文章编号：1000−8152(2009)01−0015−08

具有扰动输入的不确定性非线性系统的输出调节极限性能

吴俊斌，苏为洲
(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 本文研究了一类具有扰动输入的不确定性非线性系统的输出调节问题, 给出了该类系统在最差的不确定性参数和扰动输入情况下系统输出调节的极限性能. 所讨论的非线性系统是可镇定非最小相位系统, 并且该系统的零动态由“鲁棒输入对状态稳定(robust input-to-state stable)部分”和“不稳定但可镇定部分”组成. 假设系统的不确定性参数和扰动输入分别以非线性函数和仿射形式同时出现在系统零动态的鲁棒输入对状态稳定部分和系统的可线性化部分, 而且其可线性化部分的不确定性具有下三角形结构形式. 该系统输出调节问题的性能以其输出信号能量作为度量. 对于上述非线性系统, 在最差的不确定性参数和扰动输入情况下, 输出调节问题的极限性能只取决于镇定其零动态“不稳定部分”所需的最小能量.

关键词: 极限性能; 输出调节; 非线性系统; 非最小相位系统; 零动态
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Performance limits in output regulation of an uncertain nonlinear system under disturbances

WU Jun-bin, SU Wei-zhou
(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The attainable performance of the output regulation is studied for an uncertain nonlinear system under disturbances. The nonlinear system is a stabilizable nonminimum phase system with zero dynamics consisting of a robust input-to-state stable component and an unstable but stabilizable component. It is assumed that the uncertain parameter-vector and disturbances only enter the robust input-to-state stable component of the zero dynamics and the linearizable part of the system. Furthermore, the function of the uncertain parameter-vector forms a lower triangular structure in the linearizable part of the system. The performance of this problem is measured by the energy of the output of the system. It is shown that the attainable performance of output regulation under the worst uncertain parameter-vector and disturbances for the nonlinear system is determined only by the minimum energy required for stabilizing the unstable part of its zero dynamics.

Key words: performance limitations; output regulation; nonlinear systems; nonminimum phase systems; zero dynamics

1 引言(Introduction)

本文讨论了一类具有扰动输入的不确定性非线性系统的输出调节问题, 根据所有可行的控制律, 找出在最差的不确定性参数和扰动输入的情况下该输出调节问题的最优极限性能. 所研究的系统是具有扰动输入的不确定可镇定非最小相位系统:

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x(t),\theta)+g(x(t),\theta)+p(x(t),\theta)d(t), \\ y=h(x(t),\theta), \end{cases} \tag{1}$$

其中: 状态$x(t) \in \mathbb{R}^n$, 控制输入$u(t) \in \mathbb{R}$, 输出$y(t) \in \mathbb{R}$, θ 是属于某紧集Ω 的一个不确定常参数向量, 而输入扰动$d(t) \in \mathbb{R}$. 假设对于任意$\theta \in \Omega$, $f(\cdot,\theta)$, $g(\cdot,\theta)$ 和$p(\cdot,\theta)$ 是C^∞ 向量函数, 而$h(\cdot,\theta)$ 是足够光滑的函数, 并且对于任意$\theta \in \Omega$ 有$f(0,\theta)=0$ 和$h(0,\theta)=0$. 此外, $f(x,\theta)$, $g(x,\theta)$, $p(x,\theta)$ 和$h(x,\theta)$ 关于θ 连续. 系统(1)中的扰动输入属于L_2 空间, 即扰动输入信号的能量有界:

$$\int_0^\infty |d(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \delta,$$

其中δ 是有限正实数.

根据非线性系统的几何理论, 在一定的条件下[1], 非线性系统(1) 可以变形为如下的正则型:

收稿日期: 2007−04−03; 收修改稿日期: 2008−04−14.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60834003, 60774057, 60474028); 广东省自然科学基金资助项目(5006529).

$$
\begin{aligned}
&\dot{z} = f_0(z,\theta) + g_0(z,\xi_1,\theta) + q_0(z,\xi_1,\theta)d(t),\\
&\dot{\xi}_1 = \xi_2 + d_1(z,\xi_1,\theta) + p_1(z,\xi_1,\theta)d(t),\\
&\quad \vdots\\
&\dot{\xi}_{r-1} = \xi_r + d_{r-1}(z,\xi_1,\cdots,\xi_{r-1},\theta)+\\
&\qquad p_{r-1}(z,\xi_1,\cdots,\xi_{r-1},\theta)d(t),\\
&\dot{\xi}_r = a(z,\xi_1,\cdots,\xi_r)u + d_r(z,\xi_1,\cdots,\xi_r,\theta)+\\
&\qquad p_r(z,\xi_1,\cdots,\xi_r,\theta)d(t),\\
&y = \xi_1,
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中: r是系统(1)的相对阶阶数, $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\mathrm{col}(\xi_1, \cdots, \xi_r) \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}$; 对于任意$\theta \in \Omega$ 有$f_0(\cdot,\theta)$, $g_0(\cdot,\theta)$ 和$q_0(\cdot,\theta)$ 均为C^∞ 向量函数, 并且$d_i(0,\theta) = 0$, $i = 1,\cdots,r$; 对于$\mathrm{col}(z,\xi_1,\cdots,\xi_r) \in \mathbb{R}^n$, 函数$a(z,\xi_1,\cdots,\xi_r) \neq 0$; 对于任意$\theta \in \Omega$, $a(\cdot)$, $d_1(\cdot,\theta),\cdots,d_r(\cdot,\theta)$ 和$p_1(\cdot,\theta),\cdots,p_r(\cdot,\theta)$是足够光滑的向量函数.

