文章编号: 1000−8152(2009)02−0127−06

高精度快速非线性离散跟踪微分器

谢云德, 龙志强

(国防科技大学 磁悬浮技术研究中心, 湖南 长沙 410073)

摘要: 对二阶连续系统最速控制设计中采用的综合函数作了分析, 得到了一种新的高精度、快速离散非线性跟踪微分器, 并对其滤波特性、微分提取特性进行了初步分析. 分析表明, 这种跟踪微分器对输入信号具有很好的跟踪能力, 能够滤除噪声和提取微分信号. 相位延迟小, 幅值衰减小, 因而具有跟踪的快速性、准确性. 最后, 给出了数值仿真例子来验证该算法; 并给出了一个实验结果, 证实了算法的可行性.

关键词: 跟踪微分器; 离散系统; 高精度; 非线性; 滤波器

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

A high-speed nonlinear discrete tracking-differentiator with high precision

XIE Yun-de, LONG Zhi-qiang

(Engineering Research Center of Maglev, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: The penalty function employed in the time-optimal control design for a 2nd-order continuous-time system is analyzed. A high-speed nonlinear discrete tracking-differentiator with high precision is presented, its performances of signal filtration and signal differentiation are then briefly analyzed. The analysis shows that this tracking-differentiator has excellent capabilities in signal tracking, noise rejection and differential-signal acquisition, with small phase-delay and amplitude attenuation. Numerical simulation results are also given for validation. Experimental results confirm the feasibility of the proposed method.

Key words: tracking-differentiator; discrete-time system; high precision; nonlinear; filter

1 引言(Introduction)

在传统的控制工程中, 信号的微分器的设计是非常困难的, 单纯的微分器在物理上无法实现, 因而只能采用近似方法来代替, 而且只要信号中存在噪声, 那么得到的微分信号品质就会出现问题, 严重时甚至被噪声淹没. 如果能合理提取"微分"信号, 那么必定会提高控制器性能, 使得控制器的设计大大地简化. 基于提取"微分"信号的想法, 韩京清等[1]根据2阶连续系统最速综合函数, 提出了跟踪微分器的2阶动态结构, 并利用"等时区方法"分析了离散形式的最速控制问题, 构造了一个近似的离散形式的最速控制综合函数, 这就是近年来在控制界比较有影响的韩氏快速函数. 利用韩氏快速函数构造的跟踪微分器, 是一种非线性离散跟踪微分器, 能够快速、无超调、无颤振地跟踪输入信号, 又能得到品质优良的微分信号. 在此基础上, 韩京清以及其他许多学者将跟踪微分器应用到各种控制中, 并对其特性进行了广泛的研究[2~11].

基于跟踪微分器首先必须满足快速性的观点, 本文立足于双积分串联最少时间系统, 在离散采样控制系统中, 尽量使得控制沿最优轨迹线. 虽然在离散情况下, 无法得到最优轨迹线, 但可以寻找到一条依赖于采样步长的次优轨迹线. 沿着次优轨线, 得到最少的控制时间.

对于离散采样系统, 采样的时间步长取多大, 数值控制器取什么样的形式, 将影响控制的精度. 与韩氏快速函数配合使用的控制策略是最简单的欧拉折线法, 对双积分串联系统, 当控制相平面中一个点快速转移到原点时, 它的相轨迹只是最优轨迹的一个近似, 步长越大, 误差亦越大, 因而韩氏快速函

收稿日期: 2007−10−22; 收修改稿日期: 2008−06−23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874015); 国家科技支撑项目(2006BAG02B05).

