

文章编号: 1000-8152(2009)01-0097-06

## 资源约束系统的控制与调度协同优化方法

李祖欣<sup>1,2</sup>, 王万良<sup>2</sup>, 雷必成<sup>2</sup>, 陈惠英<sup>1,2</sup>

(1. 湖州师范学院 信息工程学院, 浙江 湖州 313000; 2. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

**摘要:** 对于一类通信约束的网络控制系统, 应用通信序列的概念和混合逻辑动态的构架, 将其建模成一类集成控制和调度的资源约束系统模型. 采用线性矩阵不等式来描述离散周期系统的周期通信序列和 $H_\infty$ 控制的协同优化问题, 并用一种递增优化序列算法来求解优化的调度策略及其相应的渐近稳定及 $r$ 指数稳定的 $H_\infty$ 控制器. 该算法结合线性矩阵不等式凸优化问题解决了调度与控制的协同设计问题, 同时也节省了搜索优化的计算时间.

**关键词:** 资源约束系统; 网络控制系统; 控制与调度协同设计; 混合逻辑动态系统; 递增优化序列算法

中图分类号: TP273

文献标识码: A

## Optimal control and scheduling of system with resource constraints

LI Zu-xin<sup>1,2</sup>, WANG Wan-liang<sup>2</sup>, LEI Bi-cheng<sup>2</sup>, CHEN Hui-ying<sup>1,2</sup>

(1. School of Information Engineering, Huzhou Teachers College, Huzhou Zhejiang 313000, China;

2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

**Abstract:** By employing the notion of communication sequence and mixed-logical-dynamical (MLD) framework, a networked control system subject to communication constraints is modeled as a resource-constrained system under integrated control and scheduling. Linear matrix inequalities (LMIs) are used to depict the periodical communication sequence of the discrete-time linear periodic system, and the co-design criteria of the  $H_\infty$  controller. A recursively increasing optimal sequence algorithm, in conjunction with the convex optimization of the LMIs, is employed to find the optimal solutions for the scheduling strategy, and the control law for the  $H_\infty$  controller of asymptotical stability and  $r$ -exponential stability, respectively. The computational cost is greatly reduced.

**Key words:** resource-constrained system; networked control systems; control and scheduling co-design; mixed logical dynamical system; increasing optimal sequence algorithm

### 1 引言(Introduction)

在当今的分布式控制系统中, 信息的交互往往通过共享网络来实现. 这种网络控制系统(networked control systems, NCS)具有诸多优点, 但一般要受到带宽资源的限制. 带宽受限存在着诸多原因: 如确定性的实时通信, 特别是信道含有噪声的情况、自治的通信节点为了延长使用寿命而减小发射功率、现代工业控制逐渐增加的安全防护和操作舒适性的部件也是要分享一定的带宽<sup>[1]</sup>.

带宽受限的通信网络介入传统点对点的控制系统使得这类NCS的分析变得更为复杂. 选择合适的控制方法<sup>[2]</sup>或采用合适的调度策略均能补偿或改善网络的介入对系统性能的影响, 但资源调度与控制协同设计是优化NCS性能的主要方法. 为了描述系统输入和输出之间通信资源的分

配问题, Brockett<sup>[3]</sup>于1995年提出通信序列的概念. 文[1, 4~7]借助通信序列的概念从控制与网络资源调度的角度对系统的性能进行了优化.

控制网络不同于偶发数据包的数据网络, 它是周期性地发送数据且具有严格的时间要求. 文[8]指出, 在大部分的控制网络中信息传送时间是可以忽略的, 网络时延主要是由于节点竞争或网络规划算法不完善所致. 因此采用新的传输协议或调度策略避免信息传送的碰撞, 同时集成调度和控制的协同设计是优化NCS性能的最佳途径. 文[4]在采用周期为 $N$ 的通信序列进行调度时, 将 $n$ 维的控制系统仿射至 $(2N^2 - N)n$ 的高维空间进行分析; 文[1, 5, 6]解决了网络只存在于控制器和执行器之间的控制命令传送的优化调度算法; 而文[7]对于网络只存在于传感器和控制器之间的消息调度进行了分析.

