

文章编号: 1000-8152(2009)01-0089-03

时滞切换系统的时滞依赖稳定

罗正选¹, 张霄力²

(1. 中国电信深圳市分公司, 广东 深圳 518048; 2. 厦门大学自动化系, 福建 厦门 361005)

摘要: 首先利用多Lyapunov 函数方法, 分析常时滞切换系统的时滞依赖稳定性, 并给出此系统时滞依赖稳定的充分条件及切换律的设计; 然后运用共同Lyapunov 函数方法, 研究一类时变时滞切换系统的时滞依赖稳定性, 也给出此系统时滞依赖稳定的充分条件及切换律的设计. 所得结果均可用线性矩阵不等式方法求解. 最后通过仿真验证了结论的正确有效性.

关键词: 时滞切换系统; 时滞依赖稳定; 常时滞; 变时滞
中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Delay-dependent stability of switched linear systems with time-delay

LUO Zheng-xuan¹, ZHANG Xiao-li²

(1. China Telecom Shenzhen Corporation, Shenzhen Guangdong 518048, China;
2. Department of Automation, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China)

Abstract: First, the delay-dependent stability of switched linear systems with time-invariant delays is studied by using multiple Lyapunov function methods. The sufficient conditions of the delay-dependent stability and the design method of the switching law are developed. Then the stability of a class of switched systems with time-varying delays is analyzed by utilizing common Lyapunov function methods. The sufficient condition of the delay-dependent stability and the design method of the switching law are also determined. All results are obtained by using the linear-matrix-inequality method. The conclusions are proved to be valid by simulation.

Key words: switched systems with time-delay; delay-dependent stability; time-invariant delays; time-varying delays

1 引言(Introduction)

自然界中时滞现象是普遍存在, 如机械传动系统, 大型电网系统、网络控制系统等, 都存在着时滞现象, 特别是在动力系统中总是不可避免存在滞后现象. 在工程系统当中, 时滞往往是系统不稳定和系统性能变差的主要原因之一, 因此对时滞系统进行研究显得十分重要, 它受到了许多学者的关注^[1~7].

具有时滞的切换系统称之为时滞切换系统. 时滞切换系统的稳定性可分为两类: 时滞独立稳定和时滞依赖稳定. 时滞独立稳定是指系统的稳定性与时滞没有任何关系的稳定, 时滞依赖稳定是指系统的稳定性与时滞有关系的稳定. 时滞独立稳定的结论对于那些时滞有界或时滞比较小的系统来说, 显然是很保守的. 目前时滞切换系统稳定性大部分都是时滞独立的^[2~6], 极少数稳定性结论是时滞依赖的^[7]. 为了获得保守性较小的稳定性结论, 本文研究线性时滞切换系统的时滞依赖稳定性问题.

文献[5,6]研究了时滞切换系统的时滞独立稳定

性, 没有对时滞依赖稳定性问题进行研究, 也没有涉及时变时滞. 文献[7]利用共同Lyapunov函数方法, 研究了一类线性时滞切换系统的时滞依赖稳定性及鲁棒控制问题. 但没有考虑不具有共同Lyapunov函数的时滞切换系统的时滞依赖稳定性问题. 本文利用多Lyapunov数方法给出线性常时滞切换系统时滞依赖稳定的充分条件及切换律的设计, 同时也对一类时变时滞切换系统的稳定性进行研究. 本文所得结论比文献[5~7]具有更小的保守性, 并且所得结果均可用线性矩阵不等式方法求解, 最后通过仿真验证了结论的正确有效性.

2 系统描述(Systems description)

考虑下面具有 m 个子系统的线性时滞切换系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + M_i x(t - \tau), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: m 是自然数, $i \in T = \{1, 2, \dots, m\}$, 常数 $\tau > 0$ 为时间滞后量, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状

收稿日期: 2007-05-08; 收修改稿日期: 2008-04-30.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774033); 福建省青年科技人才创新项目资金资助项目(2005J006); 厦门大学985二期信息创新平台资助项目.

态, $x(t - \tau) \in \mathbb{R}^n$ 为系统 $t - \tau$ 时刻的状态, 定常矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为系统矩阵, 定常矩阵 $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为时滞矩阵, $\phi(t)$ 为系统的初始状态.

首先给出矩阵完备性定义.

定义1^[8] 若存在对称矩阵集合 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $x'Z_i x \leq 0$ 成立, 则称 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 是完备的; 如果对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 得 $x'Z_i x < 0$ 成立, 则称 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 是严格完备的.

3 主要结果(Main result)

3.1 常时滞切换系统的时滞依赖稳定(Delay-dependent stability for switched systems with time-invariant delay)

定理1 若存在正定矩阵 P_i, Q, V 和适当维数的矩阵 W_i , 且存在同时非负或同时非正的实数 ε_{ij} , 使下列不等式组

$$Z_i = \begin{bmatrix} S_i & -W_i' A_i' V & \tau(W_i' + P_i M_i) \\ -W_i & -Q & M_i' V & 0 \\ V A_i & V M_i & -V & 0 \\ \tau(W_i + M_i' P_i) & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

对 $\forall i \in T = \{1, 2, \dots, m\}$ 都成立, 那么系统(1)在给定的切换策略 $\sigma(x)$ 下是时滞依赖稳定的.