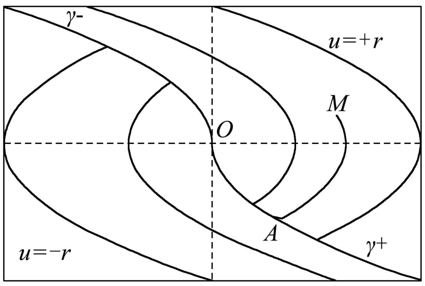
数对采样步长有较严格的限制. 现在的问题是, 能否找到一种方法能够按任意的采样步长, 在有限的几个步长内, 使得相平面中的任意点能够几乎严格地沿着最优轨迹准确到达原点. 并且在跟踪信号的相位、幅值上, 具有很好的特性, 提取的微分信号品质好. 针对这些问题, 本文研究了双积分串联系统的最优快速综合函数, 在开关曲线的附近引进线性区域, 并做归零控制, 控制策略采用精确控制, 而不是简单的欧拉折线法, 从而得到了一个新的最优快速综合函数的离散形式.

2 2阶离散系统最速控制综合函数(Synthetic function for the optimal control of the second-order discrete-time system)

对于双积分串联的2阶连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ru,\ |u| \leqslant 1,\ r > 0, \end{cases} \tag{1}$$

求系统的最速路径问题, 由最优控制的理论知道, 相平面中任意一点$M(x_1, x_2)$最多经过一次切换而到达原点, 此时开关曲线的方程为$\varGamma(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2r}x_2\,|x_2|$, 而连续形式的最速控制综合函数为$u = -\mathrm{sgn}(x_1 + \frac{1}{2r}x_2\,|x_2|)$, 最速轨迹如图1所示.



相平面上的最优轨迹线

图 1 最优轨迹示意图

Fig. 1 Illustration of the optimal trajectory

取$s = \mathrm{sgn}(\varGamma(x_1, x_2, r))$, 若$M(x_1, x_2)$不在开关曲线上, 可以证明(参见附录), 由$M(x_1, x_2)$到达开关曲线$\varGamma$的时间为$t_{\mathrm{A}} = s\frac{x_2}{r} + \sqrt{s\frac{x_1}{r} + \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{r^2}}$, 为了得到离散形式的最速综合函数, 采用等步长法, 采样周期为h, 当$h \leqslant t_{\mathrm{A}}$时, 有$u = -s$; 当$h > t_{\mathrm{A}}$时, 为了在一个步长$h$内到达开关曲线$\varGamma$, 应当修改控制量, 此时$u = -su_a$, $|u_a| < 1$, 可以证明(参见附录)

$$u_a = -\frac{1}{2} + \frac{x_2 s}{rh} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\frac{4x_2}{rh} + \frac{8x_1}{rh^2})s}. \tag{2}$$

若$M(x_1, x_2)$位于开关曲线上, 此时$\varGamma(x_1, x_2, r) = 0$, 不考虑符号$s$, 可以证明(参见附录), M到达原点O的时间为 $t_{\mathrm{B}} = \frac{|x_2|}{r}$, 当 $h \leqslant t_{\mathrm{B}}$, 有 $u = -\mathrm{sgn}(x_2)$; 当 $h > t_{\mathrm{B}}$ 时, 为了在一个步长h内到达开关曲线, 应当修改控制量, 此时不妨选取

$$u(t) = a + bt. \tag{3}$$

可以证明(参见附录)

$$\begin{cases} a = -\dfrac{2}{rh^2}(2x_2h + 3x_1), \\ b = \dfrac{6}{rh^3}(x_2h + 2x_1). \end{cases} \tag{4}$$

从而得到当相平面上的点$M(x_{10}, x_{20})$经过一系列的步骤($k = 0, 1, 2, \cdots$)而返回原点时, 其离散控制策略为

$$\begin{cases} u(k) = -u_a s,\ x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}, \\ x_1(k+1) = \\ x_1(k) + hx_2(k) + \dfrac{1}{2}u(k)h^2r - \dfrac{1}{3}bh^3, \\ x_2(k+1) = \\ x_2(k) + u(k)hr - \dfrac{1}{2}bh^3,\ k = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{5}$$

其中$u(k)$由式(2)~(4)确定, 或者用函数的形式表示为

$$u = \mathrm{fast}(x_1, x_2, r, h), \tag{6}$$

函数fast就是本文得到的最速离散综合函数.

