第 25 卷第 6 期
2008 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 6
Dec. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)06−1163−04

舰艇编队信息战火力分配微分对策模型及求解

李登峰[1], 孙 涛[2], 王永春[2]

(1. 海军大连舰艇学院 作战指挥系, 辽宁 大连 116018; 2. 海军大连舰艇学院 博士生队, 辽宁 大连 116018)

摘要: 火力分配问题一直是军事理论工作者和参战双方指挥员关心得最多的重要问题之一. 针对舰艇编队信息战的特殊性, 本文利用兰彻斯特战斗方程和微分对策理论建立了相应的火力分配优化模型, 并进行了模型分析和求解. 通过分析、求解一个实例的最优策略, 从另一层面证明了“集中优势火力”这一战术思想的正确性. 研究结果可为作战指挥决策提供理论参考.

关键词: 信息战; 火力分配; 微分对策; 战斗方程

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Differential game model and its solution for the firepower-assignment in vessel formations in information war

LI Deng-feng[1], SUN Tao[2], WANG Yong-chun[2]

(1. Deptartment of Combat Command, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning 116018, China;
2. Doctor Team, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning 116018, China)

Abstract: The firepower-assignment is one of the important problems for military theoretic researchers and commanders. Based on the features of vessel formations in information war, we develop a corresponding firepower-assignment optimization model using the Lanchester equation and differential game theory, and analyze its solution. In analyzing and solving the optimal strategies of a real example, this approach validates, from another aspect, the principle of concentrating superior firepower in attack. The research results may provide a theoretical reference for combat command and decision.

Key words: information war; firepower-assignment; differential game; combat equation

1 战斗背景描述(Background of battle)

这里做如下战术假设:

① 红蓝双方分别有m艘和n艘舰艇, 将每艘舰艇看作一个作战单元, 双方使用的武器系统可以进行点射或面射. 另外, 双方除了参与直接作战的武器系统外, 还有一个信息战系统协助作战.

② 设红方的第i种作战单元X_i的数量为$X_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 蓝方的第j种作战单元Y_j的数量设为$Y_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$, 并设红蓝双方编队的信息战系统R和B的性能分别为$R(t)$和$B(t)$. 假设Y_j对R, X_i对R的毁伤系数分别为a_j, b_i, 而Y_j对X_i的毁伤系数受B的影响, 故可用函数$f_{ji}(B(t))$来表示. 应满足如下条件:

A) $f'_{ji}(B(t))\geqslant 0$, 表明信息战系统对提高作战单位作战效率起着积极的作用;

B) $f''_{ji}(B(t))\leqslant 0$, 说明了信息的阈值效应, 即随着信息战系统性能的提高, 它对提高作战单位作战效率的作用将减少. 同理, 若用$g_{ij}(R(t))$表示X_i对Y_j的毁伤系数, 则函数$g_{ij}(R(t))$也应满足类似于A)B)的条件.

③ 设作战的有效时间段为$[0,T]$, 并假设在时刻$t=T$之前没有任何作战单元被全部消灭.

④ 编队双方可以了解到对方的目标类型和数量, 各个目标的价值系数可以通过一定的模型计算得到; 各作战单元的射击彼此独立进行, 不考虑目标的损伤积累.

2 舰艇编队火力分配微分对策优化模型(Firepower-assignment differential game optimization model for vessel formations)

根据上述假定, 设Y_j用于攻击X_i和$R(t)$的比例分别为

$$\psi_{ji}=\psi_{ji}(t),\psi_{j0}=\psi_{j0}(t),$$

收稿日期: 2006−04−12; 收修改稿日期: 2007−09−17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70571086).