上述非线性系统输出信号平方的积分作为其输出调节性能的度量, 即:

$$
J = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^2(t)\mathrm{d}t. \tag{3}
$$

本文的目标是针对以上系统, 从所有可能的控制律当中, 找出在最差的不确定性参数和扰动输入情况下系统所能达到的最优极限性能. 在文中, 证明了当不确定性参数和扰动输入只出现在系统零动态鲁棒输入对状态稳定部分和系统的可线性化部分时, 该极限性能只取决于镇定其零动态中不稳定部分所需的最小能量. 该结果是文献 [2]中结果的一类非线性形式. 文献 [3,4]均在系统不存在扰动输入和不确定性的假设下, 分别对线性系统和非线性系统讨论了上述极限性能. 当系统的初始状态为零时, 本文的结果归结为文献 [5]中所得到的几乎完全扰动抑制(almost disturbance rejection)结论.

自 20 世纪 40 年代 Bode 提出了关于伯德积分(Bode integrals)的结论开始, 反馈控制的极限性能问题就被广泛地研究和讨论. 在这领域里, 其中一个主要研究方向就是寻求基于二次型性能指标的反馈控制问题的性能极限. Kwakernaak与Sivan[6], 以及Francis[7]提出对于线性二次最优控制, 右可逆最小相位(right-invertible minimum phase)系统可以达到完全调节(即性能函数趋向于零), 但对于一般的非最小相位系统来说, 该结论不成立. 在跟踪问题方面, 文献 [8～12] 均讨论了线性系统的性能极限问题. 当系统存在某种扰动输入时, Davison和Scherzinger在文献 [13]中提出右可逆最小相位系统同样可以达到完全跟踪/扰动抑制, 但该结果对一般的非最小相位系统是不成立的. 文献 [2]针对该问题给出了一个更为一般的结论. 尽管现有的大部分研究工作都把注意力集中在线性系统, 但在非线性系统方面也得出了一些令人惊喜的结果. M.M.Seron于1999年在文献 [4]中对非线性系统的性能极限问题提出了一个开创性的结果: 在一定条件下, 非线性系统输出调节问题的最优极限性能只取决于镇定系统零动态所需的最小能量. 另外, 文献 [5]对关于非线性系统扰动抑制问题的最优性能问题给出了非常重要的结果.

文章中使用的符号是通用符号标准. 实数空间的欧几里德向量范数和实函数空间L_2 内的范数分别表示为$\|\cdot\|$ 和$\|\cdot\|_2$. 对于空间L_2 内的函数$f(t)$, 其范数定义如下:

$$
\|f(t)\|_2 = \left\{\int_0^\infty f^2(t)\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.
$$

2 问题描述(Problem statement)

系统(2)的输出调节问题是指设计一个控制器使其相应的闭环系统是稳定的并且输出信号渐近趋于零. 该问题的性能由输出信号的能量(3)来度量. 记U为所有可以镇定系统(2)的控制律的u集合. 本文的目标是在U 中寻求一个最优控制律, 使得系统(2)在最差的不确定性参数和扰动输入作用下, 其相应的性能函数可达到最小值J_{opt}, 即:

$$
J_{\mathrm{opt}} := \inf_{u\in U} \sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2 \leqslant \delta \\ \theta \in \Omega}} J. \tag{4}
$$

为了解决上述问题, 本文对非线性系统(2)作如下假设:

假设 1 非线性系统(2)的零动态可以被分解为“稳定部分”和“不稳定但可镇定部分”(下文简称“不稳定部分”), 其中“不稳定但可镇定部分”不受扰动输入和不确定性参数的影响, 即：

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = f_1(z_1,z_2,\theta) + g_1(z_1,z_2,\theta)\xi_1+\\
\qquad q_1(z_1,z_2,\xi_1,\theta)d(t),\\
\dot{z}_2 = f_2(z_2) + g_2(z_2)\xi_1,
\end{cases} \tag{5}
$$

其中: z_1是“稳定部分”的状态, z_2是“不稳定但可镇定部分”的状态.

假设 2 存在一个光滑的正定函数$V_1(z_1)$和正实数α_1,γ_1, 满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial z_1}[f_1(z_1,z_2,\theta) + g_1(z_1,z_2,\theta)\xi_1 +\\
&q_1(z_1,z_2,\xi_1,\theta)d] \leqslant\\
&-\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 + \gamma_1^2 d^2 + \gamma_1^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \gamma_1^2\xi^2.
\end{aligned} \tag{6}
$$

假设 3 对于给定的常数γ_1和ϵ_1, $\epsilon_2 \in [0,\bar{\epsilon}]$, 其中$\bar{\epsilon}$ 是一给定任意小正实数, 存在一个正定函数$V_2(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ 满足下面汉密顿–雅可比–贝尔曼方

程(HJBE):

$$\frac{\partial V_2}{\partial z_2}f_2(z_2)-\frac{1}{2}\frac{1}{2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1}\frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2(z_2)g_2^{\mathrm{T}}(z_2)\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_2}{\partial z_2}+\left(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\epsilon_2^2\right)z_2^{\mathrm{T}}z_2=0, \tag{7}$$

并且存在状态反馈控制律

$$\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2):=-\frac{1}{2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1}g_2^{\mathrm{T}}(z_2)\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_2}{\partial z_2}, \tag{8}$$

使得子系统

$$\dot{z}_2=f_2(z_2)+g_2(z_2)\xi_1 \tag{9}$$

在控制律$\xi_1=\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ 作用下达到全局渐近稳定.

