B^{\mathrm T}X - NC) \leqslant \alpha I, \quad (15)$$

其中$\alpha > 0$为充分小的正实常数. 利用Schur补可知上面的不等式等价于

$$\begin{bmatrix} -\alpha I & XB - C^{\mathrm T}N^{\mathrm T}\\ * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

因此, 本文基于观测器的滑模控制非线性分布式时滞系统问题可以转化为求解以下的优化问题:

$$\begin{cases} \min\ \alpha \\ \text{s.t. 式(13)和式(16).} \end{cases} \quad (17)$$

由于和式(13)联立, 因而避免了式(16)中的$\alpha$最小值来自极小的$X$和$N$的情况. 若所得的$\alpha$最小值较大, 则问题可能无解. 最后分析在$u(t)$作用下, 滑模面$\hat{s}(t) = 0$和$s_e(t) = 0$的可到达性, 有如下结论:

**定理 3**　如果存在具有适当维数的正定对称矩阵$X > 0$, $S_1 > 0$, $S_2 > 0$, $W_1 > 0$, $W_2 > 0$, $Z_j > 0 (j = 1,2,3,4)$和一般矩阵$Y$以及实标量$\lambda_i > 0 (i = 1,2,3,4,5,6)$使得以下线性矩阵不等式(13)和(16)成立, 且观测器增益阵$L$可设计为$L = X^{-1}Y$. 则在滑模控制$u(t)$作用下, 状态估计动态轨迹和状态估计误差动态轨迹将分别渐近趋近于滑模面$\hat{s}(t) = 0$和滑模面$s_e(t) = 0$上.

篇幅所限, 证明从略.

## 4　结论(Conclusion)

本文针对一类状态不可测的非线性不确定分布式时滞系统, 进行了滑模观测器的设计以及基于观测器的滑模控制器的设计, 给出了观测器存在的充分条件. 基于系统的观测状态, 设计了滑模控制器, 该控制保证了状态估计动态轨迹和状态估计误差动态轨迹分别渐近趋近于各自的滑模面上. 另外, 当系统轨迹进入滑模面后, 对滑动模态稳定性也进行了分析, 给出了鲁棒渐近稳定的充分条件. 本文克服了反馈控制中系统状态不可测的缺点.

## 参考文献(References):


[1] TAN C P, EDWARDS C. An LMI approach for designing sliding mode observers[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(16): 1559 – 1568.

[2] HASKARA I, OZGUNER U, UTKIN V I. On sliding mode observers via equivalent control approach[J]. *International Journal of Control*, 1998, 71(6): 1051 – 1067.

[3] EDWARDS C, SPURGEON S, HEBDEN R. On the design of sliding mode output feedback controllers[J]. *International Journal of Control*. 2003, 76(9/10): 893 – 905.

[4] KOLMANOVSKII V B, RICHARD J P. Stability of some linear systems with delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999,

44(5): 984 – 989.

[5] ZHENG F, FRANK P. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers[J]. *Automatica*, 2002, 38(3): 487 – 497.

[6] GU K. An improved stability criterion for systems with distributed delays[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(9): 819 – 831.

[7] NIU Y, LAM J, WANG X. Observer-based sliding mode control for nonlinear state-delayed systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2004, 35(2): 139 – 150.

[8] GAO W, HUNG J C. Variable structure control of nonlinear systems: a new approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 45 – 55.

## 作者简介:

**吴立刚** (1977—), 男, 博士, 现在华南理工大学自动化科学与工程学院作博士后研究工作, 主要研究兴趣为时滞系统和不确定系统的分析和综合、非线性系统的鲁棒控制, E-mail: lgwu@scut.edu.cn;

**胡跃明** (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 广东省“千百十工程”省级培养对象, 并兼任国内知名EI核心专业期刊《控制理论与应用》(中文版)主编, 中国人工智能学会智能产品与产业工作委员会委员, 中国自动化学会“关肇直奖”评奖委员会委员, 中国自动化学会控制理论专业委员会委员, 广东省自动化学会常务理事等学术职务, 此外, 他还担任国家自然科学基金委员会信息部, 力学部以及多个广东省和广州市科技部门重大科技计划的评审专家, 目前正致力于电子制造业关键测试与生产设备、非线性控制系统理论与应用以及智能医疗器械等基于计算机视觉、智能检测与控制技术的高新自动化技术产品研究开发和相应的基础理论研究工作, E-mail: auymhu@scut.edu.cn.

# 第48届IEEE控制与决策会议(CDC)和第28届中国控制会议(CCC)联合会议
# 会议通知

第48届IEEE控制与决策会议(CDC)和第28届中国控制会议(CCC)联合会议将于2009年12月16～18日在上海国际会议中心召开. IEEE控制与决策会议(CDC)是控制领域最重要的大型国际年会. 本次会议是IEEE控制与决策会议首次在亚太地区举办. 这次联合会议是继1999年在北京成功举办的IFAC世界大会以来, 在我国召开的又一次控制界盛会. 欢迎广大的海内外控制学者和工程技术人员参加, 就决策与自动控制及相关领域的最新理论与应用成果以及未来的发展趋势进行广泛交流.

投稿截至日期: 2009年2月1日.

详细情况请登陆会议网站: http://www.ieeecss.org/CAB/conferences/cdc2009/