X_i用于攻击Y_j和$B(t)$的比例分别为

$$\phi_{ij}=\phi_{ij}(t),\phi_{i0}=\phi_{i0}(t),$$

其中:

$$0\leqslant\phi_{ij}(t)\leqslant 1,0\leqslant\phi_{i0}(t)\leqslant 1,$$
$$0\leqslant\psi_{ji}(t)\leqslant 1,0\leqslant\psi_{j0}(t)\leqslant 1.$$

显然, 有

$$\begin{cases}\phi_{i0}(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}\phi_{ij}(t)\leqslant 1,\\ \psi_{j0}(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}\psi_{ij}(t)\leqslant 1.\end{cases}\tag{1}$$

设双方的初始状态为

$$\begin{cases}x_i(0)=x_{i0},y_j(0)=y_{j0},\\ B(0)=B_0,R(0)=R_0.\end{cases}\tag{2}$$

双方交战的兰彻斯特方程[1~4]为

$$\begin{cases}\dot{x}_i=-\alpha[\sum\limits_{j=1}^{n}f_{ji}(B(t))y_j(t)\psi_{ji}(t)\cdot\\ \quad(1+\lambda_{yji}y_j(t))]+\sum\limits_{j=1}^{n}u_{xji}(t),\\ \dot{R}=-\alpha[\sum\limits_{j=1}^{n}a_jy_j(t)(1+\lambda_{yj0}y_j(t))]+\\ \quad\sum\limits_{j=1}^{n}u_{xj0}(t),\\ \dot{y}_j=-\alpha[\sum\limits_{i=1}^{m}g_{ij}(R(t))x_i(t)\phi_{ij}(t)\cdot\\ \quad(1+\lambda_{xij}x_i(t))]+\sum\limits_{i=1}^{m}u_{yij}(t),\\ \dot{B}=-\alpha[\sum\limits_{i=1}^{m}b_ix_i(t)(1+\lambda_{xi0}x_i(t))]+\\ \quad\sum\limits_{i=1}^{m}u_{yi0}(t),\end{cases}\tag{3}$$

其中: $\lambda_{yji}=0$和$\lambda_{xij}=0$分别表示蓝方Y_j对红方X_i点射及红方X_i对蓝方Y_j点射; 反之, 即$\lambda_{yji}\neq 0$和$\lambda_{xij}\neq 0$表示双方点射与面射同时进行. 类似地, 可解释 λ_{yj0} 与 λ_{xi0} 取值的含义. $u_{xji}(t),u_{xj0}(t),u_{yij}(t)$和$u_{yi0}(t)$分别表示相应作战单元的增援兵力. 当$\lambda_{yji}\neq 0$与$\lambda_{xij}\neq 0$时, 若$\alpha=1$(或2), 则表示式(3)中的方程是由兰彻斯特线性律(或平方律)导出的. 而当$\lambda_{yji}=0$与$\lambda_{xij}=0$时, 若$\alpha=1/2$(或1), 则表示式(3)中的方程是由兰彻斯特线性律(或平方律)导出的. 尽管两种情况都是由兰彻斯特线性律或平方律导出的,但含义却有很大的不同.

根据假定条件③, 在时刻T之前, 红、蓝双方的各类作战单元都没有被全部消灭, 这样就产生了一个如何比较各类作战单元的作战效果的问题. 解决这个问题比较直接的方法就是利用“相对作战指数[1]”. 因此, 假定通过一些现有的分析方法, 可以获得红、蓝双方作战单位的“相对作战指数”h_i和l_j. 于是, 双方的作战实力就可表示为

$$\begin{cases}X(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}h_ig_{ij}(R(t))x_i(t),\\ Y(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}l_if_{ji}(B(t))y_j(t).\end{cases}\tag{4}$$

令$W(t)=X(t)-Y(t)=\Gamma(\Phi(t),\Psi(t))$, 于是, 红方应力求在时刻$T$使$W(t)$尽可能大, 而蓝方应力求尽可能小. 这样, 整个火力分配问题就可转化为一个微分对策问题, 即表示为式(3)在初值条件(2)下求满足条件(1)的红、蓝双方的最优策略$\Phi^*(t),\Psi^*(t)$使得

$$\max_{\Phi}\min_{\Psi}\Gamma(\Phi(t),\Psi(t))=$$
$$\min_{\Psi}\max_{\Phi}\Gamma(\Phi(t),\Psi(t))=\Gamma(\Phi^*(t),\Psi^*(t)),\tag{5}$$

其含意为“尽可能保存自己实力, 同时最大可能地消灭敌人”. 当初值确定后, 状态轨线$X_i=x_i(t),B=B(t),Y_j=y_j(t)$和$R=R(t)$就由对抗双方的策略 $\Phi_i=\Phi_i(t)$与$\Psi_j=\Psi_j(t)$所确定, 因此目标函数$W(t)$就间接地由$\Phi_i(t)$与$\Psi_i(t)$确定. $x_i^*(t),R^*(t),y_j^*(t)$ 和 $B^*(t)$ 就是当对抗双方选取各自最优策略$\Phi_j^*(t)$与$\Psi_j^*(t)$时的状态轨线. 根据假定条件③, 可以保证在交战过程中能始终保持$x_i(t),R(t),y_j(t)$与$B(t)$为正数.