3 离散跟踪微分器的结构分析(Analysis of the structure of the discrete-time tracking-differentiator)

对于信号序列$v(k)(k = 0, 1, 2, \cdots)$, 离散跟踪微分器为

$$\begin{cases} u(k) = \mathrm{fast}(x_1(k) - v(k), c_1x_2(k), r, c_0h), \\ x_1(k+1) = \\ x_1(k) + hx_2(k) + \dfrac{1}{2}u(k)h^2r - \dfrac{1}{3}bh^3, \\ x_2(k+1) = \\ x_2(k) + u(k)hr - \dfrac{1}{2}bh^3, k=0, 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{7}$$

其中: $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$, r为快速因子, c_1为阻尼因子, c_0为滤波因子. 恰当地选择参数r, 上述跟踪微分器将具有近似的线性表示:

$$\begin{bmatrix} x_1\,(k+1) \\ x_2\,(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{1}{c_0^2}, & (1-\dfrac{c_1}{c_0})h \\ -\dfrac{2}{c_0^2 h} & 1-\dfrac{2c_1}{c_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{c_0^2}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2}{h} \end{bmatrix} v(k).$$

为分析的方便, 上述方程又可以表示为

$$x(k+1) = Gx(k) + \Gamma v(k), k = 0, 1, 2, \cdots. \quad (8)$$

其中: $x(k) = [x_1(k), x_2(k)]^{\mathrm{T}}$, G, Γ为对应的矩阵. 假设输入信号为$v(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} A_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_i t + \phi_{i0})} + \xi(t)$, 其中$A_i, \omega_i \in \mathbb{R}^+, \phi_{i0} \in \mathbb{R}, \xi(t)$为宽平稳过程. 那么有

$$x(k) = G^k p_0 + \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i h} I_2 - G)^{-1} \Gamma A_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_i kh + \phi_{i0})} + \eta(k),\ k = 0, 1, 2, \cdots. \quad (9)$$

其中: $\eta(k+1) = G\eta(k) + \Gamma\xi(k)$, p_0由初始条件$x(0)$以及$\eta(0)$确定, 上式收敛的充分、必要条件是矩阵G的谱半径$\rho(G) < 1$, $x_1(k) = [1, 0]x(k)$, 取$C = [1, 0]$, 得到$x_1(k) = CG^k p_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} C(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i h} I_2 - G)^{-1} \Gamma A_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_i kh + \phi_{i0})} + C\eta(k)$, 记离散系统的传递函数为$\Phi(z) = C(zI_2 - G)^{-1}\Gamma$, 上式可以变化为

$$x_1(k) = CG^k p_0 + \sum_{i=1}^{N} \Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_i h}) A_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_i kh + \phi_{i0})} + C\eta(k). \quad (10)$$

下面分析跟踪微分器fast的幅频、相频特性以及滤波特性.

3.1 跟踪微分器 fast 的幅频、相频特性(Characteristics of magnitude-frequency and phase-frequency with the tracking-differentiator fast)

暂不考虑随机信号, 由式(10)知, 当信号序列足够长, 且G的谱半径$\rho(G) < 1$时, 正弦输入信号$v(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi_0)}$的跟踪输出信号$y_{\mathrm{out}}$仍将是正弦信号. $\lim\limits_{k\to\infty} G^k = O$, $y_{\mathrm{out}} = \Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi_0)}$, 因而不妨假设输出信号为$y_{\mathrm{out}} = \beta v(t - \tau_0)$, 其中$\beta$为动态放大因子, τ_0为滞后时间. 当选择滤波因子c_0, 使得满足条件$c_0 \omega h \ll 1$, 则有如下近似结论

$$\beta = \frac{1}{1 + 0.5c_0^2(c_1^2 - 1)\omega^2 h^2},\ \tau_0 = (c_0 c_1 - 1)h. \quad (11)$$

当阻尼因子$c_1 = 1$时, 进一步有

$$\beta = 1,\ \tau_0 = (c_0 - 1)h. \quad (12)$$

其相频、幅频特性曲线如图2所示.

