文章编号: 1000−8152(2009)01−0073−07

基于二维混合模型的保成本重复控制

兰永红[1], 吴 敏[1], 佘锦华[2], 何 勇[1]

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 东京工科大学 计算机科学学部, 东京 192-0982)

摘要: 针对一类线性不确定系统, 提出一种基于二维混合模型的重复控制设计新方法, 研究具有反馈作用的保成本重复控制设计与优化问题. 首先, 为了提高系统稳定性, 将反馈控制器引入到重复控制系统中, 设计一种具有反馈作用的重复控制系统结构; 然后通过建立重复控制系统的连续/离散二维混合模型, 将重复控制器设计问题转化为一类连续/离散二维系统的状态反馈控制问题. 在此基础上, 对给定的线性二次型性能指标, 给出闭环系统的保成本重复控制律参数设计及其优化方法. 对所有容许的不确定性, 保成本重复控制使稳态跟踪误差渐近稳定的同时, 线性二次型性能指标值小于某个常数. 所得结果以线性矩阵不等式的形式给出, 可利用MATLAB工具箱方便地求解. 最后, 数值仿真验证了本文所提方法的有效性.

关键词: 线性不确定系统; 保成本重复控制; 二维系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Guaranteed-cost repetitive control based on 2D hybrid model

LAN Yong-hong[1], WU Min [1], SHE Jin-hua[2], HE Yong[1]

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;
2. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan)

Abstract: For a class of linear systems with parametric uncertainties, we propose a new method for designing a guaranteed-cost repetitive control system based on two-dimensional (2D) hybrid model. First, a feedback controller is incorporated with the repetitive control system to improve the stability, resulting in a feedback repetitive control (FRC) system; then a hybrid continuous-discrete 2D model for the FRC system is developed. Thus, the FRC design problem is converted to a state feedback design problem for this continuous-discrete 2D system. A guaranteed-cost repetitive control algorithm and its optimization are then developed for a given quadratic performance function. In the FRC such designed, the tracking error is asymptotically stable and the quadratic performance function value is less than a specified upper bound for all admissible uncertainties. The results are derived based on the linear matrix inequalities (LMI) which can be realized easily by using Matlab Toolbox. Finally, the validity of the method is verified by a numerical example.

Key words: uncertain linear systems; guaranteed cost repetitive control; two dimensinoal (2D) systems; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

重复控制是日本学者Nakano等人于20世纪80年代提出的一种新型控制方法. 基于内模原理, 它将周期信号的动态模型植入系统的控制器内, 从而达到对周期性参考输入进行高精度跟踪或对周期性干扰信号进行有效抑制的目的[1]. 但是, 由于重复控制器的时滞特性, 重复控制系统的稳定性难以得到保证[2]. 不少学者对此进行了广泛深入的研究, 不同程度地改进了重复控制器的动态成本, 并且获得了成功的应用[3]. She等人提出了离散时间变结构严密内模重复控制方法[4]; Owens等人针对严格正实系统, 利用Lyapunov泛函方法, 提出了多周期重复控制器设计方法[5]; 张立强等人[6]以及Park等人[7]研究了基于PID的重复控制. 然而, 这些方法在选择控制器参数时需要反复调节, 多少存在一些试凑的痕迹. 对于鲁棒重复控制问题, 近年来也吸引了不少学者的注意. Chen和Liu在频域空间中研究了鲁棒重复控制器的设计问题[8], 但所得结果只能适用于最小相位系统; Ramrath等人针对特定的跟踪频率，提出了一种基于最小– 最大方法的鲁棒重复控制设计方法[9];

收稿日期: 2007−06−18; 收修改稿日期: 2008−03−31.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674016); 国家杰出青年科学基金资助项目(60425310).

Doh等人针对不确定线性系统, 提出了基于LMI的低通滤波器和重复控制器设计方法[10]. 由于重复控制器和低通滤波器的参数相互影响, 需要反复调整才能获得比较理想的低通滤波器和重复控制器参数.

事实上, 重复控制系统中存在着两种完全不同的行为: 一个周期之内的连续控制行为和各个周期之间的离散学习行为. 一个周期之内的连续控制行为不受学习行为的影响, 而跟踪精度是通过以输入信号周期为单位的正反馈环节学习机制(离散学习行为)来获得提高的. 现有的重复控制系统设计问题是没有用一个合理的数学模型准确地描述控制系统中存在的连续控制行为和离散学习行为, 而是在时间轴上混合考虑它们的综合效应, 无法对重复控制中的控制行为和学习行为独立进行设计, 不能对重复控制系统中的控制器参数进行更精确的调节[11].