受文[5,7]的启发,结合通信序列的概念及混合逻辑动态(mixed logical dynamical, MLD)<sup>[9]</sup>构架,将NCS转化成一类基于MLD的集成控制和调度的资源约束系统模型.与文[4]采用的提升技术相比,该方法不用将系统仿射至高维系统进行分析,同时与文[1,5]提及的分枝定界法解决混合整型二次规划问题和穷举法解决二次规划问题相比,优化求解方法不会随着 $N$ 的增加而产生组合爆炸问题.

## 2 系统模型描述(System model formulation)

MLD系统模型是在连续性的基础上进行离散化扩展,并由相互依赖的物理规律、逻辑法则和操作约束共同描述系统.基于MLD的集成控制和调度的资源约束系统模型的信息调度如图1所示.应用通信序列进行信息调度其实是由一系列的逻辑法则和操作约束组成,这类NCS的模型符合MLD的特性.

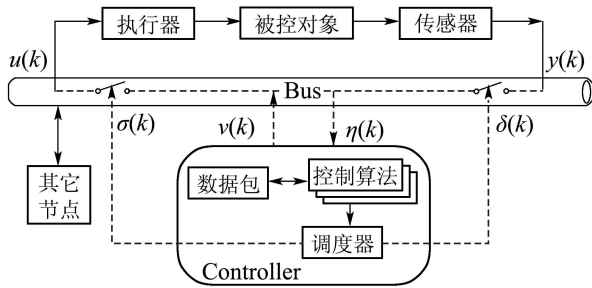


图1 信息调度框图

Fig. 1 Illustrating message scheduling

设被控对象表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1\omega(k) + B_2u(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_{11}\omega(k) + D_{12}u(k), \\ y(k) = C_2x(k) + D_{21}\omega(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中: 状态向量 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , 控制量 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , 测量输出 $y(k) \in \mathbb{R}^r$ , 外部扰动 $\omega(k) \in \mathbb{R}^p$ , 被调输出 $z(k) \in \mathbb{R}^q$ , 所有的系统矩阵均是适维的.

在每个周期内,网络能传送 $b_s(b_s \leq r)$ 个测量信号和 $b_c(b_c \leq m)$ 个控制信号,为了允许调度策略更具灵活性, $b_s$ 和 $b_c$ 可以周期变化,但应满足 $b_s + b_c \leq m + r$ .与文[6,10]的每个采样周期只有一个控制信号进行传送的建模方法相比,该方法允许带宽容量和系统相关参数分开考虑,同时最大限度地利用网络资源<sup>[5]</sup>.

资源约束系统的调度矢量 $\Delta(k) = [\delta^T(k) \sigma^T(k)]^T$ 由布尔量组成,表示在第 $k$ 个采样周期内哪些节点被允许进行传输. $\eta(k) \in \mathbb{R}^{b_s}$  ( $v(k) \in \mathbb{R}^{b_c}$ )表示在第 $k$ 次采样中部分的测量信号(控制信号)通过共享网络成功地传送至控制器(执行器).

**定义1** 当采样信号 $y_i(k)$ 被控制器读入,或者控制信号 $u_j(k)$ 被更新,则相应的 $\delta_i(k)=1$ 或 $\sigma_j(k)=1$ ,

否则 $\delta_i(k)=0$ 或 $\sigma_j(k)=0$ ,则称系统是在由一系列规则组成的调度矢量 $\Delta(k)$ 作用下的网络调度.

网络资源受限的通信约束条件可表示为

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 < \|\Delta(k)\|_2^2 \leq b_s + b_c. \quad (2)$$

当网络只存在传感器和控制器之间(控制器和执行器之间)时,通信约束条件为

$$0 < \|\Delta(k)\|_2^2 \leq b_s, (0 < \|\Delta(k)\|_2^2 \leq b_c).$$

对于传感器-控制器链路,当 $b_s$ 个测量信号成功传送至控制器时, $\eta_i(k) = y_j(k), i=1, \dots, b_s, j=1, \dots, r$ .控制器的输入 $\eta(k)$ 可用如下的逻辑公式描述:

$$\delta_j(k) = 1, \sum_{l=1}^j \delta_l(k) = i \Rightarrow \eta_i(k) = y_j(k). \quad (3)$$