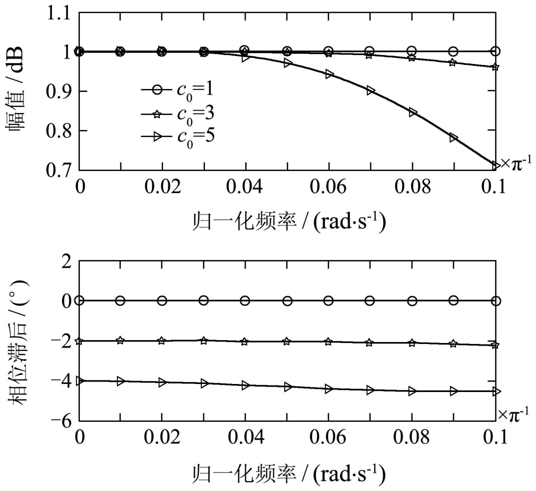


图 2　fast TD 幅频、相频特性曲线

Fig. 2　Characteristic curves of the magnitude-frequency and phase-frequency with fast TD

3.2 跟踪微分器fast的滤波特性(Filtering characteristic with the tracking-differentiator fast)

仅仅考虑宽平稳随机过程, 对于线性离散跟踪微分器, 宽平稳输入导致宽平稳输出. 当随机输入$\xi(k)$为白噪声序列时, $R_\xi = Q\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$为Kronecker δ函数, Q为常数矩阵, 得到方差矩阵满足方程$R_\eta(k+1) = GR_\eta(k)G^{\mathrm{T}} + \Gamma Q \Gamma^{\mathrm{T}}$, 当$k$足够大时, $R_\eta(k)$趋近于常数矩阵, 此时有

$$R_\eta = GR_\eta G^{\mathrm{T}} + \Gamma Q \Gamma^{\mathrm{T}}. \quad (13)$$

上式为离散系统的Lyapunov方程, 它将给出输出序列方差随滤波因子的变化规律.

不妨假设$Q = 1, c_1 = 1, h = 0.01$, 输出序列方差随滤波因子c_0变化的关系曲线如图3所示.

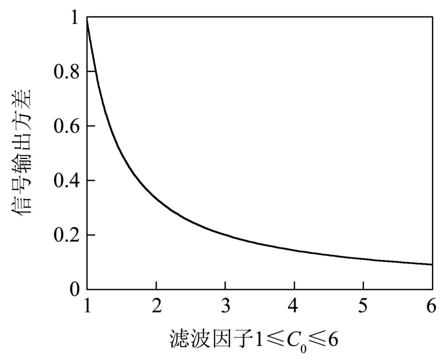


图 3　输出序列方差随滤波因子变化曲线

Fig. 3　The output series variance curve vs filtering factor c_0

由图3可以知道, 选用跟踪微分器, 并恰当地选择较大的滤波因子, 就可以较好地消除跟踪信号中的随机噪声, 而保留感兴趣的谐波信号, 这就是跟踪微分器跟踪目标信号, 而滤除噪声的机理.

4 离散跟踪微分器的数值仿真(Numerical simulation for discrete-time tracking-differentiator)

为了考察跟踪微分器对输入信号跟踪以及提取微分信号的效果, 将本文的算法fast与韩氏的跟踪微分器fhan进行比较. 考虑含噪声的谐波信号, $v(t) = \sin t + \gamma n$, 其中n为高斯白噪声, γ为噪声强度, 此处取$\gamma = 0.01$. 取快速因子$r = 65$, 初态值$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$, 采样步长为$h = 0.05$. 为了滤波, 滤波因子取$c_0 = 8$. 仿真结果如图4所示.