注 1　假设2意味着零动态"稳定部分"是鲁棒输入对状态稳定(robust input-to-state stable). 尽管这里假设变量在零动态"稳定部分"中是仿射的, 但对于一般的结构, 本文的结论同样是成立的. 另外, 由假设1和3可知, 对于子系统(9)即零动态"不稳定部分", 状态反馈控制律(8)使得下面性能函数取得最小值(见文献 [4,15]):

$$J^0(\epsilon_1,\epsilon_2)=\int_0^\infty[(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\epsilon_2^2)z_2^{\mathrm{T}}z_2+(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\frac{1}{2})\xi_1^2]\mathrm{d}t,$$

并且其最小值$J^0_{\min}(\epsilon_1,\epsilon_2)$为

$$J^0_{\min}(\epsilon_1,\epsilon_2)=V_2\left[z_2(0),\epsilon_1,\epsilon_2\right].$$

当$\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$ 时, $J^0=\frac{1}{2}\int_0^\infty\xi_1^2\mathrm{d}t$. 注意到此时的性能函数$J^0$ 表示子系统(9)中控制信号的能量, 而相应的最优控制器为$\xi_1=\alpha_0(z_2,0,0)$. 由于这个控制器使得J^0 达到最优, 所以J^0 的最优值为子系统(9)的控制信号ξ_1 驱使该子系统从初始状态$z_2(0)$ 回到零点所需的最小能量, 亦即

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}J^0_{\min}=\inf_{\epsilon_1,\epsilon_2}\frac{1}{2}\int_0^\infty\xi_1^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t. \tag{10}$$

3　主要结果(Main result)

在本节里, 将详细讨论具有扰动输入的不确定性非线性系统(2)的极限性能问题, 并给出主要结论. 为讨论方便, 假设所讨论的系统(2)的相对阶阶数为1, 即$r=1$.

记U为所有可以镇定系统(2)的控制律u的集合. 由系统(2)的结构和假设1可知, 对于任一可以镇定系统(2)的输入控制信号$u\in U$所产生的输出y, 亦即ξ_1, 必定可以镇定零动态(5)"不稳定部分". 若把ξ_1看作零动态(5)的虚拟控制输入则可得

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty y^2\mathrm{d}t=\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\int_0^\infty[(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\epsilon_2^2)z_2^{\mathrm{T}}z_2+(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\frac{1}{2})\xi_1^2]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t.$$

同时, $\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t$是虚拟控制输入$\xi_1$镇定零动态(5)"不稳定部分"所需的最小能量, 故任意一个由控制器$u\in U$所产生的ξ_1(或y)都满足下列关系式:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\xi_1^2\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t,$$

于是, 可得出下列引理:

引理 1　对于任意稳定系统(2)的控制输入$u\in U$, 公式(3)中定义的性能函数J必定满足下列关系:

$$J\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t. \tag{11}$$

注 2　引理1说明了$\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t$ 是性能函数J的一个下界, 将证明J 的下确界为$\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,0,0)\mathrm{d}t$.

记$\zeta=\xi_1-\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$, 则输出$y$可被分解为$\zeta$与$\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$之和, 所以性能函数(3)可被改写为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty\zeta^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\infty\zeta\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\mathrm{d}t. \tag{12}$$

下面证明存在一组控制器$\hat{U}\in U$, 有下列性质:

$$\inf_{\hat{u}\in\hat{U}}\|\zeta\|_2=\inf_{\hat{u}\in\hat{U}}\|\xi_1-\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\|_2=0.$$

于是根据等式(12)可以推知

$$\inf_{\hat{u}\in\hat{U}}J(\hat{u})=\frac{1}{2}\int_0^\infty\alpha_0^2(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\mathrm{d}t,$$

其中$J(\hat{u})$是系统(2)在控制器$\hat{u}$作用下性能函数J的值.

根据假设1和3, $\zeta=\xi_1-\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$和$r=1$, 将系统(2)表示为:

$$\begin{cases}\dot{z}_1=f_1(z_1,z_2,\theta)+g_1(z_1,z_2,\theta)\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)+\\ \qquad g_1(z_1,z_2,\theta)\zeta+\tilde{q}_1(z_1,z_2,\zeta,\theta)d,\\ \dot{z}_2=f_2(z_2)+g_2(z_2)\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)+g_2(z_2)\zeta,\\ \dot{\zeta}=\tilde{d}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta)+\tilde{a}(\zeta,z_1,z_2)u+\\ \qquad \tilde{p}_1(z_1,z_2,\zeta,\theta)d,\end{cases} \tag{13}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\tilde{q}_1(z_1,z_2,\zeta,\theta)=q_1[z_1,z_2,\zeta+\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2),\theta],\\&\tilde{p}_1(z_1,z_2,\zeta,\theta)=p_1[z_1,z_2,\zeta+\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2),\theta],\\&\tilde{d}_1(z_1,z_2,\zeta,\theta)=d_1[\zeta+\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2),z_1,z_2,\theta]-\\&\qquad\qquad\dot{\alpha}(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2),\\&\tilde{a}_1(z_1,z_2,\zeta)=p_1[\zeta+\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2),z_1,z_2].\end{aligned}$$