定义映射矩阵 $[M_\delta(k)]_{1 \leq i \leq b_s, 1 \leq j \leq r}$ :

$$\begin{cases} [M_\delta(k)]_{ij} = 1, \text{ 当 } \delta(k) = 1 \text{ 且 } \sum_{l=1}^j \delta_l(k) = i, \\ [M_\delta(k)]_{ij} = 0, \text{ 其他.} \end{cases} \quad (4)$$

则传感器输出与控制器的关系为

$$\eta(k) = M_\delta(k)y(k). \quad (5)$$

对于控制器-执行器链路,当 $b_c$ 个控制信号成功传送至执行器时, $u_i(k) = v_j(k), i=1, \dots, m, j=1, \dots, b_c$ ,而其它未被更新的控制量保持上一次的值.执行器的输入 $u(k)$ 可用如下的逻辑公式描述:

$$\begin{cases} \sigma_j(k) = 1, \sum_{l=1}^i \sigma_l(k) = j \Rightarrow u_i(k) = v_j(k), \\ \sigma_j(k) = 0, \Rightarrow u_i(k) = u_i(k-1). \end{cases} \quad (6)$$

同样定义映射矩阵 $[E_\sigma(k)]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq b_c}$ :

$$\begin{cases} [E_\sigma(k)]_{ij} = 1, \text{ 当 } \sigma(k) = 1 \text{ 且 } \sum_{l=1}^i \sigma_l(k) = j, \\ [E_\sigma(k)]_{ij} = 0, \text{ 其他.} \end{cases} \quad (7)$$

以及 $F_\sigma(k) = \text{diag}\{1 - \sigma_1(k), \dots, 1 - \sigma_m(k)\}$ ,则控制器输出与执行器的关系为

$$u(k) = E_\sigma(k)v(k) + F_\sigma(k)u(k-1). \quad (8)$$

设 $\tilde{x}(k) = [x^T(k) \ u^T(k-1)]^T$ ,  $\tilde{z}(k) = [z^T(k) \ u^T(k)]^T$ ,则上述基于MLD的集成调度和控制的模型为

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(k)\tilde{x}(k) + \tilde{B}_1(k)\omega(k) + \tilde{B}_2(k)v(k), \\ \tilde{z}(k) = \tilde{C}_1(k)\tilde{x}(k) + \tilde{D}_{11}(k)\omega(k) + \tilde{D}_{12}(k)v(k), \\ \eta(k) = \tilde{C}_2(k)\tilde{x}(k) + \tilde{D}_{21}(k)\omega(k). \end{cases} \quad (9)$$

其中:

$$\tilde{A}(k) = \begin{bmatrix} A & B_2 F_\sigma(k) \\ 0_{m,n} & F_\sigma(k) \end{bmatrix}, \tilde{B}_1(k) = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{m,p} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_2(k) &= \begin{bmatrix} B_2 E_\sigma(k) \\ E_\sigma(k) \end{bmatrix}, \tilde{C}_1(k) = \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} F_\sigma(k) \\ 0_{m,n} & F_\sigma(k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{11}(k) &= \begin{bmatrix} D_{11} \\ 0_{m,p} \end{bmatrix}, \tilde{D}_{12}(k) = \begin{bmatrix} D_{12} E_\sigma(k) \\ E_\sigma(k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_2(k) &= \begin{bmatrix} M_\delta(k) C_2 & 0_{b_s, m} \end{bmatrix}, \tilde{D}_{21}(k) = M_\delta(k) D_{21}.\end{aligned}$$

这种模型具有如下特征: 描述对象动态采样的方程(1); 描述资源约束条件的不等式(2); 用于描述调度策略的逻辑表达式(3)和(6).

### 3 调度与 $H_\infty$ 控制协同设计(Scheduling and H-infinity co-design)

#### 3.1 渐近稳定性(Asymptotic stability)

设一个周期性的输出反馈控制器

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}(k)\eta(k), \\ v(k) &= \hat{C}(k)\hat{x}(k) + \hat{D}(k)\eta(k).\end{aligned}\quad (10)$$

此处 $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\eta(k) \in \mathbb{R}^{b_s}$ ,  $v(k) \in \mathbb{R}^{b_c}$ , 系统矩阵均是适维且是周期的. 定义控制器的参数为

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \hat{A}(k) & \hat{B}(k) \\ \hat{C}(k) & \hat{D}(k) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

