

采样粒子群优化模型及其动力学行为分析

冯远静¹, 俞立¹, 冯祖仁²

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032;

2. 西安交通大学 系统工程研究所 制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘要: 本文提出一种变采样周期的粒子群优化模型, 利用误差动力系统的李雅普诺夫函数分析优化行为的稳定性. 通过粒子的轨迹分析, 得出轨迹收敛的采样时间约束条件. 算法收敛性理论分析结果表明该算法不能收敛到局部最优. 针对多模态函数优化问题, 提出一种基于量子群的变采样周期的粒子群优化模型. 实验分析了采样周期对算法优化行为的影响. 结果表明其相对于传统粒子群算法的优势. 最后对基于量子群的采样粒子群优化算法的多极值寻优能力进行测试, 结果表明其有效性.

关键词: 粒子群算法; 采样周期; 稳定性; 收敛性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sample particle swarm optimization and its dynamic behavior

FENG Yuan-jing¹, YU Li¹, FENG Zu-ren²

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China;

2. Systems Engineering Institute, SKLMS Laboratory, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: A new sample particle swarm optimization model (SPSO) with variable sample time is proposed. The stability of the optimization behavior is analyzed by applying Lyapunov function to the error dynamic system. The further analysis of particle trajectory gives the bound of sample time. The convergence theory shows that SPSO is not a local optimizer. For multimode function optimization, a quantum SPSO(Q-SPSO) is provided to deal with multiple local optima. The experiment with different sample time investigates the influence on optimization behavior, demonstrating the advantages of SPSO. The tests of Q-SPSO on multimode optimization function show the efficacy of the algorithm.

Key words: particle swarm optimization; sample time; stable analysis; convergence

1 引言(Introduction)

粒子群优化算法^[1]是模拟生物群体(鸟群等)行为的一种优化算法, 通过粒子之间的合作与竞争产生趋向于优值的集群行为, 是群体智能研究领域中的一个热点^[2].

对于 D 维复杂搜索空间, 标准PSO算法的 $n(n \geq 2)$ 个粒子的质点动力学表示为

$$\begin{cases} v_{id}^{k+1} = w \cdot v_{id}^k + c_1 \cdot r_{i1} \cdot (p_{gd}^k - x_{id}^k) + \\ \quad c_2 \cdot r_{i2} \cdot (p_{id}^k - x_{id}^k), \\ x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1}, d = i, \dots, D, i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

式中: v_{id} 是粒子速度向量; x_{id} 是粒子的位置向量; p_{id} 为个体位置最优值; p_{gd} 为群体位置最优值;

c_1, c_2 为加速因子; w 为惯性因子; $r_{i1}, r_{i2} \in [0, 1]$ 为服从统一分布的随机数.

尽管标准PSO已经在诸多领域得到成功的应用^[3,4], 但是还存在很多需要改进的地方^[5]. 从式(1)可以看出, PSO算法粒子的更新都是以一定的时间间隔. 从控制系统的角度看, 它是一个离散系统. 从生物系统的角度看, 生物群体的运动是连续的. 也就是说, 个体的运动不可能是以固定间隔时间跳跃的, 而是连续光滑的. 受这种事实的启发, 连续时间的粒子群算法可能会提高离散PSO算法的优化性能. 考虑到连续系统在实际应用中需要数字化(采样), 本文提出一种采样粒子群优化新模型.

2 采样粒子群优化模型(Sample particle swarm optimization, SPSO)

2.1 离散PSO算法描述(Description of discrete PSO)

为了便于统一描述, 传统PSO算法的描述如下: 考虑最小化优化问题

$$\min f(y), y \in \mathbb{R}^D, \quad (2)$$

其中: D 是优化问题的维数, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^D$ 是优化问题的可行域, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是需要最小化的目标函数值. 设群体规模为 n , 不失一般性, PSO算法可以重新写为

$$\begin{cases} v_{id}^{k+1} = \alpha v_{id}^k + \beta(p_{id}^k - x_{id}^k) + \gamma(p_{gd}^k - x_{id}^k), \\ x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1}, d = i, \dots, D, i = 1, \dots, n, \\ p_{id}^{k+1} = \frac{1}{2}[x_{id}^{k+1} + p_{id}^k] + \frac{1}{2}[x_{id}^{k+1} - p_{id}^k] \cdot \zeta, \\ p_{gd}^k = p_{jd}^k, j = \arg \min_{0 < i \leq n} \{f(p_{id}^k)\}, \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \zeta &= \text{sgn}(f(p_{id}^k) - f(x_{id}^{k+1})), \\ \text{sgn}(x) &= \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 SPSO模型的建立(Construction of SPSO)

