

基于辅助模型的递推增广最小二乘辨识方法

王冬青

(青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对有色噪声干扰的输出误差滑动平均系统, 将辅助模型与递推增广最小二乘算法相结合: 用辅助模型的输出代替辨识模型信息向量中的未知真实输出项, 用估计残差代替信息向量中的不可测噪声项, 从而提出了基于辅助模型的递推增广最小二乘辨识方法. 为了展示所提方法的特点, 文中还给出了经过模型变换的递推增广最小二乘算法. 理论分析和仿真研究表明, 提出的方法原理简单、计算量小, 可以给出高精度参数估计, 且能够用于在线辨识.

关键词: 递推辨识; 参数估计; 最小二乘; 辅助模型; 输出误差滑动平均模型

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Recursive extended least squares identification method based on auxiliary models

WANG Dong-qing

(College of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: For output error moving average systems with colored noises (OEMA model), this paper combines the auxiliary model and the recursive extended least squares algorithm to present the auxiliary model based recursive extended least squares (AMRELS) algorithm. In this approach, we replace the unknown true outputs in the information vector with the outputs of the auxiliary model, and replace the immeasurable noise terms in the information vector with the estimated residuals. To demonstrate the advantage of the proposed algorithm, this paper gives the recursive extended least squares algorithm through model transformation. The analysis and simulation results indicate that the AMRELS algorithm is simple in principle, with less computational burden, capable of generating more accurate parameter estimates and can be implemented on-line.

Key words: recursive identification; parameter estimation; least squares; auxiliary models; output error moving average models (OEMA)

1 引言(Introduction)

考虑下列输出误差滑动平均系统或滑动平均模型(OEMA: output error moving average model)的参数辨识问题:

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)} u(t) + D(z)v(t), \quad (1)$$

其中: $\{u(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 分别为系统的输入和输出序列, $\{v(t)\}$ 为零均值、不相关随机白噪声序列(不可测), $A(z)$, $B(z)$ 和 $D(z)$ 均为单位后移算子 z^{-1} 的多项式 [$z^{-1}y(t) = y(t-1)$], 且

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a},$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b},$$

$$D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{n_d} z^{-n_d}.$$

不妨假设 $t \leq 0$ 时, $u(t) = 0$, $y(t) = 0$, $v(t) = 0$, 且阶次 n_a , n_b 和 n_d 已知. 众所周知, 对于随机系统(1), 递推最小二乘辨识方法给出的参数估计是有偏的, 因为它不是方程误差模型(ARX模型) [1~3]. 当 $D(z) = 1$ 时, 式(1)退化为输出误差模型, 输出误差模型已有许多成熟的辨识方法, 如偏差补偿最小二乘方法 [4~6]、辅助变量最小二乘算法 [1]、辅助模型最小二乘辨识方法 [7,8] 等. 但是, 当 $D(z)$ 是上述定义的非零次多项式时, 偏差补偿方法和辅助变量方法不能给出噪声模型的参数估计, 辅助模型辨识

方法也不能给出无偏估计. 然而, 在式(1)两边同乘以 $A(z)$, 就演变成下列熟知的ARMAX模型:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + A(z)D(z)v(t). \quad (2)$$

尽管递推增广最小二乘(RELS)算法能辨识这个模型^[1,3,9,10], 但是需要估计更多的参数(原系统只有 $n_a + n_b + n_d$ 个参数, 变换后的模型包含 $2n_a + n_b + n_d$ 个参数), 增加了算法的计算量(得到了 $A(z)D(z)$ 的估计, 还需附加计算 $D(z)$ 的估计). 将在第2节简要介绍这种方法.