首先, 考虑一个较为简单的情形—系统(13)的零

动态只存在"不稳定部分", 即

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = f_2(z_2) + g_2(z_2)\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) + g_2(z_2)\zeta, \\ \dot{\zeta} = \tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) + \tilde{a}(\zeta, z_2)u + \tilde{p}_1(z_2, \zeta, \theta)d. \end{cases} \tag{14}$$

选取正定函数

$$W_2(\zeta, z_2) = V_2(z_2, 0, \epsilon_2) + \frac{1}{2}\zeta^2$$

作为系统(14)的候选李雅普诺夫函数, 其中函数$V_2(z_2, 0, \epsilon_2)$. 因为系统(14)不包含z_1-子系统, 所以假设3中的参数ϵ_1 设为零, 函数$V_2(z_2, 0, \epsilon_2)$满足等式(7). 沿着系统(14)的轨迹, 对$W_2(\zeta, z_2)$进行求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 = & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2}[f_2(z_2) + g_2(z_2)\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) + \\ & g_2(z_2)\zeta] + \zeta[\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) + \tilde{a}(\zeta, z_2)u + \\ & \tilde{p}_1(z_2, \zeta, \theta)d]. \end{aligned}$$

根据假设3, 上式可以变形为

$$\begin{aligned} \dot{W}_2 = & -\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 - \frac{1}{2}\alpha_0^2(z_2, 0, \epsilon_2) + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2)\zeta + \zeta\tilde{a}(\zeta, z_2)u + \\ & \zeta\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) + \zeta\tilde{p}_1(z_2, \zeta, \theta)d. \end{aligned}$$

为了观察不确定性参数θ和扰动输入$d(t)$对系统输出y的影响, 根据$\xi_1 = \zeta + \alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2)$, $y = \xi_1$和上式, 得到:

$$\begin{aligned} & \dot{W}_2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{2}d^2 = \\ & -\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \zeta[\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) + \frac{1}{2}\zeta + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2) + \tilde{a}(\zeta, z_2)u] + \\ & \zeta\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) + \zeta\tilde{p}_1(z_2, \zeta, \theta)d - \frac{\gamma^2}{2}d^2, \end{aligned} \tag{15}$$

其中γ为任意给定的常数.

从假设3可以知道, $\alpha_0(z_2, \epsilon_1, \epsilon_2)$是镇定零动态"不稳定部分"的状态反馈控制器, 因此当$z_2 = 0$时, 必然存在$\alpha_0(0, 0, \epsilon_2) = 0$. 于是当$z_2 = 0$, $\xi_1 = 0$时, 容易推得$\zeta = 0$.

更进一步, 当$z_2 = 0$和$\xi_1 = 0$时, 对于任意的$\theta \in \Omega$, $\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) = 0$. 这意味着存在函数$\hat{d}_{12}(\zeta, z_2, \theta)$, $\hat{d}_{13}(\zeta, z_2, \theta)$使得:

$$\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) = z_2^{\mathrm{T}}\hat{d}_{12}(\zeta, z_2, \theta) + \zeta\hat{d}_{13}(\zeta, z_2, \theta).$$

于是, 根据三角不等式, 可以轻易推知

$$\zeta\tilde{d}_1(\zeta, z_2, \theta) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon_2^2\|z_2\|^2 + [\frac{1}{2\epsilon_2^2}\|\hat{d}_{12}\|^2 + \hat{d}_{13}]\zeta^2, \tag{16}$$

而且注意到θ属于已知紧集Ω, 所以存在有界函数$\delta_d(\zeta, z_2, \epsilon_2)$和$\delta_{p_1}(\zeta, z_2, \epsilon_2)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon_2^2}\|\hat{d}_{12}\|^2 + \hat{d}_{13} \leqslant \delta_d, \ \forall\theta \in \Omega, \\ \|\tilde{p}_1\| \leqslant \delta_{p_1}, \qquad \forall\theta \in \Omega, \end{cases} \tag{17}$$

把不等式(16)(17)代入等式(15), 有

$$\begin{aligned} & \dot{W}_2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{2}d^2 \leqslant \\ & -\frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \zeta[\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) + \frac{1}{2}\zeta + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2) + \tilde{a}(\zeta, z_2)u + \delta_d(\zeta, z_2, \epsilon_2)\zeta] + \\ & |\zeta\delta_{p_1}(\zeta, z_2, \epsilon_2)d| - \frac{\gamma^2}{2}d^2. \end{aligned}$$

选取控制器为:

$$u = \hat{u}_2,$$

这里$\hat{u}_2$为

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 = & -\frac{1}{\tilde{a}(\zeta, z_2)}[\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) + (k + \frac{1}{2} + \delta_d)\zeta + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2) + \frac{1}{2\gamma^2}\zeta\delta_{p_1}^2], \end{aligned}$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} & \dot{W}_2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{2}d^2 \leqslant \\ & -\frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 - k\zeta^2 - \frac{1}{2}[\frac{1}{\gamma}|\zeta\delta_{p_1}| - \gamma|d|]^2, \end{aligned}$$

进一步整理可得

$$\dot{W}_2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{2}d^2 \leqslant -\frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 - k\zeta^2. \tag{18}$$

不等式(18)表明该闭环系统是输入对状态稳定的. 由此可知, $W_2[z_2(\infty), \zeta(\infty)] = 0$. 对不等式(18)两边同时进行积分, 整理可得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [\frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + k\zeta^2 + \frac{1}{2}y^2]\mathrm{d}t \leqslant \\ & W_2[z_2(0), \zeta(0)] + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^\infty d^2\mathrm{d}t = \\ & V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] + \frac{1}{2}\zeta^2(0) + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^\infty d^2\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由上式可以推知