要建立采样粒子群优化模型, 首先将式(3)前两方程扩展为如下的群体动力系统

$$\begin{cases} v_{id}((k+1)T) = \alpha v_{id}(kT) + \frac{1}{M_i} u^i(kT)T, \\ x_{id}((k+1)T) = x_{id}(kT) + v_{id}(kT)T, \end{cases} \quad (4)$$

其中: x_{id} 为个体位置, v_{id} 为个体速度, T 为采样时间, M_i 为个体质量, u^i 为个体控制输入, $u^i(kT) = M_i \beta(p_{id}^k - x_{id}^k) + \gamma(p_{gd}^k - x_{id}^k)$.

为书写方便, 在下文, 令“ kT ”为 $t \in \mathbb{R}^+$.

由上面分析知, 系统的状态变量除了 x_i, v_i 外, p_{id} 起优解“记忆”的作用. 在离散PSO算法中, 由式(3)第3个方程可以看出 p_{id} 的变化是通过两个离散状态实现的. 这里通过如下方式近似 p_{id} 的连续变化.

$$p_{id}(t+1) = p_{id}(t) + T \cdot a \cdot (x_i(t) - p_{id}(t))(1 + \delta), \quad (5)$$

其中: $a > 0$ 为常数, $\delta = \text{sgn}(f(p_{id}^t) - f(x_{id}^t))$.

在式(5)中, 考虑如下情况:

1) 当 $f(p_{id}(t)) - f(x_i(t)) \geq 0$ 时, $\delta = 1$, 此时, $p_{id}(t+1) = p_{id}(t) + 2Ta(x_i(t) - p_{id}(t))$. 即当前点目标函数值小于个体最优值时, 个体最优值往当前点移动. 特殊情况, 当 $T = 1, a = 0.5$ 时, $p_{id}(t+1) = x_i(t)$.

2) 当 $f(p_{id}(t)) - f(x_i(t)) < 0$ 时, $\delta = -1$, 此时, $p_{id}(t+1) = p_{id}(t)$. 即当前点目标函数值大于个体最优值时, 个体最优值保持不变. p_{gd} 仅仅影响系统的平衡点, 可以看作系统的设定点.

这样就将由式(3)描述的标准PSO算法拓展为式(4)和(5)描述的采样PSO算法.

2.3 误差动力学系统和控制输入(Error dynamic system and control input)

为了分析算法的稳定性, 需要分析个体对群体最优值 p_{gd} 的聚集性能 $e_p^i(t)$ 、个体的速度趋同性能 $e_v^i(t)$ 和个体优值对 p_{gd} 的聚集性能 $e_d^i(t)$, 考虑如下误差系统:

$$\begin{cases} e_p^i(t) = x_i(t) - p_{gd}(t), \\ e_v^i(t) = v_i(t) - v_{gd}(t), \\ e_d^i(t) = p_{id}(t) - p_{gd}(t). \end{cases} \quad (6)$$

假设 1 在采样时间 T 内, 群体最优解 p_{gd} 保持不变或者变化极小, 即 $v_{gd}(t) = p_{gd}(t+1) - p_{gd}(t) \cong 0$.

在假设1下, 系统的误差动力学可以表示为

$$\begin{cases} e_p^i(t+1) = e_p^i(t) + T e_v^i(t), \\ e_v^i(t+1) = \alpha e_v^i(t) + \beta T e_d^i(t) - (\gamma + \beta) T e_p^i(t), \\ e_d^i(t+1) = \varphi T e_p^i(t) + (1 - \varphi T) e_d^i(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\varphi = a(1 + \delta)$.

将式(7)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} e_p^i \\ e_d^i \\ e_v^i \end{bmatrix}^{t+1} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & T \\ \varphi T & 1 - \varphi T & 0 \\ -\beta T - \gamma T & \beta T & \alpha \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} e_p^i \\ e_d^i \\ e_v^i \end{bmatrix}^t, \quad (8)$$

定义 $E^i = [e_p^i, e_d^i, e_v^i]^T$, 则第 i 个粒子的误差动力学可以描述为

$$E^i(t+1) = A E^i(t). \quad (9)$$

3 SPSO模型稳定性分析(Stable analysis of SPSO)

3.1 SPSO误差系统稳定性分析(Stable analysis of the error dynamic system)

在本节中, 通过李雅普诺夫函数分析粒子群算法的稳定性, 得出算法稳定的条件. 首先给出系统稳定的假设条件.