另一方面, 在设计一个控制系统时, 有时期望设计的控制律不仅能使闭环系统渐近稳定, 而且还使得控制系统具有一定的鲁棒性能水平. 解决这类问题的常用方法之一是保成本控制[12]. 近年来, 某些控制系统的保成本控制吸引了相当多的学者的注意, 并且取得了一些很好的结果. 但是, 对于重复控制系统的保成本控制, 国内外还没有任何相关结果.

本文针对一类线性连续不确定系统, 采用二维系统理论方法[13,14], 提出一种基于二维混合模型的保成本重复控制设计新方法.

本文中, 如不作特殊说明, 对称矩阵的对称部分用$*$表示.

2 问题的描述(Problem formulation)

基本的重复控制器如图1中虚线所示部分C_R.

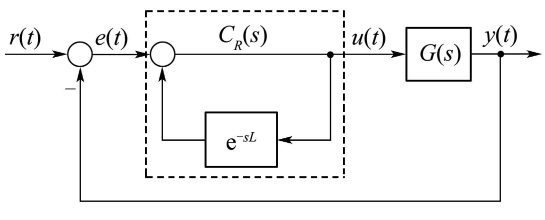


图 1 基本的重复控制系统

Fig. 1 The basic repetitive control systems

若控制系统回路中包含C_R, 则相应的控制系统称为重复控制系统[1]. C_R的时域形式为：

$$u(t)=\begin{cases} e(t), & 0<t<L,\\ u(t-L)+e(t), & t\geqslant L.\end{cases}$$

其中L为时滞环节的延时时间, 与参考信号的周期一致.

文献[2]指出, 当控制输出的前馈直达项$D\neq 0$时可在系统中直接引入重复控制器来设计重复控制系统. 本文考虑$D\neq 0$时的重复控制系统设计问题. 重复控制系统结构如图2所示, 设控制对象的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)u(t),\\ y(t)=Cx(t)+Du(t).\end{cases} \tag{1a}$$

这里$x(t)\in\mathbb{R}^n$为控制对象的状态, $u(t)\in\mathbb{R}^n$ 为控制输入, $y(t)\in\mathbb{R}^m$为状态输出. 便于问题的简化, 这里仅考虑SISO情形. 时不变不确定结构为：

$$[\Delta A\ \ \Delta B]=H_1\varGamma[E_1\ E_2]. \tag{1b}$$

其中: H_1,H_2,E_1,E_2为已知常值实矩阵, 时不变不确定矩阵$\varGamma\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 满足$\varGamma^{\mathrm T}\varGamma\leqslant I$.

图2中, 虚线所示部分C_R为重复控制器. 重复控制系统的控制律为

$$u(t)=F_px(t)+F_ev(t). \tag{2}$$

待定向量$F=[F_p\ \ F_e]$为系统的控制增益.

3 最优保成本重复控制律设计(Design of optimal guaranteed cost repetitive control law)

对不确定线性系统(1), 定义如下线性二次型性能指标

$$\begin{aligned} J=\int_0^\infty\{&[x(t)-x(t-L)]^{\mathrm T}Q_1[x(t)-x(t-L)]+\\ &[u(t)-u(t-L)]^{\mathrm T}R[u(t)-u(t-L)]+\\ &e^{\mathrm T}(t-L)Q_2e(t-L)\}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $Q_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Q_2\in\mathbb{R}$和$R\in\mathbb{R}^{m\times m}$是给定的对称正定加权矩阵.

关于保成本重复控制, 引进如下定义:

定义 1 对不确定线性系统(1)和性能指标(3), 如果存在一个正数J^*和重复控制律$u^*(t)$使得闭环系统跟踪误差收敛, 且性能指标满足$J\leqslant J^*$, 则J^*称为不确定线性系统(1)的一个性能上界, 称$u^*(t)$为不确定线性系统(1)的一个保成本重复控制律.