3 最优火力分配策略求解方法(Solving method of optimization firepower-assignment strategies)

假定$\lambda_{yji}=0$与$\lambda_{xij}=0$, 即各作战单元只进行点射; 取$\alpha=0$, 即表示式(3)是由兰彻斯特平方律导出的, 则相应的哈密顿函数可写为

$$\begin{aligned}&H(z,\lambda,\mu,\Phi,\Psi,t)=\\ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_j(t)[-f_{ji}(B(t))y_j(t)\psi_{ji}(t)-u_{xji}(t)]+\\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_0(t)[-a_jy_j(t)\psi_{j0}(t)-u_{xj0}(t)]+\\ &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_i(t)[-g_{ij}(R(t))x_i(t)\phi_{ij}(t)-u_{yij}(t)]+\\ &\sum_{i=1}^{m}\mu_0(t)[-b_ix_i(t)\phi_{i0}(t)-u_{yi0}(t)].\end{aligned}$$

于是, 根据微分对策理论[5], 问题(5)有最优策略$\Phi_i=\Phi_i^*(t)$和$\Psi_j=\Psi_j^*(t)$及相应的状态轨线$x_i=x_i^*(t),y_j=y_j^*(t)$的必要条件是存在相应的伴随函数$(\lambda^*(t),\mu^*(t))$使之满足式(1)(2)及式(6)(7), 即

$$\begin{cases}\dot\lambda_j(t)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t)\phi_{ij}(t)g_{ij}(R(t))+\mu_0(t)b_i\phi_{i0}(t),\\ \dot\lambda_0(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_i(t)\phi_{ij}(t)x_i(t)g'_{ij}(R(t)),\\ \dot\mu_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\psi_{ji}(t)f_{ji}(B(t))+\lambda_0(t)a_j\psi_{j0}(t),\\ \dot\mu_0(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_j(t)\psi_{ji}(t)y_j(t)f'_{ji}(B(t)),\end{cases} \tag{6}$$

以及

$$\begin{cases}\lambda_j(T)=\sum_{i=1}^{m}h_i g_{ij}(R(T)),\\ \lambda_0(T)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}h_i x_i g'_{ij}(R(T)),\\ \mu_i(T)=\sum_{j=1}^{n}l_j f_{ji}(B(T)),\\ \mu_0(T)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}l_j y_j(T)f'_{ji}(B(T)).\end{cases} \tag{7}$$

并对于每一时间$t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}&H(z^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),\Phi^*(t),\Psi^*(t),t)=\\&\max_{\Phi}\min_{\Psi}H(z^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),\Phi(t),\Psi(t),t)=\\&\min_{\Psi}\max_{\Phi}H(z^*(t),\lambda^*(t),\mu^*(t),\Phi(t),\Psi(t),t).\end{aligned} \tag{8}$$

要直接求出满足式(6)(7)(8)的一组最优解λ^*, μ^*,Φ^*和Ψ^*是相当困难的, 但是通过逐步分析可找到最优解的一些特性. 首先, 由式(7)可知$\lambda_j^*(T)>0$, $\lambda_0^*(T)>0$, $\mu_i^*(T)>0,\mu_0^*(T)>0$. 同时, 对任意时刻$t$, 增加$x_i(t)$ 或$R(t)$ 必然导致目标函数W的增加, 从而由伴随函数的定义[5]可知$\lambda_j^*(t)>0$, $\lambda_0^*(t)>0$ $(t\in[0,T])$. 同理, 由于$y_j(t)$或$B(t)$ 的增加将导致目标函数W的减小, 因而$\mu_i^*(t)<0,\mu_0^*(t)<0$. 对任意$t\in[0,T]$, 总有$\lambda_j^*(t)>0$ $\lambda_0^*(t)>0$, $\mu_i^*(t)<0$, $\mu_0^*(t)<0$.