设 $\xi(k) = [\tilde{x}^T(k) \hat{x}^T(k)]^T$ , 则闭环控制系统为

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= \bar{A}(k)\xi(k) + \bar{B}(k)\omega(k), \\ \tilde{z}(k) &= \bar{C}(k)\xi(k) + \bar{D}(k)\omega(k).\end{aligned}\quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned}\bar{A}(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k) & \tilde{B}_2(k)\hat{C}(k) \\ \hat{B}(k)\tilde{C}_2(k) & \hat{A}(k) \end{bmatrix}, \\ \bar{B}(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k) \\ \hat{B}(k)\tilde{D}_{21}(k) \end{bmatrix}, \\ \bar{C}(k) &= [\tilde{C}_1(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k) \quad \tilde{D}_{12}(k)\hat{C}(k)], \\ \bar{D}(k) &= \tilde{D}_{11}(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k).\end{aligned}$$

**定义 2** 给定 $\gamma > 0$ , 对于系统(12)在零初始状态下具有 $H_\infty$ 性能 $\gamma$  当且仅当系统渐近稳定且满足

$$\sup_{0 \neq \omega \in l_2} \frac{\|\tilde{z}\|_2}{\|\omega\|_2} < \gamma. \quad (13)$$

**引理 1**<sup>[11]</sup> 对于周期为 $N$ 的系统(12)是渐近稳定的并且具有 $H_\infty$ 性能 $\gamma$  当且仅当存在周期为 $N$ 的实对称矩阵 $P(k) = P(k+N)$ , 同时满足

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T(k)P(k+1)\bar{A}(k) - P(k) + \bar{C}^T(k)\bar{C}(k) \\ \bar{B}^T(k)P(k+1)\bar{A}(k) + \bar{D}^T(k)\bar{C}(k) \\ \bar{A}^T(k)P(k+1)\bar{B}(k) + \bar{C}^T(k)\bar{D}(k) \\ \bar{B}^T(k)P(k+1)\bar{B}(k) + \bar{D}^T(k)\bar{D}(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

**定理 1** 给定 $\gamma > 0$ , 在调度策略 $\Delta(k)$ 作用下, 系统存在输出反馈 $H_\infty$ 控制器当且仅当存在周期实对称矩阵 $X(k)$ ,  $Y(k)$ 和矩阵 $\hat{A}(k)$ ,  $\hat{B}(k)$ ,  $\hat{C}(k)$ ,  $\hat{D}(k)$ ,  $k=0, \dots, N-1$ , 使下列的LMI具有可行解:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & -I & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & 0 \\ * & \Pi_{22} & \hat{A}(k) & \Pi_{24} & \Pi_{25} & 0 \\ * & * & -X(k) & -I & 0 & \Pi_{36} \\ * & * & * & -Y(k) & 0 & \Pi_{46} \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Pi_{56} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} X(k) & I \\ I & Y(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned}\Pi_{11} &= -X(k+1), \\ \Pi_{13} &= \tilde{A}(k)X(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{C}(k), \\ \Pi_{14} &= \tilde{A}(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k), \\ \Pi_{15} &= \tilde{B}_1(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k), \\ \Pi_{22} &= -Y(k+1), \\ \Pi_{24} &= Y(k+1)\tilde{A}(k) + \hat{B}(k)\tilde{C}_2(k), \\ \Pi_{25} &= Y(k+1)\tilde{B}_1(k) + \hat{B}(k)\tilde{D}_{21}(k), \\ \Pi_{36} &= [\tilde{C}_1(k)X(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{C}(k)]^T, \\ \Pi_{46} &= [\tilde{C}_1(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k)]^T, \\ \Pi_{56} &= [\tilde{D}_{11}(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k)]^T,\end{aligned}$$

“\*” 依据矩阵对称性得到.