针对$\varGamma=0$, 即不确定线性系统(1)的标称系统, 对每个变量$\xi(t)$, 当$t<0$时, 令$\xi(t)=0$, 当$t>0$时, 设$\Delta\xi(t)=x(t)-x(t-L)$, 从而,

$$\Delta\dot{x}(t)=A\Delta x(t)+B\Delta u(t), \tag{4}$$

$$e(t)-e(t-L)=-C\Delta x(t)-D\Delta u(t). \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta u(t)=&F_e\Delta v(t)+F_p\Delta x(t)=\\ &F_ee(t)+F_p\Delta x(t).\end{aligned} \tag{6}$$

重复控制依赖于两个独立的动态过程. 现分别用两个变量τ和k来表示这两个动态过程的自变量,

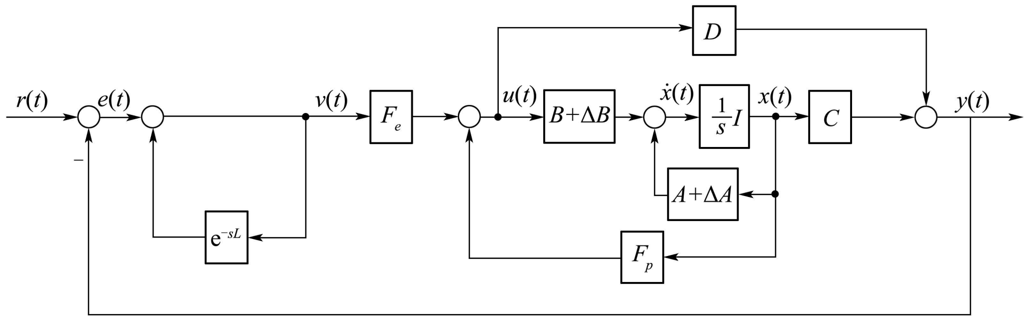


图 2 重复控制系统结构

Fig. 2 Configuration of the repetitive control system

其中τ为表示时间的连续变量, k为表示学习次数的离散变量. 进一步假定:

$$\begin{cases}\xi(t)=\xi(kL+\tau):=\xi(k,\tau),\\ \xi(t-L)=\xi((k-1)L+\tau):=\xi(k-1,\tau),\end{cases}$$

则式(4)(5)转化为

$$\Delta\dot{x}(k,\tau)=A\Delta x(k,\tau)+B\Delta u(k,\tau), \tag{7}$$

$$e(k,\tau)=e(k-1,\tau)-C\Delta x(k,\tau)-D\Delta u(k,\tau). \tag{8}$$

由式(7)(8)描述的控制对象与式(1)描述的截然不同. 式(1)把控制对象在一个周期内的连续控制行为与各个周期之间的离散学习行为进行了混合描述, 但在式(7)(8)的描述中, 式(7)描述的是第k个周期内的连续控制行为, 而式(8)描述的是第$k-1$和第k个周期之间的离散学习行为. 由于式(7)中不包含误差项$e(k,\tau)$, 从而一个周期内的控制行为不受学习行为的影响, 这与事实相符. 反之, 由式(8)可知, 一个周期内的控制行为直接影响到学习行为. 这是由于控制行为收敛越快, 则对学习的需求越低.

式(7)(8)写成向量形式, 组成了重复控制系统的连续/离散二维混合模型:

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}(k,\tau)\\ e(k,\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x(k,\tau)\\ e(k-1,\tau)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ -D\end{bmatrix}\Delta u(k,\tau). \tag{9}$$

从而重复控制设计问题转化为一类连续/离散二维系统的状态反馈控制问题, 即二维状态反馈控制器

$$\Delta u(k,\tau)=[K_p\ \ K_e]\begin{bmatrix}\Delta x(k,\tau)\\ e(k-1,\tau)\end{bmatrix} \tag{10}$$

的设计问题.

把式(5)代入式(6), 得

$$\Delta u(t)=K_e e(t-L)+K_p\Delta x(t), \tag{11}$$

$$K_e=\frac{F_e}{1+F_eD},\ \ K_p=\frac{F_p-F_eC}{1+F_eD}. \tag{12}$$

由式(12)可得

$$F_e=\frac{K_e}{1-DK_e},\quad F_p=\frac{K_p+K_eC}{1-DK_e}. \tag{13}$$

显然, 如果存在一个二维状态反馈控制增益$[K_p\ \ K_e]$, 则由式(13)能获得图2相应的重复控制系统的反馈增益$[F_p\ \ F_e]$.

由式(13)可知, 学习过程主要受参数K_e(即F_e)、控制过程主要受参数K_p (即F_p和F_e)支配. 这两个过程既相对独立又相互影响, 其中控制过程可通过调节K_p获得改善, 而学习过程可通过调节K_e获得改善. 重复控制系统的控制和学习过程可通过二维状态反馈控制器(11)中的反馈增益来单独调节.

给出主要结果之前, 先给出几个必要的引理.