在输出误差模型辨识领域($D(z) = 1$ 情形), 除了上述提到的方法外, 文[11]采用长除法将有理分式 $B(z)/A(z)$ 展开成无穷级数, 即无限脉冲响应模型(IIR), 并用有限脉冲响应(FIR)来近似IIR模型(这种方法称为有理分式等价方法), 进一步利用相关技术, 提出了依FIR模型阶次递增的参数估计算法, 动态确定FIR模型阶次, 以及由获得的FIR模型参数确定 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的参数; 类似的基于相关技术的辨识方法推广到双率采样数据系统^[8]. 文[12]利用有理分式等价方法来简化有色噪声干扰随机系统, 使用获得的近似简化模型可以用增广最小二乘算法来估计其参数, 然后确定原系统的参数. 为了改善随机梯度辨识算法的收敛速率, 国际知名学者丁锋教授通过扩展新息长度, 提出了新型的多新息辨识方法, 包括多新息随机梯度和多新息遗忘梯度辨识算法, 能大大提高算法的参数估计精度^[13~15]. 最近, 作者利用辅助模型方法研究了一类有色噪声干扰随机系统的最小二乘辨识问题^[16], 提出了Box-Jenkins系统的基于辅助模型的多新息广义增广随机梯度辨识方法来改进参数估计精度^[17], 以及随机干扰系统的辅助模型递推广义增广最小二乘辨识方法^[18].

辅助模型辨识方法是针对白噪声干扰输出误差系统(即式(1)中 $D(z) = 1$ 情形)提出的, 具有良好的收敛性, 也被用于双率采样数据系统的参数辨识和损失输出估计^[17]. 而递推增广最小二乘算法可以辨识形如ARMAX模型有色噪声模型的参数. 因此, 本文的辨识目标是: 将辅助模型辨识方法和增广最小二乘辨识方法加以推广, 用于研究有色噪声干扰输出误差系统(1)的辨识问题, 提出了基于辅助模型的递推增广最小二乘辨识方法, 并进行比较研究.

2 递推增广最小二乘算法(The RELS algorithm)

首先简单介绍一下通过模型变换的递推增广最

小二乘算法, 目的是为比较以说明提出的基于辅助模型的递推增广最小二乘算法的优点.

先引入符号: “ $A =: X$ ”或“ $X := A$ ”表示“ A 记作(定义为) X ”之意(因为符号 $\triangleq$ 没有左右之分, 含义模糊). 令 $n_f := n_a + n_d$, 定义多项式,

$$F(z) = A(z)D(z) =: 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_{n_f} z^{-n_f}.$$

定义参数向量和信息向量分别为

$$\begin{aligned} \vartheta &:= [a_1, \cdots, a_{n_a}, b_1, \cdots, b_{n_b}, f_1, \cdots, f_{n_f}]^T, \\ \psi(t) &:= [-y(t-1), \cdots, -y(t-n_a), u(t-1), \cdots, \\ &\quad u(t-n_b), v(t-1), \cdots, v(t-n_f)]^T. \end{aligned}$$

式(2)可以写成向量形式,

$$y(t) = \psi^T(t)\vartheta + v(t). \quad (3)$$

令 $\hat{\vartheta}(t)$ 为 ϑ 的估计, $\mathbf{I}$ 是适当维数的单位阵(下面算法中 $\mathbf{I}$ 为 $n_a + n_b + n_f$ 阶单位阵). 那么辨识系统(3)参数向量 ϑ 的递推增广最小二乘算法可表达为

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(t) &= \hat{\vartheta}(t-1) + \mathbf{L}(t)[y(t) - \hat{\psi}^T(t)\hat{\vartheta}(t-1)], \\ \mathbf{L}(t) &= \mathbf{P}(t-1)\hat{\psi}(t)[1 + \hat{\psi}^T(t)\mathbf{P}(t-1)\hat{\psi}(t)]^{-1}, \\ \mathbf{P}(t) &= [\mathbf{I} - \mathbf{L}(t)\hat{\psi}^T(t)]\mathbf{P}(t-1), \\ \hat{v}(t) &= y(t) - \hat{\psi}^T(t)\hat{\vartheta}(t), \\ \hat{\psi}(t) &= [-y(t-1), \cdots, -y(t-n_a), u(t-1), \cdots, \\ &\quad u(t-n_b), \hat{v}(t-1), \cdots, \hat{v}(t-n_f)]^T, \\ \hat{\vartheta}(t) &= [\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \cdots, \hat{a}_{n_a}(t), \hat{b}_1(t), \hat{b}_2(t), \cdots, \hat{b}_{n_b}(t), \\ &\quad \hat{f}_1(t), \hat{f}_2(t), \cdots, \hat{f}_{n_f}(t)]^T. \end{aligned}$$