其中:

$$j \in T = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$S_i = (A_i + M_i)' P_i + P_i (A_i + M_i) + W_i' +$$

$$W_i + Q + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} (P_i - P_j),$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} \min\{\arg[\max(x' P_i x)]\}, \varepsilon_{ij} \geq 0; \\ \min\{\arg[\min(x' P_i x)]\}, \varepsilon_{ij} \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

证

情形1 当 $\varepsilon_{ij} \geq 0$ 时, 对系统(1)选取切换策略(3), $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 比较 $x' P_j x (j \in T)$ 值之间的大小, 不妨设其中最大的一个为 $x' P_i x$, 则 $x' P_i x - x' P_j x = x' (P_i - P_j) x \geq 0$.

令

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} | x' (P_i - P_j) x \geq 0, \forall j \in T\},$$

则有

$$\bigcup_{j=1}^m \Omega_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

设

$$\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1, \dots, \tilde{\Omega}_i = \Omega_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{\Omega}_j, \dots,$$

$$\tilde{\Omega}_m = \Omega_m - \bigcup_{j=1}^{m-1} \tilde{\Omega}_j,$$

显然

$$\bigcup_{j=1}^m \tilde{\Omega}_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

且

$$\tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_j = \emptyset, i \neq j.$$

此时当 $x \in \tilde{\Omega}_i$ 时, 切换到第 i 个子系统, 构造 Lyapunov 函数

$$V_i(x) = x' P_i x + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}'(s) X \dot{x}(s) ds d\beta + \int_{t-\tau}^t x'(s) Q x(s) ds, \quad (4)$$

然后利用式(2) $Z_i < 0$ 的条件, 可以证得 $\dot{V}_i(x) < 0$;

情形2 当 $\varepsilon_{ij} \leq 0$ 时, 与情形1相似, 易得 $\dot{V}_i(x) < 0$ 成立. 另一方面, 由切换策略(3)可知, 在切换时刻 $t_k, k \in \mathbb{R}^+$, 对于任意 $\bar{t} > t_k$ 时, 有 $V_{\sigma(\bar{t})} x(\bar{t}) \leq V_{\sigma(t_k)} x(t_k)$. 由多 Lyapunov 函数方法知系统(1)是时滞依赖稳定的. 证毕.

当所有的 $P_i = P (i \in T)$, 由定理1就得到如下具有共同 Lyapunov 函数的切换系统的结论.

推论1 若存在正定矩阵 P, Q, V 和适当维数的矩阵 W_i , 使下列不等式组

$$H_i = \begin{bmatrix} G_i & -W_i' A_i' V & \tau(W_i' + P M_i) \\ -W_i & -Q & M_i' V & 0 \\ V A_i & V M_i & -V & 0 \\ \tau(W_i + M_i' P) & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

对 $\forall i \in T = \{1, 2, \dots, m\}$ 都成立, 那么系统(1)在任意切换下是时滞依赖稳定的. 其中

$$G_i = (A_i + M_i)' P + P (A_i + M_i) + W_i' + W_i + Q.$$

3.2 时变时滞切换系统的时滞依赖稳定(Delay-dependent stability for switched systems with time-varying delay)

当系统(1)中的时间滞后量随时间变化时, 此时系统可用如下形式描述

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + M_i x(t - \tau(t)), \\ x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

其中 $i \in T = \{1, 2, \dots, m\}$, 实数 $h > 0$, 且

$$\dot{\tau}(t) \leq \alpha < 1. \quad (7)$$

下面利用共同 Lyapunov 函数方法, 给出系统(6)稳定的充分条件及切换律的设计.

定理 2 若系统(6)满足式(7), 且存在正定矩阵 P 与 R , 使得矩阵集合 $\{\tilde{Z}_i\}$ 是严格完备的, 那么系统(6)在给定的切换策略 $\sigma(x)$ 下是渐近稳定的. 其中

$$i \in T = \{1, 2, \dots, m\},$$

$$\tilde{Z}_i = A_i' P + P A_i + R + \frac{1}{1-\alpha} P M_i R^{-1} M_i' P,$$

$$\sigma(x) = \min\{\arg[\min(x' \tilde{Z}_i x < 0)]\}. \quad (8)$$

证 系统(6)在切换策略(8)下切换到第 i 个子系统时, 选取 Lyapunov 函数

$$V(x) = x' P x + \int_{t-\tau(t)}^t x'(s) R x(s) ds,$$

利用切换策略(8)和 $\{\tilde{Z}_i\}$ 的严格完备性, 可以求得 $\dot{V}(x) < 0$, 从而证明系统(6)是渐近稳定的. 证毕.