引理 1 (Schur 补)[15]　给定常值矩阵$\Sigma=\Sigma^{\mathrm{T}}$, 则下述命题等价

1) $\Sigma:=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ * & \Sigma_{22}\end{bmatrix}>0$;

2) $\Sigma_{11}>0$, 且 $\Sigma_{22}-\Sigma_{12}^{\mathrm{T}}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}>0$;

3) $\Sigma_{22}>0$, 且$\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}^{\mathrm{T}}>0$.

引理 2 [16]　对任意合适维数的矩阵H, $F(t)$以及E, 其中$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$, 则$HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0$当且仅当存在常数$\epsilon>0$, 使得$\epsilon HH^{\mathrm{T}}+\epsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E<0$成立.

本文主要结论如下:

定理 1　对系统(1)和性能指标(4), 如果存在对称正定矩阵$P_1>0$, $P_2>0$以及合适维数矩

阵K_p, K_e, 使得对所有允许的不确定性, 成立

$$P^{10}(A_1+\Delta A_1)+(A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}P^{10}+ A_2^{\mathrm{T}}P^{11}A_2-P^{01}+Q+K^{\mathrm{T}}RK<0, \tag{14}$$

其中:

$$\begin{cases} A_1=\begin{bmatrix} A+BK_p & BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta A_1=\begin{bmatrix} \Delta A+\Delta BK_p & \Delta BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C-DK_p & 1-DK_e \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{15}$$

$$P^{10}=\mathrm{diag}\{P_1,0\}, P^{01}=\mathrm{diag}\{0,P_2\},$$
$$P^{11}=\mathrm{diag}\{P_3,P_2\}, Q=\mathrm{diag}\{Q_1,Q_2\},$$
$$K=[K_p\ \ K_e],$$

P_3为任意合适维数正定矩阵, Q_1, Q_2和R 是给定的对称正定加权矩阵, 则重复控制律

$$u(t)=\frac{K_e}{1-DK_e}v(t)+\frac{K_p+K_eC}{1-DK_e}x(t), \tag{16}$$

使闭环系统稳态跟踪误差鲁棒稳定, 并且是不确定线性系统(1)的一个保成本重复控制律, 相应的一个系统性能上界是

$$J\leqslant\big(x(0)-x(-L)\big)^{\mathrm{T}}P_1\big(x(0)-x(-L)\big). \tag{17}$$

证 对不确定线性系统(1), 相应的连续/离散二维混合模型为:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}(k,\tau) \\ e(k,\tau) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+\Delta A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x(k,\tau) \\ e(k-1,\tau) \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} B+\Delta B \\ -D \end{bmatrix}\Delta u(k,\tau). \tag{18}$$

在二维状态反馈控制律(10)的作用下, 相应的闭环过程为:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}(k,\tau) \\ e(k,\tau) \end{bmatrix}= \Big(\begin{bmatrix} A+BK_p & BK_e \\ -C-DK_p & 1-DK_e \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} \Delta A+\Delta BK_p & \Delta BK_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big)\begin{bmatrix} \Delta x(k,\tau) \\ e(k-1,\tau) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

选取二维Lyapunov函数[14]

$$V(k,\tau)=V_1(k,\tau)+V_2(k,\tau)= \Delta x^{\mathrm{T}}(k,\tau)P_1\Delta x(k,\tau)+ e^{\mathrm{T}}(k-1,\tau)P_2e(k-1,\tau), \tag{20}$$

其中$P_1>0$, $P_2>0$为对称矩阵. 由于

$$\dot{V}_1(k,\tau)=\Delta\dot{x}^{\mathrm{T}}(k,\tau)P_1\Delta x(k,\tau)+ \Delta x^{\mathrm{T}}(k,\tau)P_1\Delta\dot{x}^{\mathrm{T}}(k,\tau),$$

以及

$$\Delta V_2(k,\tau)=e^{\mathrm{T}}(k,\tau)P_2e(k,\tau)- e^{\mathrm{T}}(k-1,\tau)P_2e(k-1,\tau),$$

从而二维Lyapunov函数(20)的增量为

$$\Delta V(k,\tau)=\dot{V}_1(k,\tau)+\Delta V_2(k,\tau)= \zeta^{\mathrm{T}}(k,\tau)\varTheta\zeta(k,\tau),$$