假设 2 令 $e_i^i = e_p^i - e_d^i$, 假设

$$e_p^i(t) = \frac{de_p^i(t)}{dt} \approx \frac{e_p^i(t+1) - e_p^i(t)}{T},$$

$$\begin{aligned}\dot{e}_v^i(t) &= \frac{de_v^i(t)}{dt} \approx \frac{e_v^i(t+1) - e_v^i(t)}{T}, \\ \dot{e}_l^i(t) &= \frac{de_l^i(t)}{dt} \approx \frac{e_l^i(t+1) - e_l^i(t)}{T}.\end{aligned}$$

定理 1 考虑误差系统(9), 如果满足假设1和假设2, 系统在 $\alpha < 1, \beta, \gamma > 0$ 下一致稳定.

证 为了研究误差系统的稳定性, 构造每个个体的李雅普诺夫函数为

$$V_i(t) = \frac{1}{2}(\gamma e_p^{i\top}(t)e_p^i(t) + e_v^{i\top}(t)e_v^i(t) + \beta e_l^{i\top}(t)e_l^i(t)), \quad (10)$$

则:

$$\dot{V}_i(t) = \gamma e_p^{i\top}(t)\dot{e}_p^i(t) + e_v^{i\top}(t)\dot{e}_v^i(t) + \beta e_l^{i\top}(t)\dot{e}_l^i(t). \quad (11)$$

由 $V(t) = \sum_i^n V_i(t)$ 及假设2得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{V}_i(t) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n (\gamma e_p^{i\top}(t)(e_p^i(t+1) - e_p^i(t)) + \beta e_l^{i\top}(t)(e_l^i(t+1) - e_l^i(t)) + \\ &+ e_v^{i\top}(t)(e_v^i(t+1) - e_v^i(t))) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n ((\alpha - 1)e_v^{i\top}(t)e_v^i(t) - \varphi_i \beta T e_l^{i\top}(t)e_l^i(t)), \quad (12)\end{aligned}$$

在上式中, φ_i 的取值为“0”或“2a”. 因此, 当 $\alpha < 1$ 时, $\dot{V}(t) < 0$, 即定理得证. 证毕.

从定理1可以看出, 算法稳定的一个重要条件是系统采样时间要满足假设1和假设2. 从假设1和假设2中只能知道采样时间要足够小, 但是不能确定具体的范围. 下面将进一步分析粒子轨迹收敛的采样时间的约束条件.

3.2 粒子轨迹收敛性分析(Convergence analysis of particle locus)

由式(4)(5)得:

$$x_i(t+1) = a_1 x_i(t) + a_2 x_i(t-1) + a_3, \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 + \alpha, \\ a_2 &= -(\alpha + \beta T^2 + \gamma T^2), \\ a_3 &= \beta T^2 p_i(t-1) + \gamma T^2 p_g(t-1).\end{aligned}$$

式(13)的齐次矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x_i(t+1) \\ x_i(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_1 \ a_2 \ a_3}^B \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i(t-1) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

系数矩阵的特征多项式为

$$(1-\lambda)((\alpha + \beta T^2 + \gamma T^2) - \lambda(1+\alpha) + \lambda^2) = 0, \quad (15)$$

该特征多项式的3个特征值分别为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4(\alpha + \beta T^2 + \gamma T^2)}}{2}.\end{aligned}$$

定理 2 采样粒子优化模型的粒子轨迹收敛的采样时间满足条件

$$0 < T < \sqrt{\frac{1-\alpha}{\beta+\gamma}}. \quad (16)$$

证 由式(14)所示, 系统收敛的条件是系数矩阵 $|B| < 1$, 即其特征值 $\max\{\|\lambda_{2,3}\|\} < 1$.

由 $\|\lambda_{2,3}\| < 1$ 整理得 $0 < T < \sqrt{\frac{1-\alpha}{\beta+\gamma}}$. 证毕.

定理1和定理2保证了算法的稳定性和粒子轨迹的收敛性. 但是并不能说明算法能收敛到局部最优或全局最优. 下面将进一步分析算法的收敛性及其改进策略.