通过上述算法计算出参数估计 $\hat{\vartheta}(t)$, 就可得到参数 a_i , b_i 和 f_i 的估计 $\hat{a}_i(t)$, $\hat{b}_i(t)$ 和 $\hat{f}_i(t)$, 进一步计算 d_i 的估计 $\hat{d}_i(t)$. 方法如下. 用估计值构造多项式:

$$\begin{aligned} \hat{A}(z) &= 1 + \hat{a}_1(t)z^{-1} + \hat{a}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{a}_{n_a}(t)z^{-n_a}, \\ \hat{F}(z) &= 1 + \hat{f}_1(t)z^{-1} + \hat{f}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{f}_{n_f}(t)z^{-n_f}. \end{aligned}$$

令 $D(z)$ 的估计为

$$\hat{D}(z) = 1 + \hat{d}_1(t)z^{-1} + \hat{d}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{d}_{n_d}(t)z^{-n_d}.$$

根据 $F(z)$ 的定义和模型等价原理^[8], 令 $\hat{F}(z) = \hat{A}(z)\hat{D}(z)$, 即

$$\begin{aligned} 1 + \hat{f}_1(t)z^{-1} + \hat{f}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{f}_{n_f}(t)z^{-n_f} &= \\ [1 + \hat{a}_1(t)z^{-1} + \hat{a}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{a}_{n_a}(t)z^{-n_a}] \cdot \\ [1 + \hat{d}_1(t)z^{-1} + \hat{d}_2(t)z^{-2} + \cdots + \hat{d}_{n_d}(t)z^{-n_d}]. \end{aligned}$$

展开并比较上式两边 z^{-1} 同次幂的系数, 可得方程

$$\begin{aligned} z^{-1}: \hat{a}_1(t) + \hat{d}_1(t) &= \hat{f}_1(t), \\ z^{-2}: \hat{a}_2(t) + \hat{a}_1(t)\hat{d}_1(t) + \hat{d}_2(t) &= \hat{f}_2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{-3} : \hat{a}_3(t) + \hat{a}_2(t)\hat{d}_1(t) + \hat{a}_1(t)\hat{d}_2(t) + \hat{d}_3(t) &= \hat{f}_3(t), \\
&\vdots \\
z^{-n_f+1} : \hat{a}_{n_a}(t)\hat{d}_{n_d-1}(t) + \hat{a}_{n_a-1}(t)\hat{d}_{n_d}(t) &= \\
&\quad \hat{f}_{n_f-1}(t), \\
z^{-n_f} : \hat{a}_{n_a}(t)\hat{d}_{n_d}(t) &= \hat{f}_{n_f}(t).
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
\hat{d}_1(t) &= \hat{f}_1(t) - \hat{a}_1(t), \\
\hat{a}_1(t)\hat{d}_1(t) + \hat{d}_2(t) &= \hat{f}_2(t) - \hat{a}_2(t), \\
\hat{a}_2(t)\hat{d}_1(t) + \hat{a}_1(t)\hat{d}_2(t) + \hat{d}_3(t) &= \hat{f}_3(t) - \hat{a}_3(t), \\
&\vdots \\
\hat{a}_{n_a}(t)\hat{d}_{n_d-1}(t) + \hat{a}_{n_a-1}(t)\hat{d}_{n_d}(t) &= \hat{f}_{n_f-1}(t), \\
\hat{a}_{n_a}(t)\hat{d}_{n_d}(t) &= \hat{f}_{n_f}(t).
\end{aligned}$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{S}(t)\hat{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{f}(t),$$

其中:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{a}_1(t) & 1 & 0 & & \vdots \\ \hat{a}_2(t) & \hat{a}_1(t) & 1 & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_3(t) & \hat{a}_2(t) & \hat{a}_1(t) & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ \hat{a}_{n_a}(t) & & & & \hat{a}_1(t) \\ 0 & \hat{a}_{n_a}(t) & & & \hat{a}_2(t) \\ \vdots & 0 & \hat{a}_{n_a}(t) & & \hat{a}_3(t) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{n_a}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_d}, \\
\hat{\mathbf{d}}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{d}_1(t) \\ \hat{d}_2(t) \\ \hat{d}_3(t) \\ \vdots \\ \hat{d}_{n_d}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_d}, \\
\mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) - \hat{a}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) - \hat{a}_2(t) \\ \hat{f}_3(t) - \hat{a}_3(t) \\ \vdots \\ \hat{f}_{n_f}(t) - \hat{a}_{n_f}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_f}.
\end{aligned}$$