**证** 矩阵不等式(14)等价于

$$\begin{bmatrix} -P(k+1) & * & * & 0 \\ \bar{A}^T(k)P(k+1) - P(k) & 0 & * & \\ \bar{B}^T(k)P(k+1) & 0 & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \bar{C}(k) & \bar{D}(k) & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

记

$$\begin{aligned}P(k) &= \begin{bmatrix} Y(k) & N(k) \\ N^T(k) & W(k) \end{bmatrix}, \\ P^{-1}(k) &= \begin{bmatrix} X(k) & M(k) \\ M^T(k) & Z(k) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

定义

$$F_1(k) = \begin{bmatrix} X(k) & I \\ M^T(k) & 0 \end{bmatrix}, F_2(k) = \begin{bmatrix} I & Y(k) \\ 0 & N^T(k) \end{bmatrix},$$

对(17)分别左乘 $\text{diag}\{F_1^T(k+1), F_1^T(k), I, I\}$  和右乘 $\text{diag}\{F_1(k+1), F_1(k), I, I\}$ , 并定义变量替换公式

$$\begin{cases} \hat{D}(k) = \hat{D}(k), \\ \hat{C}(k) = \hat{D}(k)\tilde{C}_2(k)X(k) + \hat{C}(k)M^T(k), \\ \hat{B}(k) = Y(k+1)\tilde{B}_2(k)\hat{D}(k) + N(k+1)\hat{B}(k), \\ \hat{A}(k) = Y(k+1)[\tilde{A}(k) + \\ \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k)]X(k) + \\ N(k+1)\hat{B}(k)\tilde{C}_2(k)X(k) + \\ Y(k+1)\tilde{B}_2(k)\hat{C}(k)M^T(k) + \\ N(k+1)\hat{A}(k)M^T(k), \end{cases} \quad (18)$$

则可得式(15).  $P(k) > 0$ 可得式(16). 证毕.

### 3.2 $r$ 指数稳定性( $r$ -exponential stability)

周期为 $N$ 、系统矩阵为 $A(k)$ 的离散周期系统的转移矩阵通过一个周期后得到单值性矩阵<sup>[12]</sup>

$$\Phi(k+N, k) = A(k+N-1)A(k+N-2) \cdots A(k). \quad (19)$$

它与下式的时不变离散系统的特征值相同:

$$x((l+1)N+k) = \Phi(k+N, k)x(lN+k). \quad (20)$$

该系统特征值与 $k$ 无关, 当谱半径小于1时, 该系统渐近稳定<sup>[12]</sup>. 相应地, 给定一个实数 $0 < r < 1$ , 当且仅当系统(20)的单值性矩阵的谱半径小于 $r^N$ 时, 则称该周期性离散系统为 $r$ 指数稳定<sup>[11]</sup>.

**引理 2**<sup>[11]</sup> 对于周期为 $N$ 的系统(12)是 $r$ 指数稳定并且具有 $H_\infty$ 性能 $\gamma$ 当且仅当存在周期实对称矩阵 $P(k) = P(k+N)$ ,  $k=0, \dots, N-1$ , 同时满足

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T(k)P(k+1)\bar{A}(k) - r^2P(k) + \bar{C}^T(k)\bar{C}(k) \\ \bar{B}^T(k)P(k+1)\bar{A}(k) + \bar{D}^T(k)\bar{C}(k) \\ \bar{A}^T(k)P(k+1)\bar{B}(k) + \bar{C}^T(k)\bar{D}(k) \\ \bar{B}^T(k)P(k+1)\bar{B}(k) + \bar{D}^T(k)\bar{D}(k) - \gamma^2I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

**定理 2** 给定一个标量 $\gamma > 0$ 、稳定度 $r$ 及调度策略 $\Delta(k)$ , 系统存在 $H_\infty$ 控制器当且仅当存在周期实对称矩阵 $X(k)$ ,  $Y(k)$ 和矩阵 $\hat{A}(k)$ ,  $\hat{B}(k)$ ,  $\hat{C}(k)$ ,  $\hat{D}(k)$ ,  $k=0, \dots, N-1$ , 使下列的LMIs具有可行解