4 SPSO收敛性分析(Convergence of SPSO)

4.1 随机搜索算法的收敛性条件(Convergence conditions of stochastic optimization)

Solis和Wets^[6]研究了随机优化算法的随机逼近问题, 给出了随机优化算法是局部最优还是全局优化的条件. 本文利用其结果研究采样粒子群算法的收敛性特性. 为方便起见, 先给出随机优化算法局部收敛和全局收敛的相关定义与引理如下^[6]:

定义 1 给定函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^n$, 点 $z \in S$ 使 f 最小, 可以定义为 $\inf_{z \in S} f$.

条件 1 $f(G(z, \xi)) \leq f(z)$, 且if $\xi \in S$, then $f(G(z, \xi)) \leq f(\xi)$, 其中 G 是产生问题解的函数.

上述条件意味着随机优化算法新产生的解不差于当前解.

定义 2 令 $\psi = \inf\{t : v[z \in S | f(z) < t] > 0\}$, 其中 $v[A]$ 是集合 A 的Lebesgue测度. 最优区域 R_ϵ 可以定义为 $R_\epsilon = \{z \in S | f(z) < \psi + \epsilon\}$, 其中 $\epsilon > 0$.

条件 2 给定任意 $z_0 \in S$, 存在常数 $\theta > 0$ 和 $0 < \mu \leq 1$, 对于任意 k , 使得:

$$\begin{aligned}\eta_k [(\text{dist}(G(z, \xi), R_\epsilon) < \text{dist}(z, R_\epsilon) - \theta), \\ \text{或者 } (G(z, \xi) \in R_\epsilon)] \geq \mu,\end{aligned} \quad (17)$$

其中 z 包含于紧集 $L_0 = \{z \in S | f(z) \leq f(z_0)\}$, $\text{dist}(z, A) = \inf_{b \in A} \text{dist}(z, b)$ 表示点 z 到集合 A 的距离.

条件3 对于 S 的子集 A , 满足 $v[A] > 0$, 有

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \eta_k[A]) = 0, \quad (18)$$

其中 $\eta_k[A]$ 表示 A 被产生的概率为 η_k .

条件2和条件3分别给出了算法局部最优和全局最优的条件, 于是有如下引理^[6]:

引理1 假设 f 是可测函数, S 是 \mathbb{R}^n 上的可测子集, 且满足条件1和条件2. 令 $\{z_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 为算法产生的解序列. 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P[z_k \in R_\varepsilon] = 1, \quad (19)$$

其中 $P[z_k \in R_\varepsilon]$ 是 z_k 属于局部最优区域 R_ε 的概率.

引理2 假设 f 是可测函数, S 是 \mathbb{R}^n 上的可测子集, 且满足条件1和条件3. 令 $\{z_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 为算法产生的解序列. 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P[z_k \in R_\varepsilon] = 1, \quad (20)$$

其中 $P[z_k \in R_\varepsilon]$ 是 z_k 属于全局最优区域 R_ε 的概率.

4.2 收敛性分析(Convergence analysis)

由式(13), 可以将 x_i^{t+1} 写为:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= g(x_i^t, x_i^{t-1}) = \\ &g_1(x_i^t, x_i^{t-1}) + g_2(x_i^{t-1}) + g_3(x_i^{t-1}), \end{aligned} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned} g_1(x_i^t, x_i^{t-1}) &= (1 + \alpha)x_i^t - \alpha x_i^{t-1}, \\ g_2(x_i^{t-1}) &= \beta T^2(p_g^{t-1} - x_i^{t-1}), \\ g_3(x_i^{t-1}) &= \gamma T^2(p_i^{t-1} - x_i^{t-1}). \end{aligned}$$

引理3 对于SPSO算法, $\alpha < 1, \beta, \gamma > 0$, 则存在值 $1 \leq N < \infty$ 使得 $\|g_2(x_i(t-1))\| < \varepsilon, \|g_3(x_i(t-1))\| < \varepsilon, \forall t > N, \varepsilon > 0$.

证 由定理1得证.

证毕.

定理3 SPSO算法不满足条件2, 无法保证收敛到局部极值.