其中:

$$\begin{cases} \zeta(k,\tau):=\big[\Delta x^{\mathrm{T}}(k,\tau)\ \ e^{\mathrm{T}}(k-1,\tau)\big]^{\mathrm{T}}, \\ \varTheta=(A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}P^{10}+P^{10}(A_1+\Delta A_1)+ A_2^{\mathrm{T}}P^{01}A_2-P^{01}. \end{cases} \tag{21}$$

如果对所有的$\zeta(k,\tau)\neq 0$, 有$\Delta V(k,\tau)<0$, 则二维线性连续/离散系统(18)渐近稳定. 另一方面, 若

$$\Delta V(k,\tau)+\xi^{\mathrm{T}}(k,\tau)(Q+K^{\mathrm{T}}RK)\xi(k,\tau)<0, \tag{22}$$

则暗含二维线性连续/离散系统(18)渐近稳定. 式(22)还原成一维变量表示的形式, 即为

$$\dot{V}_1(t)+e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)-e^{\mathrm{T}}(t-L)P_2e(t-L)+ \Delta x^{\mathrm{T}}(t)Q_1\Delta x(t)+e^{\mathrm{T}}(t-L)Q_2e(t-L)+ \Delta u^{\mathrm{T}}(t)R\Delta u(t)<0, \tag{23}$$

其中$V_1(t)=\Delta x^{\mathrm{T}}(t)P_1\Delta x(t)$.

对式(23)两边从0到$T_f\to\infty$积分得

$$\int_0^{T_f}\big(\Delta x^{\mathrm{T}}(t)Q_1\Delta x(t)+e^{\mathrm{T}}(t-L)Q_2e(t-L)+ \Delta u^{\mathrm{T}}(t)R\Delta u(t)\big)\mathrm{d}t<$$
$$-\int_0^{T_f}\big(\dot{V}_1(t)+e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)- e^{\mathrm{T}}(t-L)P_2e(t-L)\big)\mathrm{d}t=$$
$$-\Delta x^{\mathrm{T}}(t)P_1\Delta x(t)\Big|_0^{T_f}-\int_0^{T_f}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t+ \int_0^{T_f}e^{\mathrm{T}}(t-L)P_2e(t-L)\mathrm{d}t=$$
$$\Delta x^{\mathrm{T}}(0)P_1\Delta x(0)-\int_0^{T_f}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t+ \int_{-L}^{T_f-L}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t=$$

$$\Delta x^{\mathrm{T}}(0)P_1\Delta x(0)+\int_{T_f}^{0}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t+\int_{-L}^{0}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{T_f-L}e^{\mathrm{T}}(t)P_2e(t)\mathrm{d}t=\Delta x^{\mathrm{T}}(0)P_1\Delta x(0).$$

从而, 易见式(17)成立. 由式(21)(22), 不确定线性系统(1)鲁棒稳定且保证式(17)成立的一个充分条件是式(14)成立.　　证毕.

定理 2　对不确定线性系统(1)和性能指标(3), 如果存在对称正定矩阵W_1, W_2, 标量 $\varepsilon>0$ 以及合适维数矩阵N, M, 使得对所有允许的不确定性, 成立

$$\begin{bmatrix}\varTheta_1 & \varTheta_2\\ * & \varTheta_3\end{bmatrix}<0, \tag{24}$$

其中:

$$\varTheta_1=\begin{bmatrix}-W_2 & \varTheta_{12}^1 & W_2-DM & 0\\ * & \varTheta_{22}^1 & BM & \varTheta_{24}^1\\ * & * & -W_2 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon I\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N^{\mathrm{T}} & W_1 & 0\\ M^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & M^{\mathrm{T}} & 0 & W_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varTheta_3=\mathrm{diag}\{-\varepsilon I,-R^{-1},-Q_1^{-1},-Q_2^{-1}\},$$

$$\varTheta_{12}^1=-CW_1-DN,$$

$$\varTheta_{22}^1=W_1A^{\mathrm{T}}+AW_1+N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BN+\varepsilon H_1H_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varTheta_{24}^1=W_1E_1^{\mathrm{T}}+N^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}}.$$

Q_1, Q_2和R是给定的线性二次型性能指标的对称正定加权矩阵, 则重复控制律(16)使闭环系统鲁棒渐近稳定且跟踪误差收敛, 其中

$$K_p=NW_1^{-1},\ \ K_e=MW_2^{-1}. \tag{25}$$

另外, 该重复控制律是不确定线性系统(1)的一个保成本重复控制律, 相应的一个系统性能上界是:

$$J\leqslant\big(x(0)-x(-L)\big)^{\mathrm{T}}W_1^{-1}\big(x(0)-x(-L)\big). \tag{26}$$