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} - I & \Omega_{13} & \Omega_{14} & \Omega_{15} & 0 \\ * & \Omega_{22} & \hat{A}(k) & \Omega_{24} & \Omega_{25} & 0 \\ * & * & -r^2X(k) & -r^2I & 0 & \Omega_{36} \\ * & * & * & -r^2Y(k) & 0 & \Omega_{46} \\ * & * & * & * & -\gamma^2I & \Omega_{56} \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} X(k) & I \\ I & Y(k) \end{bmatrix} > 0. \quad (23)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= -X(k+1), \\ \Omega_{13} &= \tilde{A}(k)X(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{C}(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{14} &= \tilde{A}(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k), \\ \Omega_{15} &= \tilde{B}_1(k) + \tilde{B}_2(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k), \\ \Omega_{22} &= -Y(k+1), \\ \Omega_{24} &= Y(k+1)\tilde{A}(k) + \hat{B}(k)\tilde{C}_2(k), \\ \Omega_{25} &= Y(k+1)\tilde{B}_1(k) + \hat{B}(k)\tilde{D}_{21}(k), \\ \Omega_{36} &= [\tilde{C}_1(k)X(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{C}(k)]^T, \\ \Omega_{46} &= [\tilde{C}_1(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{C}_2(k)]^T, \\ \Omega_{56} &= [\tilde{D}_{11}(k) + \tilde{D}_{12}(k)\hat{D}(k)\tilde{D}_{21}(k)]^T. \end{aligned}$$

通过对矩阵 $I - X(k)Y(k)$ 的奇异值分解得到满秩的可逆矩阵 $M(k)$ 和 $N(k)$ , 然后通过式(18)得到相应的控制器参数. 设 $\rho = \gamma^2$ , 调度与控制协同优化的 $H_\infty$ 控制器可以通过求解以下的优化问题得到:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta(k), \Gamma(k)} & \rho(\Delta(k), \Gamma(k)), \\ \text{s.t.} & (15), (16) \text{或} (22), (23). \end{aligned} \quad (24)$$

该优化问题由于受到LMI秩的约束以及通信序列只取0和1两个整数值的约束, 因此整个优化问题变为非凸的优化问题, 很难直接求解.

## 4 优化求解方法(Optimal solution)

为了解决上述的控制与调度协同设计的求解问题, 采用一种递增优化序列算法(increasing optimal sequence, IOS)进行求解. 算法如下:

**Step 1** 按每个节点共享一次通信资源为原则确定初始的周期通信序列 $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r\}$ , 此时 $H_\infty$ 性能为 $\gamma^0$ . 如果 $\gamma^0 - \gamma^{\text{opt}} < \varepsilon$  ( $\gamma^{\text{opt}}$ 为无通信约束的最优性能值,  $\varepsilon$ 为给定一个性能差值), 则通信序列周期为 $r$ ;

**Step  $i$**  ( $2 \leq i \leq N - r$ ,  $N$ 为预设的通信序列周期): 逐步增加通信序列周期, 增加部分的矢量表示为 $\Delta_p$ , 在新增加的 $r$ 个组合中找出使 $H_\infty$ 性能最小的 $\Delta_{p*}$ , 并与原来的矢量组成新的通信序列, 即 $\Delta \leftarrow \{\Delta, \Delta_{p*}\}$ ;

**Step  $i+1$**  如果 $\gamma_i - \gamma^{\text{opt}} < \varepsilon$  或  $\gamma_i - \gamma_{i-1} \geq 0$  或  $i = N - r$ , 则停止计算, 得到 $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r, \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_h\}$  ( $r < h \leq N$ )以及相应的控制器参数. 否则 $i = i + 1$ , 回到Step  $i$ .

当 $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N\}$ ,  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N\}$ 时, 第 $k$ 个采样周期指向周期通信序列的调度指针为 $I(k) = k \bmod N + 1$ . 相应的调度策略以及控制器参数分别为 $\Delta(k) = \Delta_{I(k)}$ 和 $\Gamma(k) = \Gamma_{I(k)}$ .

## 5 示例(Illustrative example)

考虑形如式(1)的离散时不变线性系统, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1.45 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.2 & 1.1 & 0.75 \\ 0 & -1 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T, C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 1], C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = D_{12} = 1, D_{21} = [1 \ 1]^T.$$

当  $b_s = 2, b_c = 1$  时,  $\gamma^{\text{opt}} = 6.4499$ .

当  $b_s = 1, b_c = 1$  时, 其初始的通信序列为  $\{\Delta_1, \Delta_2\}$  ( $\Delta_1 = [1 \ 0 \ 1]^T, \Delta_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ ), 按照 IOS 算法, 系统渐近稳定, 相应  $N$  值的  $H_\infty$  性能及计算过程见表 1. 从中可

得当  $N = 6$  时, 优化的通信序列为  $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1\}$ . 由于第 1 个子系统比第 2 个子系统具有更大的谱半径, 故对第 1 个子系统的信息传送比另一个子系统更为频繁.