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2 \leqslant \delta \\ \theta \in \Omega}} \|\zeta\|_2^2 \leqslant \\ & \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\{V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] + \\ & \frac{1}{2}\zeta^2(0) + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^\infty d^2(t)\mathrm{d}t\} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

记所有$\hat{u}_2$的集合为$\hat{U}$, 即

$$\hat{U} = \{\hat{u}_2 : k > 0\}.$$

不等式(19)意味着在控制器$\hat{u}_2$的作用下, 对任意$d(t) \in \Omega$有:

$$\inf_{\hat{u} \in \hat{U}} \|\zeta\|_2 = \lim_{k \to \infty} \|\zeta\|_2 = 0.$$

根据等式(12), 并注意到文献 [14],

$$\left| \int_0^\infty \zeta \alpha_0(z_2, \epsilon_1, \epsilon_2) \mathrm{d}t \right| \leqslant \|\zeta\|_2 \|\alpha_0\|_2,$$

进一步可知在控制器$\hat{u}_2$的作用下, 当$k \to \infty$时, 系统的性能函数J满足

$$\lim_{k \to \infty} J(\hat{u}_2) = \frac{1}{2} \|\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2)\|_2^2, \tag{20}$$

由引理1和等式(20), 可以进一步推知系统(14)的性能函数最优值满足

$$J_{\mathrm{opt}} = \lim_{\substack{k \to \infty \\ \epsilon_2 \to 0}} J(\hat{u}_2) = \frac{1}{2} \|\alpha_0(z_2, 0, 0)\|_2^2.$$

于是, 得到下面引理:

引理 2　对系统(14)来说, 渐近稳定其零动态的最小控制能量$\frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha_0^2(z_2, 0, 0)\mathrm{d}t$ 是该系统性能函数J的下确界, 即

$$J_{\mathrm{opt}} = \inf_{u \in U} \sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2 \leqslant \delta \\ \theta \in \Omega}} J = \frac{1}{2} \|\alpha_0(z_2, 0, 0)\|_2.$$

为了能够获得范数$\frac{1}{2}\|\alpha_0(z_2, 0, 0)\|_2$、函数$V_2$以及初始状态$z_2(0)$三者之间的具体关系, 考虑在控制器$\hat{u}_2$的作用下, 函数$V_2(z_2, 0, \epsilon_2)$沿着系统(14)轨迹的导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z_2) = & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} [f_2(z_2) + g_2(z_2)\alpha_0] + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2)\zeta. \end{aligned} \tag{21}$$

把式(7)代入到等式(21)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z_2) = & -\frac{1}{2}\alpha_0^2(z_2, 0, \epsilon_2) - \epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \\ & \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2)\zeta. \end{aligned} \tag{22}$$

对等式(22)两边进行积分, 并注意到$V_2[z_2(\infty), 0, \epsilon_2] = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & -V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] = \\ & -\frac{1}{2}\|\alpha_0\|_2^2 - \epsilon_2^2 \|z_2\|_2^2 + \int_0^\infty \frac{\partial V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2} g_2(z_2)\zeta \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{23}$$

由于

$$\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2) = -g_2^{\mathrm{T}}(z_2) \frac{\partial^{\mathrm{T}} V_2(z_2, 0, \epsilon_2)}{\partial z_2},$$

等式(23)可以被整理为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\alpha_0\|_2^2 + \epsilon_2^2 \|z_2\|_2^2 = \\ & V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] - \int_0^\infty \alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2)\zeta \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

根据三角不等式, 由上式可以推导出

$$V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] - \|\alpha_0\|_2 \|\zeta\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\alpha_0\|_2^2 + \epsilon_2^2 \|z_2\|_2^2,$$

以及

$$\frac{1}{2}\|\alpha_0\|_2^2 + \epsilon_2^2 \|z_2\|_2^2 \leqslant V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2] + \|\alpha_0\|_2 \|\zeta\|_2.$$

因为在控制器$\hat{u}_2$的作用下, $\|\zeta\|_2 \to 0$, 所以得到

$$\frac{1}{2}\|\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2)\|_2^2 + \epsilon_2^2 \|z_2\|_2^2 = V_2[z_2(0), 0, \epsilon_2],$$

当$\epsilon_2 \to 0$时, 可进一步得到

$$\lim_{\epsilon_2 \to 0} \frac{1}{2}\|\alpha_0(z_2, 0, \epsilon_2)\|_2^2 = V_2[z_2(0), 0, 0]. \tag{24}$$

综合等式(24)和引理2, 可知

$$J_{\mathrm{opt}} = \inf_{u \in U} \sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2 \leqslant \delta \\ \theta \in \Omega}} \frac{1}{2}\|y\|_2^2 = V_2[z_2(0), 0, 0].$$

下面, 把上述讨论所得的结果扩展至更为一般的系统(2).

定理 1　假设系统(2)满足假设1∼3, 并且相对阶为1. 那么, 在最差的不确定性参数和扰动输入情况下, 系统(2)的最优极限性能为在初始状态$z_2(0)$的作用下, 镇定其零动态“不稳定但可镇定部分”所需的最小能量, 即

$$J_{\mathrm{opt}} = V_2[z_2(0), 0, 0].$$

证　选取正定函数

$$W_1(\zeta, z) = \epsilon_1^2 V_1(z_1) + V_2(z_2, \epsilon_1, \epsilon_2) + \frac{1}{2}\zeta^2 \tag{25}$$

作为系统(13)一个候选李雅普诺夫函数.