证 对于SPSO, 从式(4)和(5)可以看出, 条件1中的函数 D 可以定义为

$$G(p_{gd}^t, x_i^t) = \begin{cases} p_{gd}^t, & f(x_i^{t+1}) \geq f(p_{gd}^t), \\ x_i^{t+1}, & f(x_i^{t+1}) < f(p_{gd}^t). \end{cases} \quad (22)$$

显然, 式(21)满足条件1. 由 $\beta = c_1 \cdot r_1, \gamma = c_2 \cdot r_2$, 且 $r_1, r_2 \in [0, 1]$ 为服从统一分布的随机数, 可以知道 $0 \leq \beta \leq c_1, 0 \leq \gamma \leq c_2$. 从式(21)可以看

出, x_i^{t+1} 的搜索域的变化决定于 g_2 和 g_3 . 而 g_2 和 g_3 是与 βT^2 和 γT^2 参数有关的超立方体. 由引理3, 当 $x_i^t = p_i^t = p_g^t$ 时, x_i^{t+1} 的搜索域趋向于零. 也就是说, 在找到最优解前, 从最优区域附近产生解的概率趋近于零. 这明显不符合条件2. 因此无法保证算法收敛到局部极值.

证毕.

4.3 量子群SPSO算法(Q-SPSO)(Quanta SPSO algorithm)

由上面分析可以看出, 当 $x_i = p_i = p_g$ 时, 算法的速度更新仅仅依赖于 $\alpha v_{i,j}(t)$. 因为 $\alpha < 1$, 当 $v_{i,j}(t)$ 接近0的时候, 粒子将靠近不是局部极值点的 p_g^t 而停止运动. 这也是算法不能收敛到局部极值点的原因. 为了解决算法的这种问题, BerghF^[5]提出了通过改变最优粒子位置更新方式为:

$$x_{\tau,j}^{t+1} = p_{g,j}^t + \alpha v_{\tau,j}^t + \rho(t)(1 - 2r_3(t)), \quad (23)$$

其中: $\rho(t) > 0$ 为时变常数, $r_3(t) \in [0, 1]$ 为随机数. 并证明了该更新方式的SPSO算法(Local SPSO, LSPSO)满足条件1和条件2, 是局部最优算法而不是全局最优算法, 参见文献[5]. 为了使SPSO算法具有全局寻优能力, 最简单的办法就是使其满足条件3. 可以通过为群体增加随机粒子来实现. 文献[5]提出了一种Multi-start PSO算法, 迭代若干次后, 保留粒子群的历史最优位置, 粒子全部重新初始化, 以扩大搜索空间, 保证收敛到全局最优. 但是这种方式完全改变了粒子之间的结构关系, 使收敛速度降低. 本文将根据粒子特性的不同进行分群, 对不同特性的粒子采用不同的位置更新策略, 使算法既具有多极值寻优能力, 又能保证算法较快的收敛. 首先给出关于量子群模型的定义.

定义3 量子群模型^[7], 粒子群由“中性粒子”和“量子粒子”组成. 粒子 s 到中心粒子 p 的距离 $d(s, p) \leq R_1$ 的粒子为量子粒子; 粒子 s 到中心粒子 p 的距离 $R_1 < d(s, p) \leq R_2$ 的粒子为中性粒子.

基于上述定义, 首先将群体分成多个量子群. 量子群的划分根据如下方式: 在每一次迭代过程中, 对每个个体的适应度从好到差进行排序存储在 L_s . 根据适应度和位置关系将粒子分群, 算法如图1所示. 对于不同的粒子采用不同的更新策略, 算法如图2所示. 由于增加了随机粒子, 采样空间扩大到整个搜索空间, 算法满足条件3^[7].

- 1) 开始
- 2) $S = \Phi, i = 0$
- 3) While L_s 没有划分完毕do
 - 1° 在 L_s 选择最优个体作为中心粒子 $p, i = i + 1$
 - 2° $L_s \leftarrow L_s \setminus p, S \leftarrow S \cup p, Q_{i1} \leftarrow \{p\}$
 - 3° for $s \in L_s$
 - 4° If $d(p, s) \leq r$ then
 - 5° $L_s \leftarrow L_s \setminus s, Q_{i1} \leftarrow Q_{i1} \cup s$ //量子粒子
 - 6° Else if $d(p, s) \leq R$
 - 7° $L_s \leftarrow L_s \setminus s, Q_{i2} \leftarrow Q_{i2} \cup s$ //中性粒子
- 4) 结束.