证　由引理1, 式(14)等价于式(27),

$$\begin{bmatrix}-P_3 & 0 & 0 & 0\\ * & -P_2 & \varLambda_1 & \varLambda_2\\ * & * & \varLambda_3 & P_1(B+\Delta B)K_e+K_p^{\mathrm{T}}RK_e\\ * & * & * & Q_2-P_2+K_e^{\mathrm{T}}RK_e\end{bmatrix}<0, \tag{27}$$

其中:

$$\varLambda_1=-P_2(C+DK_p),$$

$$\varLambda_2=P_2(1-DK_e),$$

$$\varLambda_3=(A+BK_p+\Delta A+\Delta BK_p)^{\mathrm{T}}P_1+Q_1+P_1(A+BK_p+\Delta A+\Delta BK_p)+K_p^{\mathrm{T}}RK_p.$$

由于移除式(27)的第1行和第1列不改变负定性, 因此, 式(27)等价于

$$\begin{bmatrix}-P_2 & -P_2(C+DK_p) & P_2(1-DK_e)\\ * & Q_1+\varLambda_4 & P_1BK_e+K_p^{\mathrm{T}}RK_e\\ * & * & Q_2-P_2+K_e^{\mathrm{T}}RK_e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ * & \varLambda_5 & P_1\Delta BK_e\\ * & * & 0\end{bmatrix}<0, \tag{28}$$

其中:

$$\varLambda_4=(A+BK_p)^{\mathrm{T}}P_1+P_1(A+BK_p)+K_p^{\mathrm{T}}RK_p,$$

$$\varLambda_5=(\Delta A+\Delta BK_p)^{\mathrm{T}}P_1+P_1(\Delta A+\Delta BK_p).$$

设$P_1^{-1}=W_1$, $P_2^{-1}=W_2$, 并对式(28)两边同时先后左乘和右乘矩阵$\mathrm{diag}\{W_2,W_1,W_2\}$, 得

$$\begin{bmatrix}-W_2 & -(C+DK_p)W_1 & (1-DK_e)W_2\\ * & \varLambda_6 & \varLambda_7\\ * & * & \varLambda_8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ * & \varLambda_9 & K_e\Delta BW_2\\ * & * & 0\end{bmatrix}<0, \tag{29}$$

其中:

$$\varLambda_6=W_1(Q_1+K_p^{\mathrm{T}}RK_p)W_1+W_1(A+BK_p)^{\mathrm{T}}+(A+BK_p)W_1,$$

$$\varLambda_7=K_eBW_2+W_1K_p^{\mathrm{T}}RK_eW_2,$$

$$\varLambda_8=-W_2Q_2W_2-W_2+W_2K_e^{\mathrm{T}}RK_eW_2,$$

$$\varLambda_9=W_1(\Delta A+\Delta BK_p)^{\mathrm{T}}+(\Delta A+\Delta BK_p)W_1.$$

式(29)第2项可以进一步写为

$$\bar{H}\bar{\varGamma}\bar{E}+\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{\varGamma}^{\mathrm{T}}\bar{H}^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

其中:

$$\bar{H}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & H_1 & H_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \bar{\varGamma}=\mathrm{diag}\{\varGamma,\varGamma,\varGamma\},$$

$$\bar{E}=\mathrm{diag}\{0,(E_1+E_2K_p)W_1,E_2K_eW_2\}.$$

由引理2,

$$\bar{H}\bar{\Gamma}\bar{E}+\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{\Gamma}^{\mathrm{T}}\bar{H}^{\mathrm{T}}<0$$

等价于

$$\varepsilon\bar{H}\bar{H}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{E}<0.$$

令$K_pY=N$, $K_eZ=M$, 并应用引理1, 易证式(29)等价于式(24). 证毕.

矩阵不等式(24)是矩阵变量W_1, W_2, N, M以及标量ε的一个线性矩阵不等式, 因此可以利用MATLAB中的LMI工具箱方便的求解. 下面的定理给出了最优保成本重复控制律问题的解.