沿着系统(13)的轨迹, 对函数$W_1(\zeta, z)$两边进行求导, 可得

$$\begin{aligned} & \dot{W}_1 = \\ & \epsilon_1^2 \frac{\partial V_1}{\partial z_1}[f_1(z_1, z_2, \theta) + g_1(z_1, z_2, \theta)\alpha_0(z_2, \epsilon_1, \epsilon_2) + \\ & g_1(z_1, z_2, \theta)\zeta + \tilde{q}_1(z_1, z_2, \zeta, \theta)d] + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}[f_2(z_2) + \\ & g_2(z_2)\alpha_0(z_2, \epsilon_1, \epsilon_2) + g_2(z_2)\zeta] + \zeta\dot{\zeta}, \end{aligned}$$

由假设2, 得到

$$\dot{W}_1 \leqslant -\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 + \epsilon_1^2\gamma_1^2 d^2 + \epsilon_1^2\gamma_1^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \epsilon_1^2\gamma_1^2\xi_1^2 + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}[f_2(z_2) + g_2(z_2)\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2) + g_2(z_2)\zeta] + \zeta\dot{\zeta}. \tag{26}$$

根据不等式(26)和$\zeta = \xi_1 - \alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$以及$y = \xi_1$, 考虑$y$和$d(t)$的耗散不等式

$$\dot{W}_1 + \frac{1}{2}y^2 - (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})d^2 \leqslant -\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 + \epsilon_1^2\gamma_1^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + \epsilon_1^2\gamma_1^2(\zeta+\alpha_0)^2 + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}f_2(z_2) + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2(z_2)\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2) + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2(z_2)\zeta + \zeta\dot{\zeta} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{2}d^2, \tag{27}$$

其中γ为任意给定常数. 把假设3中的等式(7)(8)代入到上述不等式(27), 整理可得

$$\dot{W}_1 + \frac{1}{2}y^2 - (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})d^2 \leqslant -\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 - \epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + [\frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2 + (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{1}{2})\zeta + (2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1)\alpha_0 + \tilde{a}u]\zeta + \tilde{d}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta)\zeta + \tilde{p}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta)d\zeta - \frac{\gamma^2}{2}d^2. \tag{28}$$

根据假设1~3和非线性系统(2)的结构与特性, 可以推知当$z_1 = 0$, $z_2 = 0$和$\xi_1 = 0$时, 对于任意的$\theta \in \Omega$, $\tilde{d}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta) = 0$.

这意味着存在函数$\bar{d}_{11}(\zeta,z_1,z_2,\theta)$, $\bar{d}_{12}(\zeta,z_1,z_2,\theta)$和$\bar{d}_{13}(\zeta,z_1,z_2,\theta)$, 满足

$$\tilde{d}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta) = z_1^{\mathrm{T}}\bar{d}_{11}(\zeta,z_1,z_2,\theta) + z_2^{\mathrm{T}}\bar{d}_{12}(\zeta,z_1,z_2,\theta) + \zeta\bar{d}_{13}(\zeta,z_1,z_2,\theta).$$

由三角不等式, 可以推导出

$$\zeta\tilde{d}_1(\zeta,z_1,z_2,\theta) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon_1^2\alpha_1^2\|z_1\|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_2^2\|z_2\|^2 + (\frac{1}{2\epsilon_1^2\alpha_1^2}\|\bar{d}_{11}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2^2}\|\bar{d}_{12}\|^2 + \bar{d}_{13})\zeta^2. \tag{29}$$

因为θ属于一个已知的紧集Ω, 所以存在有界函数$\tilde{\delta}_d(\zeta,z_1,z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$ 和$\tilde{\delta}_{p_1}(\zeta,z_1,z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)$满足

$$\begin{cases}\frac{1}{2\epsilon_1^2\alpha_1^2}\|\bar{d}_{11}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2^2}\|\bar{d}_{12}\|^2 + \bar{d}_{13} \leqslant \tilde{\delta}_d, \forall\theta\in\Omega, \\ \|\tilde{p}_1\| \leqslant \tilde{\delta}_{p_1}, \qquad \forall\theta\in\Omega.\end{cases} \tag{30}$$

把不等式(29)(30)代入不等式(28), 整理后可得:

$$\dot{W}_1 + \frac{1}{2}y^2 - (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})d^2 \leqslant -\frac{1}{2}\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + [\frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2 + (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{1}{2})\zeta + (2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1)\alpha_0 + \tilde{a}u + \tilde{\delta}_d\zeta]\zeta + |\zeta\tilde{\delta}_{p_1}d| - \frac{\gamma^2}{2}d^2,$$

再由三角不等式, 上式可以归结为

$$\dot{W}_1 + \frac{1}{2}y^2 - (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})d^2 \leqslant -\frac{1}{2}\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 + [\frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2 + (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{1}{2})\zeta + (2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1)\alpha_0 + \tilde{a}u + \tilde{\delta}_d\zeta + \frac{1}{2\gamma^2}\zeta\tilde{\delta}_{p_1}^2]\zeta.$$