将哈密顿函数变形为

$$\begin{aligned}H=&\\&-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_j(t)u_{xji}(t)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_i(t)u_{yij}(t)-\\&\sum_{i=1}^{m}[\mu_0(t)b_j(t)\phi_{i0}(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_i(t)g_{ij}(R(t))\phi_{ij}(t)]x_i(t)-\\&\sum_{j=1}^{n}[\lambda_0(t)a_i(t)\psi_{j0}(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_j(t)f_{ji}(B(t))\psi_{ji}(t)]y_j(t).\end{aligned}$$

由于$\mu_i(t)$与$\mu_0(t)$均大于零, $x_i(t)$与$R(t)$也大于零, 故由式(8)及条件(1)可知, 红方为使H取得最小值, 必有

$$\sum_{i=1}^{m}\phi_{ij}^*(t)+\phi_{i0}^*(t)=1.$$

同理, 由于$\lambda_j(t)$与$\lambda_0(t)$小于零, $y_j(t)$与$B(t)$大于零, 因此蓝方为使H取得极大值, 必使

$$\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}^*(t)+\psi_{j0}^*(t)=1.$$

从而

$$\lambda_0(t)a_i(t)\psi_{j0}(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_j(t)f_{ji}(B(t))\psi_{ji}(t)$$

就是$\lambda_0(t)a_i(t)$和$\lambda_j(t)f_{ji}(B(t))$的加权平均和;

$$\mu_0(t)b_j(t)\phi_{i0}(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_i(t)g_{ij}(R(t))\phi_{ij}(t)$$

就是$\mu_0(t)b_j(t)$和$\mu_i(t)g_{ij}(R(t))$的加权平均和. 为使加权平均值达到最大, 必定是对其中最大的一项赋权值1, 而对其它各项赋权值0. 因此, 类似于文献[1,5]中的计算, 可以得到上述微分对策模型的最优策略[5](具体过程略).

由于$\lambda_j^*(t)$与$\mu_i^*(t)$在$t\in[0,T]$上连续变化, 同时$f(x)$和$g(x)$也是连续函数, 由此可知$\lambda_j^*(t)$和$\mu_i^*(t)$在$t\in[0,T]$上分段取常值(证明较简单, 类似于文献[5], 略), 从而可得下列结论:

① 作战双方的最优策略都是在一段时间内的每个时刻使各作战单位集中其全部力量攻击对方的作战单位或信息战系统;

② 作战双方的最优火力分配策略在一段时间内保持稳定不变.

4 应用算例及结论(Example and conclusion)

4.1 应用算例(Application example)

红蓝双方编队交战, 红方编队由一艘相对作战指数为10.956的甲型舰艇以及一个性能为$R(t)$的信息战系统R编成, 其中甲对乙和B的作战性能分别为$3.368R(t)$和0.3; 蓝方编队由一艘相对作战指数为5.8267的乙型舰艇以及一个性能为$B(t)$的信息战系统B组成, 其中乙对甲和R的作战性能分别为$3.368B(t)$和0.2. 假定

$$\lambda_{yji}=0,\lambda_{xij}=0,u_{yji}(t)=0,u_{xij}(t)=0,$$

即各作战单元只进行点射; 取$\alpha=1$, 则有当$t\leqslant 1.4265$时,

$$\phi_{10}^*=1,\psi_{10}^*=0,\phi_{11}^*=0,\psi_{11}^*=1;$$

当$1.4265<t\leqslant 2.8836$时,

$$\phi_{10}^*=0,\psi_{10}^*=0,\phi_{11}^*=1,\psi_{11}^*=1;$$

当$2.8836<t\leqslant 5.2031$时,

$$\phi_{10}^*=0,\psi_{10}^*=1,\phi_{11}^*=1,\psi_{11}^*=0;$$

当$5.2031<t\leqslant 10.6773$时,

$$\phi_{10}^*=1,\psi_{10}^*=1,\phi_{11}^*=0,\psi_{11}^*=0.$$

4.2 最优火力分配策略战术思想解释与结论(Tactics explanation and conclusion of optimization firepower-assignment strategies)