4 仿真(Simulation)

对下面具有 3 个子系统的线性时滞切换系统进行仿真

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + M_i x(t - \tau), \\ x(t) = \phi(t). \end{cases}$$

其中: $t \in [-\tau, 0], i = 1, 2, 3, \tau = 0.5$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 & 5 \\ 0 & -5.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 3.3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1.1 & 0.8 \\ -1 & -5.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & -5.6 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 0.8 \\ 0.3 & -6.5 & 0 \\ 0.01 & 0.5 & -6 \end{bmatrix}; M_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

根据定理1, 利用Schur补引理求解式(2)分别可以求得矩阵 $P_1, P_2, P_3, W_1, W_2, W_3$, 以及 Q, V . 在给定初始条件 $x_0 = [10, 5, -8]'$, 根据切换策略(3)可得到时滞切换系统的状态响应曲线, 如图1所示(x_1, x_2, x_3 表示状态 x 的 3 个分量).

5 结论(Conclusion)

本文利用多Lyapunov函数方法给出线性常时滞切换系统时滞依赖稳定性的充分条件和切换律的设计方法. 所得的结论是时滞相关的, 此结论并不要求所有的子系统都稳定, 对具有不稳定子系统的时滞切换系统同样适用. 同时也获得了一个在任意切换下都是时滞依赖稳定的充分条件. 定理1不仅适用于系统(1), 而且对于时间滞后量小于系统(1)的时间滞后量 τ 的自治线性时滞切换系统同样适用. 其次, 也对时变时滞切换系统的稳定性进行了探讨, 并获得了此切换系统稳定的一个充分条件及切换策略的设

计. 本文所有结果都能用线性矩阵不等式方法求解, 切换律的选取也较为简单, 有利于计算机求解与仿真, 便于工程实现.

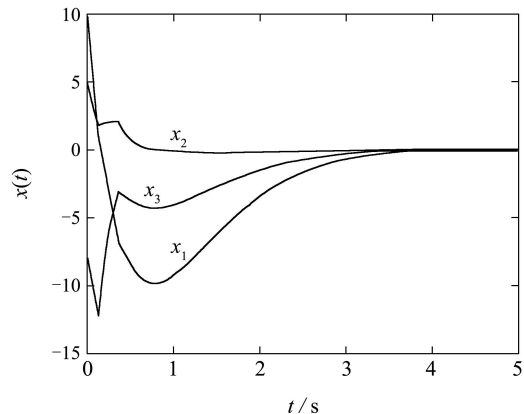


图 1 状态响应曲线

Fig. 1 State response curves

参考文献(References):

- [1] 秦元勋, 刘永清, 王联, 等. 带有时滞的动力系统的运动稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1989.
(QIN Yuanxun, LIU Yongqing, WANG Lian, et al. *Motional Stability of Dynamic Systems with Time-delay*[M]. Beijing: Science Press, 1989.)
- [2] WANG Y J, XIE G M, WANG L. Controllability of switched time-delay systems under constrained switching[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 286(2): 397 - 421.
- [3] 王仁明, 关治洪, 刘新芝. 具有输入时滞切换系统的稳定性分析与控制[J]. 三峡大学学报(自然科学版), 2004, 26(2): 170 - 172.
(WANG Renming, GUAN Zhihong, LIU Xinzhi. Stability analysis and control for switched systems with input-delay[J]. *Journal of China Three Gorges University(Natural Sciences)*, 2004, 26(2): 170 - 172.)
- [4] 陈松林, 姚郁. 一类时滞线性切换系统的稳定性和镇定[J]. 黑龙江大学学报自然科学版, 2006, 23(2): 206 - 210.
(CHEN Songlin, YAO Yu. Stability and stabilization of a class of switched linear systems with state delay[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2006, 23(2): 206 - 210.)
- [5] 孙洪飞, 赵军, 高晓东. 带有时滞扰动的线性切换系统的稳定性[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 431 - 434.
(SUN Hongfei, ZHAO Jun, GAO Xiaodong. Stability of linear switched systems with delayed perturbations[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(4): 431 - 434.)
- [6] SEHJEONG K, SUE A C, LIU X Z. Stability of a class of linear switching systems with time delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2006, 53(2): 384 - 393.
- [7] SUN Y G, WANG L, XIE G M. Stability of switched systems with time-varying delays: Delay-dependent common Lyapunov functional approach[C] // *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: [s.n.], 2006, 6: 1544 - 1549.
- [8] SKAFIDAS E, EVANS R J, SAVKIN A V, et al. Stability results for switched controller systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553 - 564.

作者简介:

罗正选 (1981—), 男, 硕士, 研究方向为切换系统的稳定性与鲁棒控制, E-mail: luozhengxuan3000@yahoo.com.cn;

张霄力 (1970—), 男, 博士, 厦门大学副教授, 研究方向为复杂系统的结构研究、混合系统、切换系统稳定性, 通讯作者: E-mail: zhxl@xmu.edu.cn.