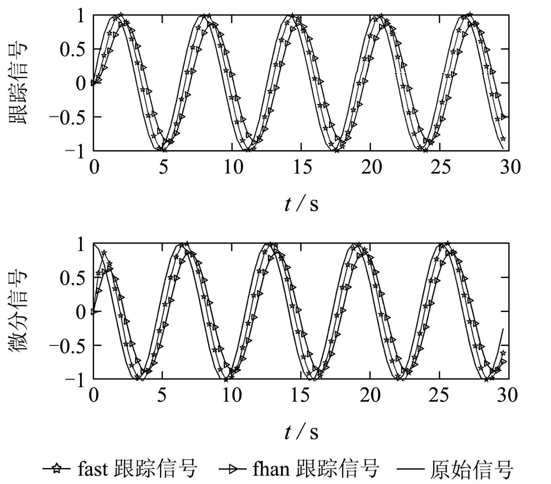


图 4 含噪声信号的滤波与微分提取

Fig. 4 The filtering and acquiring differential signal with noise signal

图4说明fhan滤波跟踪信号, 以及微分信号的相位延滞至少为一个滤波因子的大小; 而fast滤波跟踪信号, 以及微分信号的相位延滞不超过半个滤波因子的大小, 并且其信号的幅值几乎无损失. 通过对比, 发现使用fast比使用fhan效果更好, 跟踪信号以及提取的微分信号具有更少的相位延滞、幅值更加接近, 跟踪精度更好, 得到了品质更好的微分信号.

5 实验结果(Experimental results)

磁悬浮系统两点悬浮转向架实验中, 用位置传感器得到悬浮间隙的大小, 用加速度计来测量系统加速度, 通过低通滤波器, 经过积分得到位置的微分信号. 系统的控制方案采用了PID控制, 这种方案使用了昂贵灵敏的加速度计, 一旦加速度计出现故障, 系统的控制将出现不稳定现象. 为了取代加速度计, 实验中采用了跟踪微分器来跟踪位置信号, 并提取相应的微分信号, 不使用加速度计, 微分提取采用相位补偿算法, 调整滤波因子c_0的大小, 系统闭环后, 得到了与加速度计大致相同的稳定悬浮的结果. 使用跟踪微分器的算法如下: 假设跟踪微分器的输入为V_i, 输出为$V_{i+1} (i = 0, 1, 2, \cdots)$, 如图5所示.

$$\begin{cases} p_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{mi} V_i, \\ q_m = \mu_0 \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{mi} V_i. \end{cases} \tag{14}$$

其中: p_m为具有相位补偿的滤波器的输出, q_m为跟踪微分器提出的微分信号. 当$m = 4$时, α_{mi}, β_{mi}的数值为$\alpha_{41} = 4, \alpha_{42} = -6, \alpha_{43} = 4, \alpha_{44} = -1$, $\beta_{41} = 4.3333, \beta_{42} = -9.5, \beta_{43} = 7, \beta_{44} = -1.8333$, $\mu_0 = 0.1430$.

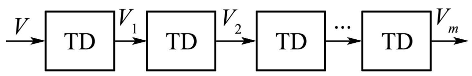


图 5 跟踪微分器组示意图

Fig. 5 The illustration of the tracking-differentiator group

在使用加速度计方案时, 为了验证跟踪微分器滤波、以及提取微分信号算法的可行性, 使用A/D采集板得到了两路独立的数值信号, 一路是位置信号(包含各种噪声), 另一路是速度信号. 验证算法的正确性, 就是按上述的思路, 选择滤波因子, 对位置信号进行跟踪, 并比较提取的微分信号与采集到的速度信号. 系统的采样频率为, $F_s = 2\ \mathrm{kHz}, c_0 = 8$, $r = 650$, 计算的结果如图6所示.