注 上式中 $\hat{a}_i(t) = 0, i \geq n_a$. $\mathbf{S}(t)$ 总是非奇异的, 参数向量 $\hat{\mathbf{d}}(t)$ 的最小二乘解为

$$\hat{\mathbf{d}}(t) = [\mathbf{S}^T(t)\mathbf{S}(t)]^{-1}\mathbf{S}^T(t)\mathbf{f}(t).$$

3 基于辅助模型的辨识方法(The identification methods based on auxiliary models)

辅助模型辨识的基本思想是^[7]: 利用系统的可测信息建立一个适当的辅助模型, 用辅助模型的输出代替系统的不可测变量(如系统的真实输出)的一种辨识方法. 下面推导基于辅助模型的递推增广最小二乘算法, 与上节方法的根本不同之处在于: 这里用系统输入输出数据 $\{u(t), y(t) : t = 1, 2, \dots\}$ 直接估计系统的 $n_a + n_b + n_d$ 个未知参数(a_i, b_i, d_i), 且算法计算量小, 详见后面的计算量比较.

定义系统模型输出和噪声模型输出分别为

$$x(t) := \frac{B(z)}{A(z)}u(t), w(t) := D(z)v(t). \quad (4)$$

则式(1)可写为

$$y(t) = x(t) + w(t). \quad (5)$$

$x(t)$ 为系统模型的输出, 称为真实输出或无噪输出, $w(t)$ 为噪声模型的输出, 是有色噪声或相关噪声, 它们都是不可测的内部变量. $y(t)$ 是 $x(t)$ 的含噪量测.

置系统模型参数向量和噪声模型参数向量分别为

$$\begin{aligned}
\theta_s &:= [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T \in \mathbb{R}^{n_a+n_b}, \\
\theta_n &:= [d_1, d_2, \dots, d_{n_d}]^T \in \mathbb{R}^{n_d},
\end{aligned}$$

信息向量和噪声信息向量分别为

$$\begin{aligned}
\varphi_s(t) &:= [-x(t-1), -x(t-2), \dots, -x(t-n_a), \\
&\quad u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_a+n_b}, \\
\varphi_n(t) &:= [v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n_d)]^T \in \mathbb{R}^{n_d}.
\end{aligned}$$

这里的下标s和n分别表示系统模型和噪声模型之意. 那么式(4)写成向量形式为

$$x(t) = \varphi_s^T(t)\theta_s, w(t) = \varphi_n^T(t)\theta_n + v(t). \quad (6)$$

把上式代入式(5)可得

$$\begin{aligned}
y(t) &= \varphi_s^T(t)\theta_s + \varphi_n^T(t)\theta_n + v(t) =: \\
&\quad \varphi^T(t)\theta + v(t),
\end{aligned} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{aligned}
\theta &:= \begin{bmatrix} \theta_s \\ \theta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+n_d}, \\
\varphi(t) &:= \begin{bmatrix} \varphi_s(t) \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+n_d}.
\end{aligned}$$

由于信息向量 $\varphi(t)$ 中包含未知中间变量 $x(t-i)$ 和不可测噪声项 $v(t-i)$, 故标准递推(增广)最小二乘法不能用于辨识式(7)中参数向量 θ . 为了解决这一困难,

这里的方法是基于辅助模型辨识思想^[7]: 构造一个辅助模型, 如图1所示, 其中 $P_a(z) := \frac{B_a(z)}{A_a(z)}$ 为辅助模型的传递函数($A_a(z)$ 和 $B_a(z)$ 是与 $A(z)$ 和 $B(z)$ 同阶次的多项式), $x_a(t)$ 为辅助模型的输出, 信息向量 $\varphi(t)$ 里 $\varphi_s(t)$ 中未知项 $x(t-i)$ 用辅助模型的输出 $x_a(t-i)$ 代替, 作了这种代替后的 $\varphi_s(t)$ 记作为

$$\hat{\varphi}_s(t) = [-x_a(t-1), -x_a(t-2), \dots, -x_a(t-n_a), \\ u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)]^T, \quad (8)$$