图1 粒子分群算法

Fig. 1 Particles partition algorithm

- 1) 初始化个体位置
- 2) Repeat
 - 1° 评价个体的适应度函数并进行排序;
 - 2° 根据图1所示算法将群体分为多个量子群;
 - 3° 对于中性粒子, 其更新策略根据式(23);
 - 4° 对于量子粒子, 围绕本身的中心粒子作为 p_g 按式(4)进行更新; 并每隔迭代次数 t_{num} , 保留种子粒子, 其它粒子随机更新;
- 3) 直到算法终止准则满足.

图2 量子群SPSO算法

Fig. 2 Quanta SPSO algorithm

5 实验分析(Experiments analysis)

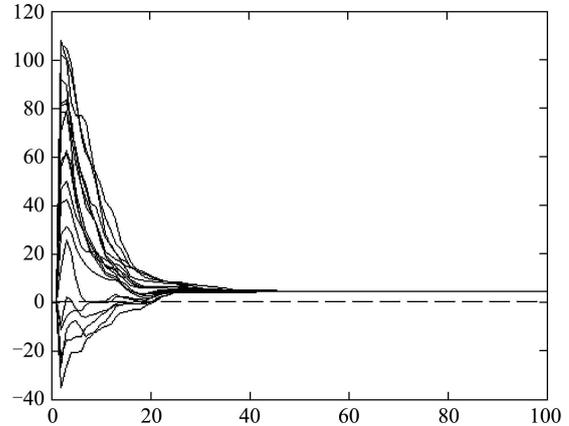
为了验证本文算法, 分别选择单模态、多模态函数进行测试, 测试函数见附录. 本文使用MATLAB实现了上述算法. 每个算例均随机运行20次, 然后平均统计各项优化性能指标: 目标函数评价次数(evals)、平均CPU时间(time)、平均误差(err)以及优化成功率(%). 其中, 在给定的迭代次数内(文中 $num = 10000$), 若搜索最终解与问题最优解之间的关系满足式(24), 则认为算法测试成功.

$$|f^* - f^\alpha| < \varepsilon_1 f^* + \varepsilon_2, \quad (24)$$

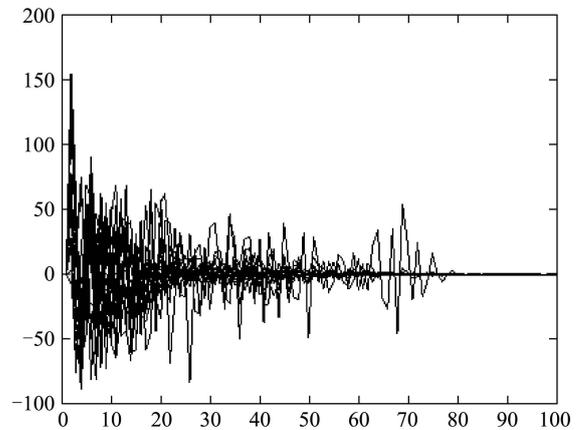
其中: f^* 是目标函数的全局最优解; f^α 是算法搜索解; ε_1 和 ε_2 是给定参数(文中 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$).

首先利用单模态函数DeJong($n = 4$)来分析算法的稳定性和收敛性. 根据定理1和定理2的条件, 选取多组参数进行测试. 图3为在 $n = 20, \alpha = 0.4, c_1 = 2, c_2 = 2$ 情况下, 不同采用时间的系统轨迹图. 从图3可以看出当 $T = 1.4$ 粒子轨迹发散. 同时, 采样时间越小, 系统收敛速度越慢, 同时易陷入“早熟”. 采用时间越大, 系统稳定越慢, 但粒子探索能力较强. 随后, 对LSPSO在 $\alpha = 0.4, c_1 = 2, c_2 = 2$ 参数下, 不同采用周期的稳定和收敛性能进行分析. 图4为LSPSO算法不同采样周期的系统粒子轨迹. 实验结果表明, LSPSO在不同的采样周期下, 都能收敛到局部最优

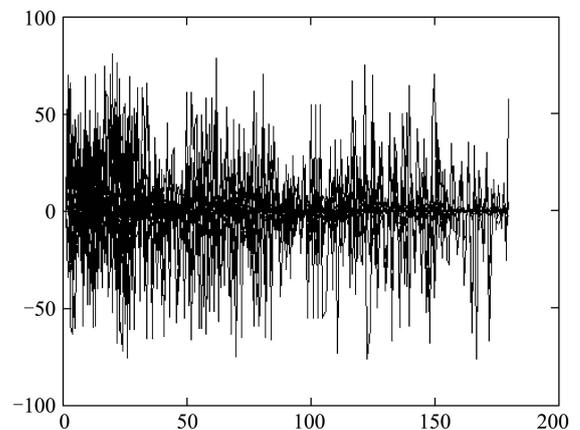
值. 表1为SPSO、LSPSO和PSO在不同参数下的优化性能比较. 从表1可以看出, 采样周期粒子群算法(尤其是LSPSO)相对于传统粒子群算法具有更大的参数稳定性.