选取控制器为

$$u = \hat{u}_1 := -\frac{1}{\tilde{a}}[\frac{\partial V_2}{\partial z_2}g_2 + (2\epsilon_1^2\gamma_1^2+1)\alpha_0 + (k + \epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{1}{2} + \tilde{\delta}_d + \frac{1}{2\gamma^2}\tilde{\delta}_{p_1}^2)\zeta],$$

则在上述控制器的作用下, 有

$$\dot{W}_1 + \frac{1}{2}y^2 - (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})d^2 \leqslant -\frac{1}{2}\epsilon_1^2\alpha_1^2 z_1^{\mathrm{T}} z_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2^2 z_2^{\mathrm{T}} z_2 - k\zeta^2. \tag{31}$$

由此可知, 闭环系统是输入对状态稳定的. 对不等式(31)两边同时积分, 可以得到

$$W_1[z(\infty),\zeta(\infty)] + \int_0^\infty(k\zeta^2 + \frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}t \leqslant W_1[z(0),\zeta(0)] + (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})\int_0^\infty d^2(t)\mathrm{d}t.$$

综上所述, 由于$d(t) \in \mathrm{L}_2$并且所得闭环系统是输入对状态稳定的, 得到

$$W_1[z(\infty),\zeta(\infty)] \to 0$$

和

$$k\int_0^\infty \zeta^2\mathrm{d}t \leqslant W_1[z(0),\zeta(0)] + (\epsilon_1^2\gamma_1^2 + \frac{\gamma^2}{2})\int_0^\infty d^2(t)\mathrm{d}t. \tag{32}$$

由不等式(32), 可以得知: 在控制器$\hat{u}_1$的作用下, 下面结果成立

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2\leqslant\delta \\ \theta\in\Omega}}\int_0^\infty \zeta^2\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\{W_1[z(0),\zeta(0)]+(\epsilon_1^2\gamma_1^2+\frac{\gamma^2}{2})\int_0^\infty d^2(t)\mathrm{d}t\}=0.$$

同时考虑等式(12)可以知道

$$\lim_{k\to\infty}J(\hat{u}_1)=\frac{1}{2}\|\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\|_2^2.$$

最后, 综合上式、等式(24)、引理1, 得到

$$\lim_{u\in U}\sup_{\substack{\|d(t)\|_2^2\leqslant\delta\\ \theta\in\Omega}}\frac{1}{2}\|y\|_2^2=\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\frac{1}{2}\|\alpha_0(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)\|_2^2=V_2[z(0),0,0].$$

证毕.

注 3　定理1可以很容易地推广到系统的相对阶大于1的情况, 由于篇幅限制, 故略去.

4 数值仿真(Simulation)

在本节里, 将通过一个例子来验证本文的结论. 假设系统模型如下:

$$\begin{cases}\dot{z}_1=[-z_1-0.1z_1\sin^2 z_1+\xi_1+d(t)](1+\theta^2),\\ \dot{z}_2=z_2^3+\xi_1,\\ \dot{\xi}_1=u+6(z_1^5+z_2^5)\sin\theta+(2+\theta^2)d(t),\\ y=\xi_1\end{cases}\tag{33}$$

其中: 初始状态为$z_1(0)=2$, $z_2(0)=2$, $\xi(0)=0$. $d(t)$是属于L_2空间的扰动输入, 并假设$d(t)=10\sin(20\pi t)\mathrm{e}^{-0.5t}$; θ为不确定参数并在$[-0.5, 0.5]$中变化, 这里假设θ是一周期为1 s, 峰值为±0.5的锯齿信号.

对于系统(33), 选择下列候选李雅普诺夫函数:

$$W_1(\zeta,z)=\epsilon_1^2V_1(z_1)+V_2(z_2,\epsilon_1,\epsilon_2)+\frac{1}{2}\zeta^2.$$

进一步, 选择$V_1(z_1)=\frac{1}{2}z_1^2$, 可以验证系统(33)满足假设2:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z_1}[f_1(z_1,z_2,\theta)+g_1(z_1,z_2,\theta)\xi_1+q_1(z_1,z_2,\xi_1,\theta)d]\leqslant-\alpha_1^2z_1^2+\gamma_1^2\xi_1^2+\gamma_1d^2(t),$$

故可知$\alpha_1^2=1$, $\gamma_1^2=2$.

对应于系统(33), 假设3中的汉密顿–雅科比–贝尔曼方程(7)为

$$\frac{\partial V_2}{\partial z_2}z_2^3-\frac{1}{2}\frac{1}{4\epsilon_1^2+1}(\frac{\partial V_2}{\partial z_2})^2+(2\epsilon_1^2+\epsilon_2^2)z_2^2=0,$$

由此, 可以解得

$$\alpha_0=-z_2^3-z_2S,\tag{34}$$

其中

$$S=\sqrt{z_2^4+\frac{4\epsilon_1^2+2\epsilon_2^2}{4\epsilon_1^2+1}}.$$

控制器u为

$$u=-[k+2\epsilon_1^2+\frac{1}{2}+\tilde{\delta}_d+\frac{9}{2\gamma}](\xi_1-\alpha_0),$$

其中

$$\tilde{\delta}_d=\frac{18}{\epsilon_1^2}z_1^8+\frac{1}{2\epsilon_2^2}[6z_2^4-S(3z_2^2+S+\frac{2z_2^4}{S})]^2+3z_2^2+S+\frac{2z_2^4}{S}.$$

取不同γ, k, ϵ_1, ϵ_2, 得到系统仿真结果如图1和2所示.