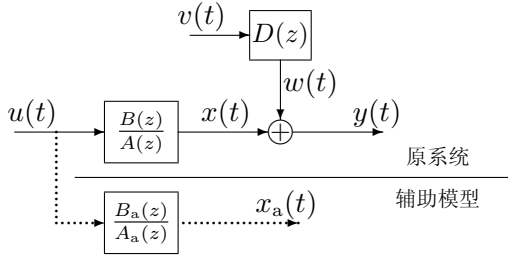


图1 带辅助模型的随机系统

Fig. 1 The stochastic systems with auxiliary models

又信息向量 $\varphi(t)$ 里 $\varphi_n(t)$ 中未知噪声项 $v(t-i)$ 用估计残差 $\hat{v}(t-i)$ 代替, 代替后的 $\varphi_n(t)$ 记作为

$$\hat{\varphi}_n(t) = [\hat{v}(t-1), \hat{v}(t-2), \dots, \hat{v}(t-n_d)]^T. \quad (9)$$

由图1可知

$$x_a(t) = \frac{B_a(z)}{A_a(z)} u(t).$$

仿照式(4)和(6)的方式, 把它写成向量形式为

$$x_a(t) = \varphi_a^T(t) \theta_a,$$

其中 $\varphi_a(t)$ 和 θ_a 分别是辅助模型的信息向量和参数向量. 当然, 辅助模型的信息向量和参数向量有多种选择方法^[7,8]. 参照文[7], 把 $\hat{\varphi}_s(t)$ 作为辅助模型的信息向量 $\varphi_a(t)$, 把 $\hat{\theta}_s(t)$ 作为辅助模型的参数向量 θ_a , 所以有

$$x_a(t) = \hat{\varphi}_s^T(t) \hat{\theta}_s(t). \quad (10)$$

用 $\hat{\varphi}_s(t)$ 和 $\hat{\varphi}_n(t)$ 代替 $\varphi(t)$ 中(未知的) $\varphi_s(t)$ 和 $\varphi_n(t)$, 代替后记作为

$$\hat{\varphi}(t) := \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_s(t) \\ \hat{\varphi}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a+n_b+n_d}. \quad (11)$$

将式(7)中未知的 $\varphi(t)$ 用 $\hat{\varphi}(t)$ 代替, θ 用其估计 $\hat{\theta}(t)$ 代替, 得到残差 $\hat{v}(t)$ 的计算式:

$$\hat{v}(t) = y(t) - \hat{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t). \quad (12)$$

作了上述准备, 极小化准则函数

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\varphi}^T(i) \theta]^T [y(i) - \hat{\varphi}^T(i) \theta],$$

仿照标准递推最小二乘的推导过程^[1], 不难得到计算参数估计 $\hat{\theta}(t)$ 的递推关系:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \mathbf{L}(t)[y(t) - \hat{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t-1)], \quad (13)$$

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t-1) \hat{\varphi}(t) [1 + \hat{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \hat{\varphi}(t)]^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}(t) = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(t) \hat{\varphi}^T(t)] \mathbf{P}(t-1). \quad (15)$$

综上所述, 从式(8)~(15), 可以归纳出基于辅助模型的递推增广最小二乘算法(AMRELS)如下:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \mathbf{L}(t)[y(t) - \hat{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t-1)], \quad (16)$$

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{P}(t-1) \hat{\varphi}(t) [1 + \hat{\varphi}^T(t) \mathbf{P}(t-1) \hat{\varphi}(t)]^{-1}, \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(t) = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(t) \hat{\varphi}^T(t)] \mathbf{P}(t-1), \quad \mathbf{P}(0) = p_0 \mathbf{I}, \quad (18)$$

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_s(t) \\ \hat{\varphi}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_s(t) \\ \hat{\theta}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\hat{\varphi}_s(t) = [-x_a(t-1), -x_a(t-2), \dots, -x_a(t-n_a), \\ u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_b)]^T, \quad (20)$$

$$\hat{\varphi}_n(t) = [\hat{v}(t-1), \hat{v}(t-2), \dots, \hat{v}(t-n_d)]^T, \quad (21)$$

$$x_a(t) = \hat{\varphi}_s^T(t) \hat{\theta}_s(t), \quad (22)$$

$$\hat{v}(t) = y(t) - \hat{\varphi}^T(t) \hat{\theta}(t), \quad (23)$$

$$\hat{\theta}_s(t) = [\hat{a}_1(t), \dots, \hat{a}_{n_a}(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_b}(t)]^T, \quad (24)$$

$$\hat{\theta}_n(t) = [\hat{d}_1(t), \hat{d}_2(t), \dots, \hat{d}_{n_d}(t)]^T. \quad (25)$$

AMRELS算法运算量小, 易于实现在线辨识, 不仅可以辨识系统模型的参数, 而且还可获得噪声模型的参数估计, 较好的解决了有色噪声输出误差模型(即输出误差滑动平均模型OEMA)的辨识问题.