定理 3 对不确定线性系统(1)和性能指标(3), 如果以下优化问题

$$\min(\alpha) \tag{31}$$

使得:

1) 式(24)成立;

2) $\begin{bmatrix}-\alpha & (x(0)-x(-L))^{\mathrm{T}}\\ * & -W_1\end{bmatrix}<0$

有解$(\bar{W}_1,\bar{W}_2,\bar{N},\bar{M})$, 则重复控制律

$$u(t)=\frac{K_e}{1-DK_e}v(t)+\frac{K_p+K_eC}{1-DK_e}x(t) \tag{32}$$

是不确定系统(1)的最优保成本重复控制律, 其中

$$K_p=\bar{N}\bar{W}_1,\ \ K_e=\bar{M}\bar{W}_2. \tag{33}$$

证 由定理2, 如果定理3中的条件满足, 则重复控制律(32)控制律是不确定线性系统(1)的一个保成本重复控制律. 最小化系统性能上界, 等价于在线性矩阵不等式(24)成立的条件下式(36)的优化问题. 由于非线性项和W_1^{-1}的存在, 式(37)的闭凸优化问题不能直接求解. 不妨假定存在$\alpha>0$, 满足

$$\big(x(0)-x(-L)\big)^{\mathrm{T}}W_1^{-1}\big(x(0)-x(-L)\big)<\alpha, \tag{34}$$

由引理1, 式(24)和式(35)分别等价于定理3中的条件1)和2). 证毕.

4 数值仿真(Numerical simulation)

设控制对象具有如下参数:

$$\begin{cases}A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix},\\ C=[1\ \ 0], D=2,\\ H_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0.1\end{bmatrix}, \Gamma=\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}, c\in[-1,1],\\ E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}.\end{cases} \tag{35}$$

参考输入为:

$$r(t)=\sin\frac{2\pi t}{10}+0.5\sin\frac{4\pi t}{10}+0.5\sin\frac{6\pi t}{10},$$

初始状态为:

$$x(t)=[0.5\mathrm{e}^t\ \ -0.5\mathrm{e}^t]^{\mathrm{T}}, -10\leqslant t\leqslant 0.$$

选择$c=0.1$, $R=1.0$, $Q_1=100I$, $Q_2=1.0$. 根据定理2, 应用MATLAB中的LMI工具箱, 求得重复控制器参数为:

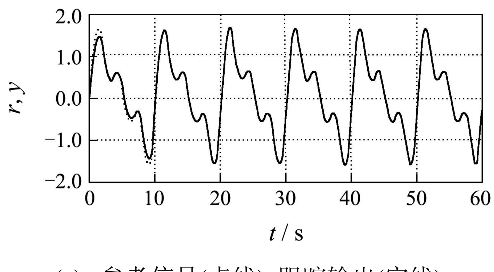
$$F_p=[-0.4398\ \ 0.0453],\ \ F_e=3.1734. \tag{36}$$

系统仿真结果示于图3. 经过2个周期后, 对系统的容许不确定性, 系统输出便基本进入了稳定状态, 并且稳态相对误差渐近收敛于0, 系统输出能较好的跟踪参考输入.

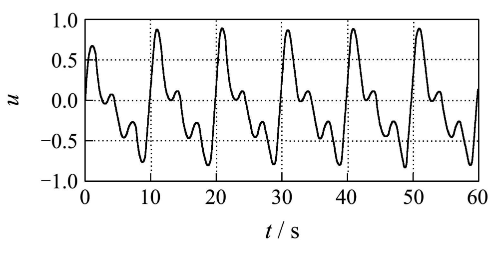
5 结论(Conclusion)

针对一类线性连续不确定系统, 将二维系统方法引入到重复控制设计中, 提出一种基于连续/离散二维混合模型的保成本鲁棒重复控制设计方法. 线性二次型性能指标的引入, 实现了重复控制过程学习行为和控制行为的独立调节, 提高了跟踪精度. 控制律的存在条件和参数优化方法以线性矩阵不等式形式给出, 可以方便的利用MATLAB中的LMI工具箱求解. 仿真研究表明了该方法有效可行, 适合于实际应用.

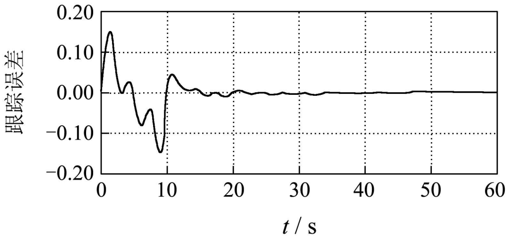
$$\min\{(x(0)-x(-L))^{\mathrm{T}}W_1^{-1}(x(0)-x(-L))\}=\min\{\mathrm{tr}(W_1^{-1}(x(0)-x(-L))^{\mathrm{T}}(x(0)-x(-L)))\}. \tag{37}$$



(a) 参考信号(点线) 跟踪输出(实线)



(b) 控制输入



(c) 跟踪误差

图 3 仿真结果

Fig. 3 Simulation results

参考文献(References):

[1] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33 (7): 659 – 668.