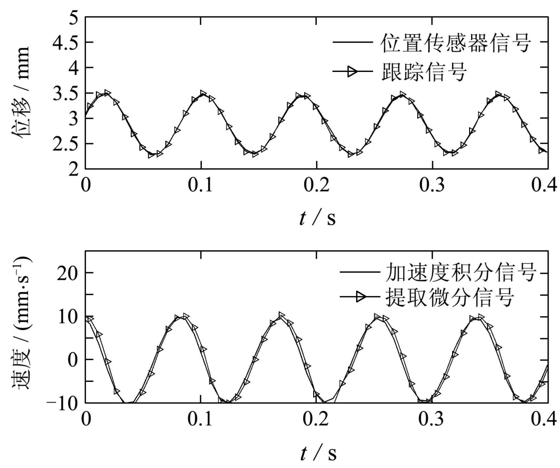


图 6 TD滤波信号及提取微分信号

Fig. 6 The TD filtering signal and acquiring differential signal

从图6可以看到, 用跟踪微分器提取微分信号来取代加速度计积分后得到速度信号具有一致性.

6 结束语(Conclusion)

本文分析了2阶连续系统最速综合函数的特性, 从离散的曲线的路径优化着手, 得到了一种新的

离散形式的跟踪微分器. 这种跟踪微分器具有快速、无超调、无颤振的特性, 结构简单, 能够有效提取微分信号, 具有良好的滤波能力. 与韩氏跟踪微分器相比较, 信号跟踪的相位延迟小、幅值衰减小, 而且滤波的性能更好. 在实验中使用跟踪微分器能够构造具有相位补偿功能的滤波器, 在得到滤波信号的同时, 还能够在线得到对应的微分信号.

参考文献(References):

[1] 韩京清, 袁露林. 跟踪微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 268 – 273.
(HAN Jingqing, YUAN Lulin. The discrete form of tracking-differentiator[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, 19(3): 268 – 273.)

[2] 张文革, 韩京清. 跟踪微分器用于零点配置[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 724 – 727.
(ZHANG Wenge, HAN Jingqing. The application of tracking-differentiator in allocation of zero[J]. *Acta Automation Sinica*, 2001, 27(5): 724 – 727.)

[3] 韩京清, 侯增广. 利用跟踪微分器构造未知函数的寻优器及求根[J]. 控制与决策, 2005, 15(3): 365 – 367.
(HAN Jingqing, HOU Zengguang. Tracking-differentiator approaches for solving optimization problems and finding roots of algebraic equations[J]. *Control and Decision*, 2005, 15(3): 365 – 367.)

[4] 张献文, 韩京清. 加载柔性臂振动的非线性应力反馈控制[J]. 系统仿真学报, 2000, 12(2): 168 – 171.
(ZHANG Xianwen, HAN Jingqing. Nonlinear strain feedback control of vibrations for flexible robot arms with a tip body[J]. *Journal of System Simulation*, 2000, 12(2): 168 – 171.)

[5] 韩京清. 从PID技术到“自抗扰”技术[J]. 控制工程, 2002, 19(3): 13 – 18.
(HAN Jingqing. From PID technique to active disturbances rejection control technique[J]. *Control Engineering of China*, 2002, 19(3): 13–18.)

[6] 黄一, 张文革. 自抗扰技术的发展[J]. 控制理论与应用. 2002, 19(4): 485 – 492.
(HUANG Yi, ZHANG Wenge. Development of active disturbance rejection controller[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 485 – 492.)

[7] 王新华, 陈增强, 袁著祉. 全程快速非线性跟踪微分器[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 875 – 878.
(WANG Xinhua, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. Nonlinear tracking-differentiator with high speed in whole course[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 875 – 878.)

[8] 武利强, 韩京清. 直线型倒立摆的自抗扰控制设计方案[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 665 – 669.
(WU Liqiang, HAN Jingqing. Active disturbance rejection controller scheme for the linear inverted pendulum[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 665 – 669.)