关于算法的无偏性说明: 令

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}^T(1) \\ \hat{\varphi}^T(2) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}^T(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(t) \end{bmatrix},$$

递推参数估计算法(16)~(18)就是最小二乘估计 $\hat{\theta}(t) = (\mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t)^{-1} \mathbf{H}_t^T \mathbf{Y}_t$ 的递推式^[3]. 参照最小二乘法的无偏性证明^[3], 容易得到文中参数估计无偏性结论, 因为 $\mathbf{V}_t$ 与 $\mathbf{H}_t$ 是统计独立的.

4 计算量比较(Comparison)

现在比较RELS和AMRELS算法的计算量. 表1列出了这两个算法在每一步递推计算中的乘法次数和加法次数, 其中方括号中的数字表示 $n_a = n_b = n_d = 5$ 时算法每一步递推计算量次数. 从这个表可以看出, RELS算法计算量大于AMRELS算法计算量, 且前者还没包含计算 $D(z)$ 的估计的计算量, 表中 $n := n_a + n_b + n_d$.

表 1 算法计算量的比较

Table 1 Comparison of computational efficiency

算法	乘法次数	加法次数
RELS*	$2(n+n_a)^2+4(n+n_a)$ [880]	$2(n+n_a)^2+3(n+n_a)$ [860]
AMRELS	$2n^2+4n+n_a+n_b$ [520]	$2n^2+3n+n_a+n_b-1$ [504]

*这还不包含计算 $D(z)$ 的估计的计算量.

5 仿真例子(Example)

考虑下列仿真对象:

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + D(z)v(t),$$
$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} =$$
$$1 - 1.60z^{-1} + 0.80z^{-2},$$
$$B(z) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} = 0.40z^{-1} - 0.30z^{-2},$$
$$D(z) = 1 + d_1z^{-1} = 1 + 0.20z^{-1},$$
$$\theta = [a_1, a_2, b_1, b_2, d_1]^T =$$
$$[-1.60, 0.80, 0.40, -0.30, 0.20]^T.$$

仿真时, 输入 $\{u(t)\}$ 采用零均值、单位方差、不相关可测随机序列, $\{v(t)\}$ 采用零均值方差为 σ^2 的随机白噪声序列, 分别用RELS和AMRELS算法来估计这个系统的参数, 不同噪声方差下参数估计及其估计误差分别如表2~表5所示, 参数估计误差 $\delta := \|\hat{\theta}(t) - \theta\|/\|\theta\|$ 随数据长度 t 变化曲线如图2、图3所示, 其中当 $\sigma^2 = 0.10^2$ 和 $\sigma^2 = 0.50^2$ 时, 系统噪信比分别为 $\delta_{ns} = 14.64\%$ 和 $\delta_{ns} = 73.20\%$.

由表2~表5和图2, 图3可以得到以下结论:

- 1) 随着数据长度增加, RELS和AMRELS算法参数估计误差总的趋势不断减小.
- 2) 噪信比越大, 参数估计误差越大, 参数估计收敛于真值的速度也越慢.
- 3) 在相同数据长度下, AMRELS算法的参数估计精度一般比RELS算法高, 参见图2、图3, 可能的原因是经过模型变换, RELS算法辨识的参数数目较多之故.
- 4) 与辨识Box-Jenkins模型的递推广义增广最小二乘算法一样^[19], 噪信比太小不利于噪声模型的辨识.