当对系统取不同的稳定度  $r$  时, 系统就具有不同的衰减特性. 表 2 为系统调度参数为  $b_s = b_c = 1, \Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1\}$  时取不同稳定度  $r$  值时的  $H_\infty$  性能及其谱半径, 谱半径落在  $r^N$  内. 图 2 即为相应稳定度的闭环系统特征根的分布图, 虚线即为谱半径不应超出的范围. 从表 2 及图 2 中看出, 随着稳定度  $r$  的减小, 谱半径也相应缩小, 系统具有更快的衰减特性, 但相应的  $H_\infty$  性能增大, 系统的鲁棒性能减弱. 当  $r < 0.62$  时无可行解, 系统无法镇定.

表 1 IOS 算法求解优化的通信序列和  $H_\infty$  性能

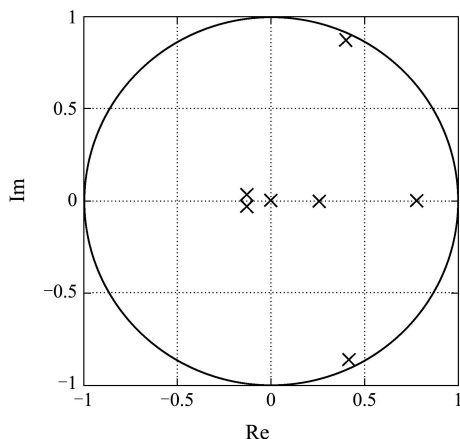
Table 1 A solution to optimal communication sequence and H-infinity norm via IOS algorithm

| Step    | 周期      | 优化的通信序列                                                          | $\gamma$ | 通信序列                                                             | $\gamma$ |
|---------|---------|------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------|----------|
| $i = 1$ | $N = 2$ | $\{\Delta_1, \Delta_2\}$                                         | 7.9901   |                                                                  |          |
| $i = 2$ | $N = 3$ | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1\}$                               | 7.1838   | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_2\}$                               | 9.3323   |
| $i = 3$ | $N = 4$ | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1\}$                     | 6.7703   | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2\}$                     | 7.9901   |
| $i = 4$ | $N = 5$ | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1\}$           | 6.4937   | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2\}$           | 7.7075   |
| $i = 5$ | $N = 6$ | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1\}$ | 6.4499   | $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2\}$ | 7.4483   |

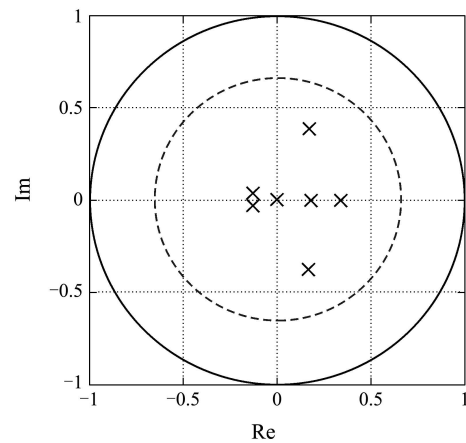
表 2 不同稳定度的  $H_\infty$  性能及其谱半径

Table 2 H-infinity norm and spectral radius with different stability degree

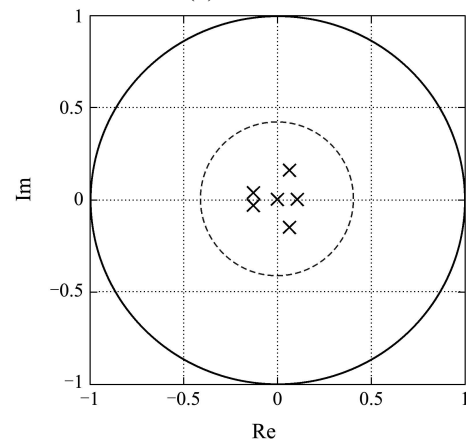
| 稳定度        | $H_\infty$ 性能 | 谱半径    | $r^N$  |
|------------|---------------|--------|--------|
| $r = 1.00$ | 6.7703        | 0.9592 | 1.0000 |
| $r = 0.90$ | 16.5969       | 0.4175 | 0.6561 |
| $r = 0.80$ | 41.0263       | 0.1678 | 0.4096 |
| $r = 0.70$ | 107.7596      | 0.1294 | 0.2401 |
| $r = 0.65$ | 185.9407      | 0.1291 | 0.1785 |