[9] 马中华, 吴国富, 陈敏. 利用TD估计目标状态[J]. 应用数学学报, 2007, 30(1): 1 – 9.
(MA Zhonghua, WU Guofu, CHEN Min. Tracking target state with TD[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2007, 30(1): 1 – 9.)

[10] 张淼, 吴捷. 基于自抗扰技术的光伏发电并网控制系统[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 583 – 587.
(ZHANG Miao, WU Jie. Control system of renewable energy connected grid based on the auto- disturbances rejection control technology[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(4): 583 – 587.)

[11] 乔国林, 童朝南, 孙一康. 结晶器多变量耦合系统的自抗扰控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 485 – 489.
(QIAO Guolin, TONG Chaonan, SUN Yikang. Active disturbance rejection control for mould multivariable coupled system[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 485 – 489.)

附录　最速离散综合函数的证明(Appendix The proof of optimal discrete synthetic function)

对于标准双积分串联的2阶连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u,\ |u| \leqslant 1, \end{cases} \tag{15}$$

由最优控制的理论知道, 相平面中任意一点最多经过一次切换而到达原点, 此时开关曲线的方程为$\varGamma(x_1, x_2) = x_1 + \dfrac{1}{2}x_2|x_2|$, 开关曲线由两段曲线$\gamma_+, \gamma_-$组成, $\varGamma = \gamma_+ \bigcup \gamma_-$. 连续形式的最速控制综合函数为$u = -\mathrm{sgn}(x_1 + \dfrac{1}{2}x_2|x_2|)$, 不妨设开关曲线外的点$M(x_{10}, x_{20})$到达$\varGamma$的时间为$t_{\mathrm{A}}$, 而从开关曲线上回到原点的时间为$t_{\mathrm{B}}$, 此时有$s = -\mathrm{sgn}(x_{10} + \dfrac{1}{2}x_{20}|x_{20}|)$, $t_{\mathrm{A}} = sx_{20} + \sqrt{sx_{10} + \dfrac{1}{2}x_{20}^2}$, $t_{\mathrm{B}} = |x_{20}|$. 为了得到离散形式的快速综合函数, 采用等步长法, 步长为h, 若$h \leqslant t_{\mathrm{A}}$, 则控制$u = -s$; 若$h > t_{\mathrm{A}}$, 则应减少控制量的数值, 使$M$点经过时间$h$ 到达开关曲线$\varGamma$上的点A. 当M点位于$\varGamma$上方时, $s = +1$, 此时$u = -u_a$, 且$|u_a| < 1$. u_a满足下面的方程:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} - \dfrac{1}{2u_a}(x_2^2(t) - x_{20}^2), \\ x_2(t) = x_{20} - u_a h,\ x_2(t) < 0,\ t = h, \\ x_1(t) = \dfrac{1}{2}x_2^2(t). \end{cases} \tag{16}$$

把u_a作未知数, 得到方程

$$\frac{1}{2}h^2u_a^2 + \left(\frac{1}{2}h^2 - hx_{20}\right)u_a + \frac{x_{20}^2}{2} - x_{20}h - x_{10} = 0.$$

由于$t_A = x_{20} + \sqrt{x_{10} + \dfrac{1}{2}x_{20}^2} < h$, 所以必有$x_{20} < h, h^2 > hx_{10}$ 判别式

$$\varDelta = (\frac{1}{2}h^2 - hx_{20})^2 - 4\frac{1}{2}h^2(\frac{x_{20}^2}{2} - x_{20}h - x_{10}) = \frac{h^4}{4} + h^3x_{20} + 2h^2x_{10}.$$