表 2 RELS估计及其误差($\sigma^2 = 0.10^2$)

Table 2 The RELS estimates and errors ($\sigma^2 = 0.10^2$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	$\delta/\%$
100	-1.56681	0.76577	0.39449	-0.30891	0.21023	2.66971
200	-1.63611	0.81350	0.38903	-0.32599	0.36752	9.32450
500	-1.63380	0.81706	0.39164	-0.30705	0.35989	8.81487
1000	-1.59181	0.79559	0.39592	-0.29422	0.32273	6.59929
2000	-1.59797	0.79674	0.39858	-0.29750	0.30084	5.40405
3000	-1.60426	0.80263	0.39977	-0.29948	0.27698	4.12973
真值	-1.60000	0.80000	0.40000	-0.30000	0.20000	

表 3 RELS估计及其误差($\sigma^2 = 0.50^2$)

Table 3 The RELS estimates and errors ($\sigma^2 = 0.50^2$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	$\delta/\%$
100	-0.45786	0.00217	0.40151	0.09644	0.30613	77.74504
200	-0.57416	0.08700	0.36921	0.06942	0.46750	71.20891
500	-0.85803	0.27860	0.35685	-0.00550	0.47860	53.22254
1000	-1.28216	0.54625	0.39543	-0.17326	0.41386	25.51653
2000	-1.53830	0.72332	0.40158	-0.28022	0.35042	9.68050
3000	-1.62272	0.80319	0.40356	-0.31043	0.31340	6.22103
真值	-1.60000	0.80000	0.40000	-0.30000	0.20000	

表 4 AMRELS估计及其误差($\sigma^2 = 0.10^2$)

Table 4 AMRELS estimates and errors($\sigma^2 = 0.10^2$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	$\delta/\%$
100	-1.54836	0.76767	0.40202	-0.28806	0.42558	12.52456
200	-1.62627	0.82186	0.39740	-0.31898	0.41785	11.84814
500	-1.63915	0.82450	0.39761	-0.31222	0.30651	6.24981
1000	-1.58996	0.79122	0.39923	-0.29668	0.26810	3.71881
2000	-1.60280	0.80078	0.40013	-0.30295	0.22395	1.30120
3000	-1.60560	0.80265	0.40061	-0.30301	0.21119	0.70424
真值	-1.60000	0.80000	0.40000	-0.30000	0.20000	

表 5 AMRELS估计及其误差($\sigma^2 = 0.50^2$)

Table 5 AMRELS estimates and errors ($\sigma^2 = 0.50^2$)

t	a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	$\delta/\%$
100	-0.62579	0.20720	0.38165	0.00737	0.29731	63.44392
200	-0.73906	0.17427	0.37743	0.01247	0.46954	61.11543
500	-1.29280	0.51544	0.36178	-0.17115	0.46097	27.37347
1000	-1.58453	0.78885	0.39783	-0.28652	0.37205	9.29475
2000	-1.59308	0.79525	0.40342	-0.30140	0.28290	4.46472
3000	-1.61886	0.81014	0.40479	-0.30920	0.25377	3.14756
真值	-1.60000	0.80000	0.40000	-0.30000	0.20000	

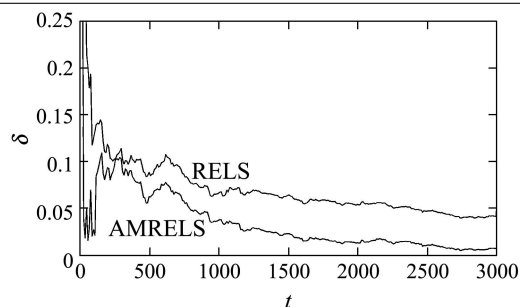


图2 估计误差随数据长度 t 变化曲线($\sigma^2 = 0.10^2$)

Fig. 2 The estimation errors versus t ($\sigma^2 = 0.10^2$)

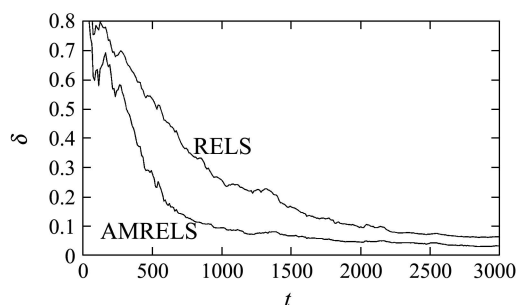


图3 估计误差随数据长度 t 变化曲线($\sigma^2 = 0.50^2$)

Fig. 3 The estimation errors versus t ($\sigma^2 = 0.50^2$)