(a)  $r = 1$



(b)  $r = 0.9$



(c)  $r = 0.8$

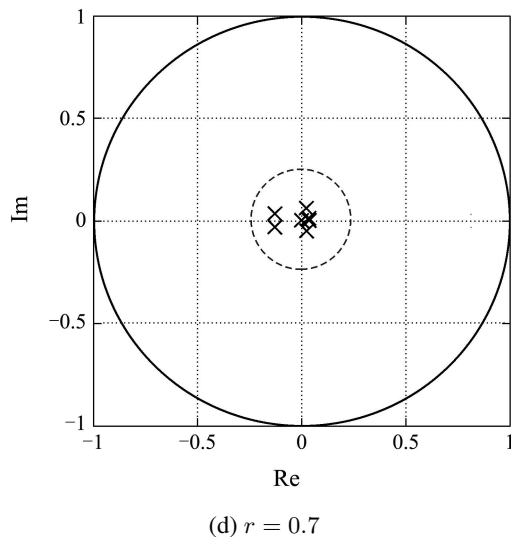


图2 不同稳定度的系统特征根分布图

Fig. 2 Eigenvalues of the system with different stability degree

## 6 结论(Conclusion)

应用周期通信序列概念及混合逻辑动态构架, 将网络控制系统建模成一类基于MLD的集成控制与调度的资源约束系统. 该模型能充分利用网络资源, 调度策略更具灵活性. 应用IOS算法来求解控制与调度协同设计的优化调度策略及控制器的参数. 该方法不仅考虑了优化调度策略、系统鲁棒性能, 而且还节省了优化值搜索的时间. 同时, 这种模型及分析方法也适用多输入多输出系统或多个独立回路的网络控制系统.

## 参考文献(References):

- [1] GAID M M B, CELA A, HAMAM Y. Optimal integrated control and scheduling of systems with communication constraints[C]// *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision Control and European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE Press, 2005: 854 – 859.
- [2] GE Y, TIAN L, LIU Z N. Survey on the stability of networked control systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2007, 5(4): 374 – 379.
- [3] BROCKETT R. Stabilization of motor networks[C]// *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE Press, 1995: 1484 – 1488.
- [4] HRISTU D, MORGANSEN K. Limited communication control[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(4): 193 – 205.
- [5] GAID M M B, CELA A, HAMAM Y. Optimal integrated control and scheduling of networked control systems with communication constraints: application to a car suspension system[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(4): 776 – 787.
- [6] REHBINDER H, SANFRIDSON M. Scheduling of a limited communication channel for optimal control[J]. *Automatica*, 2004, 40(3): 491 – 500.
- [7] LU L, XIE L, FU M. Optimal control of networked systems with limited communication: a combined heuristic and convex optimization approach[C]// *Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Hawaii, USA: IEEE Press, 2003, 2: 1194 – 1199.
- [8] LIAN F L, MOYNE J, TILBURY D. Performance evaluation of control networks: ethernet, controlnet, and devicenet[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 66 – 83.
- [9] BEMPORAD A, MORARI M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints[J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 407 – 427.
- [10] GOODWIN G C, HAIMOVICH H, QUEVEDO D E, et al. A moving horizon approach to networked control systems design[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1562 – 1572.
- [11] BITTANTI S, CUZZOLA F A. An LMI approach to periodic discrete-time unbiased filtering[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(1): 21 – 35.
- [12] YAN W Y, BITMEAD R R. Control of linear discrete-time periodic systems: a decentralized control approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(10): 1644 – 1648.

## 作者简介:

**李祖欣** (1972—), 男, 副教授, 博士研究生, 目前研究方向为网络控制系统、智能控制, E-mail: lzcx@hutc.zj.cn;

**王万良** (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为计算机控制与智能化、计算机网络技术与应用、计算机集成自动化系统、生产计划与调度等, E-mail: wangwanliang@zjut.edu.cn;

**雷必成** (1974—), 男, 副教授, 博士研究生, 目前研究方向为网络控制系统、嵌入式系统, E-mail: leibc@tzc.edu.cn;

**陈惠英** (1979—), 女, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为网络控制系统, E-mail: hychen@hutc.zj.cn.