前面利用微分对策模型研究了编队火力分配问题, 得到一些有用的结论, 可做如下的战术解释:

① 对有信息战系统协助作战的舰艇编队对抗过程, 交战双方的最优火力分配策略是存在的. 表明在新的战斗环境下指导战斗的战术原则依然存在;

② 在有信息战系统协同作战的战场环境中, 交战双方仍需遵循"集中火力"这一基本战斗原则. 因此, 交战双方的最优策略就是在一个时间段内的每个时刻集中其作战单位的全部力量攻击敌方价值最大的作战单元或信息战系统.

通过上面的分析可见, 由于编队作战具有完全的对抗性, 从而利用微分对策模型研究信息战条件下的编队火力分配问题不仅是可行的, 而且应该是一种解决瞬时对抗冲突态势的比较有效的方法, 所得到的理论结果可进一步论证、揭示了一些高技术条件下新的军事思想与战术原则, 为信息战提供理论参考. 文中对信息战的一些问题描述及参数选定, 比如, 信息战系统性能描述、相对作战指数等做了一些抽象与简化, 虽然有助于所建立的作战模型的求解, 但可能在一定程度上降低了所描述问题的真实性. 如何权衡模型易于求解与结果的真实性将是今后需要进一步研究的工作.

参考文献(References):

[1] 沙基昌. 数理战术学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
(SHA Jichang. *Mathematic Tactics*[M]. Beijing: Science Press, 2003.)

[2] 张最良, 等. 军事运筹学[M]. 北京: 军事科学出版社, 1993.
(ZHANG Zuiliang, et, al. *Military Operational Research*[M]. Beijing: Military Science Press, 1993.)

[3] EKCHIAN L K. An overview of lanchester type combat models for modem warfare[J]. *AD-A-115389*, 1982.

[4] HELMBOLD R L. A modification of lanchester's equations[J]. *Oper Res*, 1975(13): 857 – 859.

[5] 李登峰. 微分对策及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
(LI Dengfeng. *Differential Game and Application*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2000.)

作者简介:

李登峰 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 系副主任, 主要研究方向为决策分析、对策论、微分对策、模糊决策, E-mail: dengfengli@sina.com;

孙 涛 (1977—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为作战指挥决策理论与应用;

王永春 (1975—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为作战指挥决策理论与应用.

(上接第1162页)

参数:

$V_{ij}^{\min}$: 在设备j上执行任务i的最小批量; $V_{ij}^{\max}$; 在设备j上执行任务i的设备最大容量; $ST(s)^{\max}$: 状态s的最大存储容量; ρ_{si}^{p}: 任务i生产状态s的比例系数; ρ_{si}^{c}: 任务i消耗状态s的比例系数, 为负数; α_{ij}: 设备j上任务i处理时间的常数项; β_{ij}: 设备j上任务i处理时间与批量相关的比例系数; U: 调度时间周期上限; price(s): 状态s的价格.

变量:

$wv(i,j,n)$: 在事件点 n 是否在设备 j 上开始任务 i; $B(i,j,n)$: 在事件点n设备j上开始任务i的批量; $d(s,n)$: 在事件点n投放到市场的状态s的量$d(s,n)$: 在事件点n投放到市场的状态s的量; $ST(s,n)$: 事件点n状态s的量; $T_s(i,j,n)$: 事件点n设备j上处理任务i的开始时间; $T_f(i,j,n)$: 事件点n设备j上开始处理任务i的结束时间.

作者简介:

丁 然 (1974—), 女, 山东大学控制科学与工程学院副教授, 博士, 目前研究方向为智能控制理论及应用技术、不确定优化, E-mail: dingrr@sdu.edu.cn;

李歧强 (1964—), 男, 山东大学控制科学与工程学院教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制、生产调度与决策、优化理论;

郭庆强 (1971—), 男, 山东大学控制科学与工程学院副教授, 博士生, 目前研究方向为生产调度、粗集理论、数据挖掘.