[2] 中野道雄, 山本裕, 井上悳, 等. 繰り返し制御[M]. 东京: 计测自动制御学会, 1990: 19 – 26.
(NAKANO M, YAMAMOTO Y, INOUE T, et al. *Repetitive Control*[M]. Tokyo: Auto Control Press, 1990: 19 – 26.)

[3] HILLERSTRÖKM G, WALGAMA K. Repetitive control theory and applications-a survey[C] // *Proceedings of IFAC 13th Triennial World Congress*. California: IEEE Press, 1996, D: 1 – 6.

[4] SHE J H, PAN Y, NAKANO M. Repetitive control system with variable structure controller[C] // *The 6th International Workshop on Variable Structure Systems(Advances in variable structure systems-Analysis, integration and applications*. YU Xinghuo, XU Jianxin, Eds). Australia, Gold Coast: World Scientific Publishing, 2000: 273 – 282.

[5] OWENS D H, LI L M, BANKS S P. Multi-periodic repetitive control system: a lyapunov stability analysis for MIMO systems[J]. *International Journal of Control*, 2004, 77 (5): 504 – 515.

[6] 张立强, 杨国来, 龚海峰. 基于重复控制补偿的电液位置伺服系统PID控制[J]. 机床与液压, 2005, 136(8): 112 – 114.
(ZHANG Liqiang, YANG Guolai, GONG Haifeng. PID control for electro-hydraulic position servo system with repetitive control compensation[J]. *Machine Tool and Hydraulics*, 2005, 136(8): 112 – 114.)

[7] PARK S W, JEONG J, YANG H S, et al. Repetitive controller design for minimum track misregistration in hard disk drives[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, 41 (9): 2522 – 2528.

[8] CHEN J W, LIU T S. H_∞ repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, 41(2): 1067 – 1070.

[9] RAMRATH L, SINGH T. A minimax approach to robust repetitive learning control[C] //*International Conference on Control and Automation*. Budapest, Hungary: IEEE Press, 2005: 397 – 403.

[10] DOH T Y, CHUNG M J. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2006, 153(3): 323 – 330.

[11] 李翠艳, 张冬纯, 庄显义. 重复控制综述[J]. 电机与控制, 2005, 9(1): 37 – 46.
(LI Cuiyan, ZHANG Dongchun, ZHUANG Xianyi. Repetitive control—a survey[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(1): 37 – 46.)

[12] 俞立. 鲁棒控制—LMI方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 59 – 64.
(YU Li. *Robust Control: An LMI Approach*[M]. Beijing: TsingHua University Press, 2002: 59 – 64.)

[13] XIE L H, DU C L. H_∞ *Control and Filter of Two-dimensional System*[M]. Berlin: Springer Press, 2002: 5 – 25.

[14] PASZKE W. Guaranteed cost control of uncertain differential linear repetitive processes[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II:Express Briefs*, 2004, 51 (11): 629 – 634.

[15] KHARGONEK P P, PETERSEN I R, ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(3): 356 – 361.

[16] XIE L H. Output feedback H_∞ of systems with parameter uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

[17] BALAS G, CHIANG R, PACKARD A, et al. *Robust Control Toolbox User's Guide*[M]. Natick, MA: Math Works, Inc., 2005: 134 – 157.

作者简介:

兰永红 (1976—), 男, 博士研究生, 目前主要研究方向是学习控制和时滞系统控制, E-mail: lyhcsu@yahoo.com.cn;

吴　敏 (1963—), 男, 博士, 长江学者特聘教授, 博士生导师, 目前主要研究方向是鲁棒控制、过程控制和智能系统, 1999年与中野道雄教授和佘锦华博士一起获国际自动控制联合会(IFAC)控制工程实践优秀论文奖, 本文通信作者, E-mail: min@csu.edu.cn;

佘锦华 (1963—), 男, 博士, 教授, 目前主要研究方向是专家控制和智能机器人研究, 1999年与吴敏教授和中野道雄教授一起获国际自动控制联合会(IFAC)控制工程实践优秀论文奖, E-mail: she@cc.teu.ac.jp;

何　勇 (1969—), 男, 博士, 教授, 目前主要研究方向是时滞系统控制、鲁棒控制和神经网络控制, E-mail: heyong08@yahoo.com.cn.