(a) $t = 0.4$



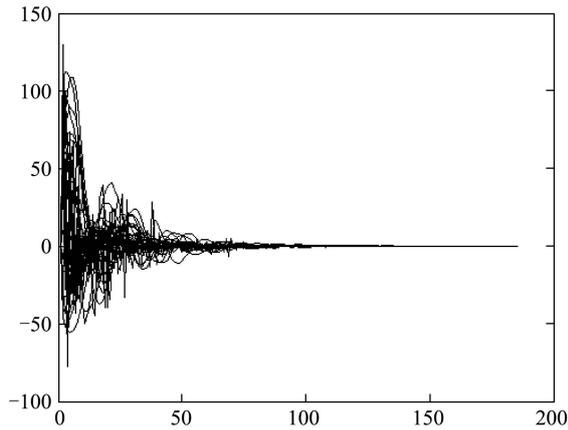
(b) $t = 0.8$



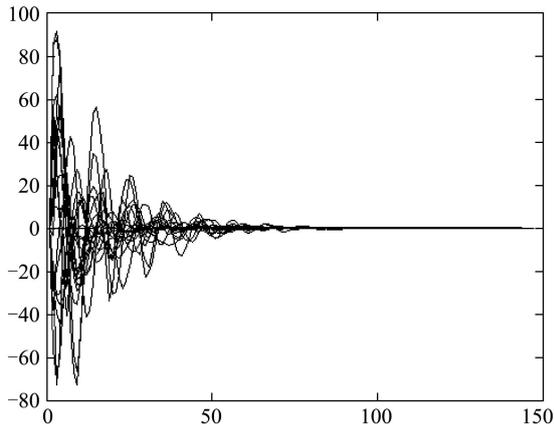
(c) $t = 1.4$

图3 采样时间对系统稳定性的影响

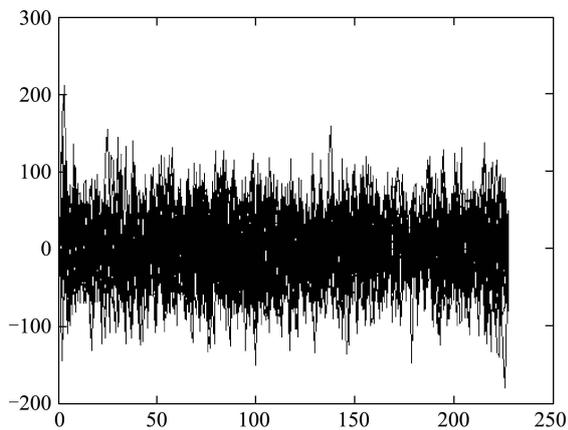
Fig. 3 The influence of sample time on system stabilization



(a) $t = 0.4$



(b) $t = 0.8$



(c) $t = 1.4$

图 4 不同采样时间的系统轨迹

Fig. 4 The system trajectory with difference sample time

最后, 利用多模态函数 f_1 测试Q-SPSO的多极值寻优能力. 图5为测试函数的曲面图, 采用参数 $n = 50, \alpha = 0.4, c_1 = 2, c_2 = 2, R_1 = 0.2, R_2 = 2$. 图6为函数优化过程中的粒子运行轨迹, 从图6中可以看出, 粒子能找到所有的局部极值点(实验的多次运行结果一致).

表 1 收敛性能比较

Table 1 Comparison of convergence performance

参数 系数	SPSO		LSPSO		PSO		
	T	%	Evals	%	Evals	%	Evals
$\alpha=0.4$	0.2	89	25	100	66		
$c_1=2$	0.8	98	33	100	63	96	31
$c_2=2$	1.4	56	600	100	225		
$\alpha=0.6$	0.2	94	34	100	56		
$c_1=1$	0.8	96	43	100	62	23	600
$c_2=1$	1.4	53	215	100	88		