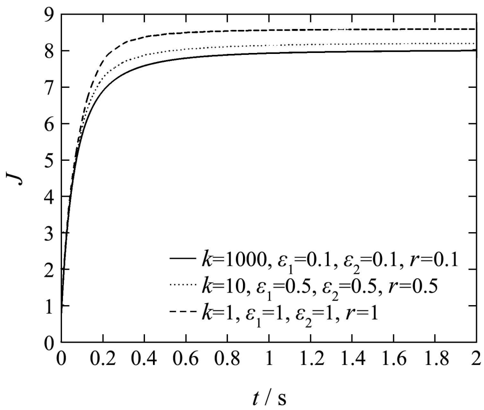

图 1　在控制率u作用下系统(33)的性能函数J

Fig. 1　Cost function J for the system (33) with the control law u

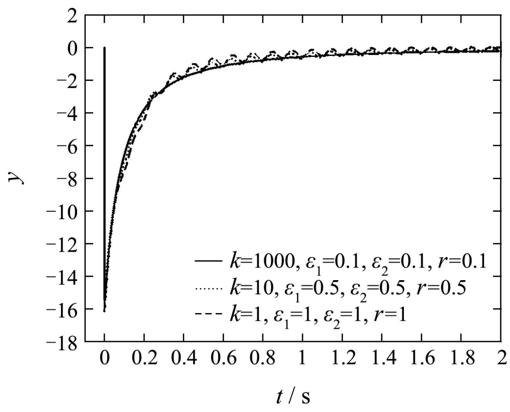

图 2　在控制率u作用下系统(33)的输出信号y

Fig. 2　Output y of the system (33) with the control law u

由图1可以得知, 随着$k\to\infty$和$\epsilon_1,\epsilon_2,\gamma\to 0$, 性能函数$J$随着时间的推移, 逐步趋近其极限值8. 根

据等式(24)可知

$$V_2[z_2(0),0,0]=\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\frac{1}{2}\int_0^\infty \alpha_0^2\mathrm{d}t,$$

由此, 仿真结果与定理1相符.

5 总结(Conclusion)

在本文中, 研究了一类具有扰动输入的不确定性非线性系统的极限性能问题. 对于本文所涉及的非线性系统, 其扰动输入和不确定性参数只出现在系统零动态的"稳定部分". 发现在最差的不确定性参数和扰动输入情况下, 输出调节器的最优性能极限等于镇定系统零动态"稳定部分"所需的最小能量. 对于扰动输入和不确定性参数均出现在系统零动态"稳定部分" 和"不稳定部分"的情形, 其性能极限问题是一个极富挑战性的问题, 乃至线性系统, 该问题也没有被解答. 这个问题值得广大研究人员进行大量的深入研究和讨论.

参考文献(References):

[1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. 3rd ed. London, UK: Springer-Verlag, 1995.

[2] SU W, QIU L, PETERSEN I. Tracking performance limitation under disturbance and uncertainity[C] // *Proceedings of IFAC World Congress*. Prague: Czech Republic, 2005.

[3] QIU L, CHEN J. Time domain characteriza- tions of performance limitations of feedback control[M] // *Learning, Control and Hybrid Systems*, London: Springer- Verlag, 1999: 397 – 415.

[4] SERON M M, BRASLAVSKY J H, KOKOTOVIC P, et al. Feedback limitations in nonlinear systems: from Bode integrals to cheap control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 829 – 833.

[5] ALBERTO I, SCHWARTZ B, TARN T J. Semiglobal L_2 Performance Bounds for Distur- bance Attenuation in Nonlinear Systems[J]. *IEEE Transactions on Automatatic Control*, 1999, 44(8): 1535 – 1545.

[6] KWAKERNAAK H, SIVAN R. *Linear Optimal Control Systems*[M]. New York: Wiley-Interscience, 1972.

[7] FRANCIS B A. The optimal linear-quadratic time-invariant regulator with cheap control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, (8): 616 – 621.

[8] MORARI M, ZAFIRIOU E. *Robust Process Control*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

[9] QIU L, DAVISON E J. Performance limitations of nonminimum phase systems in the servomech- anism problem[J]. *Automatica*, 1993, 29(4): 337 – 349.

[10] SU W, QIU L, CHEN J. Fundamental performance limitations in tracking sinusoidal signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1371 – 1380.

[11] SU W, QIU L, CHEN J. Performance limitations of discrete-time systems in tracking sinusoidal signals[C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. USA: Denver Colorado, 2003: 423 – 428.

[12] SU W, QIU L, CHEN J. Performance limitation in tracking sinusoids[C] // *Proceedings 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC'05*. Seville Spain: [s.n.], 2005: 6204 – 6209.

[13] DAVISON E J, SCHERZINGER B M. Perfect control of the robust servomechanism problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(8): 689 – 702.

[14] RUDIN W. *Real and Complex Analysis*[M]. 3rd ed. New York, USA: McGraw-Hill, 1987.

[15] SEPULCHRE R, JANKOVOC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Control*[M]. New York: Springer, 1997.

作者简介:

吴俊斌 (1981—), 男, 2007年毕业于华南理工大学自动化学院, E-mail: rayben_wu@126.com;

苏为洲 (1962—), 男, 2000年毕业于澳大利亚纽卡色大学, 获博士学位, 现为华南理工大学自动化学院教授, 博士生导师, 目前研究方向包括网络控制、反馈系统性能极限、鲁棒与最优控制、信道盲辨识, E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.