6 结语(Conclusions)

论文借助于辅助模型辨识思想和增广最小二乘原理,提出了有色噪声干扰输出误差系统的基于辅助模型的递推增广最小二乘法。提出的算法原理简单、容易实现,能用于在线辨识,比经过模型变换的增广最小二乘算法参数估计精度高,且计算量小。理论分析和仿真结果验证了这些结论。

参考文献(References):

- [1] 方崇智, 萧德云. 过程辨识[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988. (FANG Chongzhi, XIAO Deyun. *Process Identification*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [2] LJUNG L. *System Identification: Theory for the User (2nd edn)*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- [3] 谢新民, 丁锋. 自适应控制系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. (XIE Xinmin, DING Feng. *Adaptive Control Systems*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [4] ZHENG W X. On a least-squares-based algorithm for identification of stochastic linear systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(6): 1631 – 1638.
- [5] ZHENG W X. A bias correction method for identification of linear dynamic errors-in-variables models[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1142 – 1147.
- [6] ZHENG W X. Parameter estimation of stochastic linear systems with noisy input[J]. *International Journal of Systems Science*, 2004, 35(3): 185 – 190.
- [7] DING F, CHEN T. Combined parameter and output estimation of dual-rate systems using an auxiliary model[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1739 – 1748.
- [8] DING F, CHEN T. Identification of dual-rate systems based on finite impulse response models[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, 18(7): 589 – 598.
- [9] SOLO V. The convergence of AML[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(6): 958 – 962.
- [10] LAI T L. Extended least squares and their applications to adaptive control and prediction in linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(10): 898 – 906.
- [11] 黄祖毅, 陈建清. 基于脉冲响应的输出误差模型的辨识[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(5): 793 – 796. (HUANG Zuyi, CHEN Jianqing. Identification of output error models based on impulse response[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 793 – 796.)
- [12] 张勇, 杨慧中, 丁锋. 有色噪声干扰下的一种系统辨识方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(Z1): 167–171. (ZHANG Yong, YANG Huizhong, DING Feng. System identification method for colored noises[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2006, 38(Z1): 167 – 171.)
- [13] 丁锋, 谢新民, 方崇智. 时变系统辨识的多新息方法[J]. 自动化学报, 1996, 22(1): 85 – 91. (DING Feng, XIE Xinmin, FANG Chongzhi. Multi-innovation identification methods for time-varying systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1996, 22(1): 85 – 91.)
- [14] 丁锋, 萧德云, 丁韬. 多新息随机梯度辨识方法[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 870 – 874. (DING Feng, XIAO Deyun, DING Tao. Multi-innovation stochastic gradient identification methods[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 870 – 874.)
- [15] DING F, CHEN T. Performance analysis of multi-innovation gradient type identification methods[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 1 – 14.
- [16] 王冬青. 一类有色噪声干扰随机系统的最小二乘递推辨识[J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(8): 935 – 939. (WANG Dongqing. Least squares based recursive identification for stochastic systems with colored noises[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2008, 34(8): 935 – 939.)
- [17] 王冬青, 丁锋. 基于辅助模型的多新息广义增广随机梯度算法[J]. 控制与决策, 2008, 23(9): 999 – 1003. (WANG Dongqing, DING Feng. Auxiliary models based multi-innovation generalized extended stochastic gradient algorithms[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(9): 999 – 1003.)
- [18] 谢莉, 王冬青, 丁锋. 随机干扰系统的辅助模型递推广义增广最小二乘辨识方法[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(14): 3944 – 3945, 3965. (XIE Li, WANG Dongqing, DING Feng. AM-RGELS algorithms for general stochastic systems[J]. *Science Technology and Engineering*, 2008, 8(14): 3944 – 3945, 3965.)
- [19] 丁锋. 辨识Box-Jenkins模型的递推广义增广最小二乘法[J]. 控制与决策, 1990, 5(6): 53 – 56. (DING Feng. A recursive generalized extended least squares identification algorithm for Box-Jenkins models[J]. *Control and Decision*, 1990, 5(6): 53 – 56.)

作者简介:

王冬青 (1964—), 女, 青岛大学自动化工程学院, 副教授, 博士, 主要从事系统建模和过程控制方面的研究工作, E-mail: dqwang64@163.com.