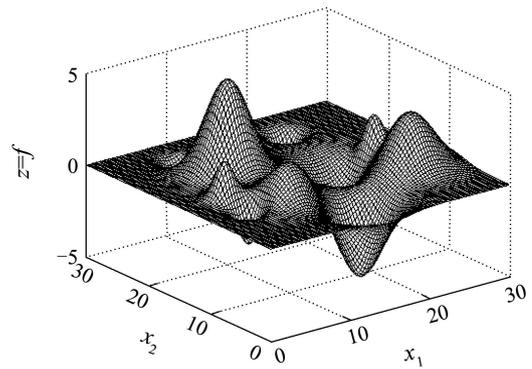


图 5 函数3维曲面

Fig. 5 3-D surface of the optimization function

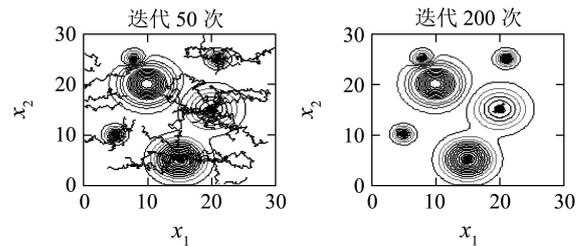


图 6 优化过程粒子轨迹

Fig. 6 Particle trajectory in optimization process

6 结论与展望(Conclusion and prospect)

本文提出一种变采样周期的粒子群优化模型, 显然, 传统的粒子群算法可以看作该模型的一种采样周期形式. 分析结果表明变采样周期粒子群优化算法主要有两点好处, 一是增强算法的参数适应性, 二是可以通过采样周期的改变而改变算法的搜索能力. 本文理论分析了算法的收敛特性, 并给出了改进策略. 最后通过实验验证了算法的有效性. 论文从动力系统的角度分析算法的稳定性, 将目标函数优值点对粒子的吸引看作系统的控制输入, 因此可以从控制输入控制粒子的集群运动, 从而引导算法的寻优. 作者认为, 将来可以从两方面改善算法的优化性能: 第一, 通过结合采用周期结合粒子之间的一个吸引-排斥函数防止算法早熟; 第二, 将目标函数作为一种场景环境加入到控制输入更好起到启发作用.

参考文献(References):

- [1] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle swarm optimization[C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*. New York: IEEE Press, 1995: 1042 – 1048.
- [2] KENNEDY J, EBERHART R C, SHI Y. *Swarm Intelligence*[M]. San Francisco: Morgan Kaufman Publishers, 2001.
- [3] HUI P, LING W, BO L. Particle swarm optimization for function optimization in noisy environment[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 181(2): 908 – 919.
- [4] VISAKAN K, KIRUSNAPILLAI S. Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(3): 245 – 255.
- [5] VAN DEN BERGH F B. *An analysis of particle swarm optimizers*[D]. SouthAfrica: University of Pre toria, 2002.
- [6] SOLIS F, WETS R. Minimization by random search techniques[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1981, 6(1): 19 – 30.
- [7] PARROTT D, LI X. Locating and tracking multiple dynamic optima by a particle swarm model using speciation[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(4): 440 – 458.

附录 测试函数(Appendix Test functions)

I) *DeJong*(n):

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

II) f_1

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) = & 5e^{-0.1(x_1-10)^2+(x_2-20)^2} - \\ & 2e^{-0.08(x_1-20)^2+(x_2-15)^2} - 2e^{-0.5(x_1-5)^2+(x_2-10)^2} + \\ & 2e^{-0.5(x_1-25)^2+(x_2-16)^2} + 2e^{-0.1(x_1-10)^2+(x_2-10)^2} - \\ & 4e^{-0.1(x_1-15)^2+(x_2-5)^2} - 2e^{-0.5(x_1-8)^2+(x_2-25)^2} - \\ & 2e^{-0.5(x_1-21)^2+(x_2-25)^2} + 2e^{-0.5(x_1-5)^2+(x_2-14)^2} + \\ & 3e^{-0.08(x_1-25)^2+(x_2-10)^2}. \end{aligned}$$

作者简介:

冯远静 (1977—), 男, 浙江工业大学信息工程学院副教授, 工学博士, 研究方向为网络化群体系统, E-mail: fyjing@zjut.edu.cn;

俞立 (1961—), 男, 浙江工业大学信息工程学院教授, 工学博士, 研究方向为网络控制系统, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

冯祖仁 (1953—), 男, 西安交通大学教授, 工学博士, 研究方向为机器人控制, E-mail: fzr9910@xjtu.edu.cn.