分两种情况:

i) 当$x_{20} \geqslant 0$时,

$$\varDelta > \frac{h^4}{4} + 2h^2(x_{10} + \frac{x_{20}^2}{2}) = \frac{h^4}{4} + 2h^2(x_{10} + \frac{x_{20}|x_{20}|}{2}) > \frac{h^4}{4} > 0;$$

ii) 当$x_{20} < 0$时, 由于$x_{10} + \dfrac{x_{20}|x_{20}|}{2} > 0$, 得到$x_{10} - \dfrac{x_{20}^2}{2} > 0$, 所以有

$$\varDelta = \frac{h^4}{4} + h^3x_{20} + 2h^2x_{10} > \frac{h^4}{4} + h^3x_{20} + 2h^2\frac{x_{20}^2}{2} =$$

$$h^2(x_{20}+\frac{h}{2})^2 \geqslant 0.$$

从i)ii)可知, 判别式$\varDelta > 0$恒成立. 方程有两个不相等的实数根, 满足$x_2(h) < 0$, 因为$x_2(h) = x_{20} - u_a h = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{\varDelta}}{h} < 0$, 必须去掉正根, 从而有

$$u_a = -\frac{1}{2} + \frac{x_{20}}{h} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4x_{20}}{h}+\frac{8x_{10}}{h^2}}. \tag{17}$$

现在可以证明$u_a^2 < 1$, 分两步来证明:

① $x_{20} \geqslant 0$, 此时

$$t_{\mathrm{A}} = x_{20} + \sqrt{x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}^2} < h,$$

因而有$x_{20} < h, x_{10} < h^2$; 由于

$$h(x_{20}+\frac{2x_{10}}{h}) =$$

$$hx_{20}+2x_{10} > x_{20}^2+2x_{10} = 2(\frac{x_{20}^2}{2}+x_{10}) > 0,$$

因而由式(3)$u_a > \frac{x_{20}}{h} \geqslant 0$, 要证明$u_a^2 < 1$, 只要证明$u_a < 1$, 下面是等价不等式:

$$u_a < 1 \Leftrightarrow$$

$$(\frac{3}{2}-\frac{x_{20}}{h})^2 > \frac{1}{4}(1+\frac{4x_{20}}{h}+\frac{8x_{10}}{h^2} \Leftrightarrow$$

$$2(1-\frac{x_{10}}{h^2} > 0 > \frac{4x_{20}}{h}-\frac{x_{20}^2}{h}-\frac{x_{20}^2}{h^2} \Leftrightarrow$$

$${}_{10} < h^2,$$

$x_{20} < 4h$, 由于$x_{20} < h, x_{10} < h^2$, 显然上述不等式成立.

② $x_{20} < 0$, 此时

$$x_{10}+\frac{x_{20}\,|x_{20}|}{2} > 0, x_{10}-\frac{x_{20}^2}{2} > 0,$$

从而有

$$u_a > -\frac{1}{2}+\frac{x_{20}}{h}+\left|\frac{1}{2}+\frac{x_{20}}{h}\right| > -1.$$

现在只需证明$u_a < 1$, 有等价不等式

$$u_a < 1 \Leftrightarrow 3-\frac{2x_{20}}{h} > \sqrt{1+\frac{4x_{20}}{h}+\frac{8x_{10}}{h^2}} \Leftrightarrow$$

$$2+\frac{x_{20}^2}{h^2} > \frac{4x_{20}}{h}+\frac{2x_{10}}{h^2},$$

而由$t_{\mathrm{A}} < h$有$x_{10} < \frac{x_{20}^2}{2}+h^2+2\,|x_{20}|\,h$, 所以

$$\frac{x_{20}^2}{2} < x_{10} < \frac{x_{20}^2}{2}+h^2+2\,|x_{20}|\,h,$$

将此不等式带入等价不等式, 有

$$\frac{4x_{20}}{h}+\frac{2x_{10}}{h^2} < \frac{4x_{20}}{h}+\frac{2}{h^2}(\frac{x_{20}^2}{2}+h^2+$$

$$2\,|x_{20}|\,h) = 2+\frac{x_{20}^2}{h^2}+4\frac{(x_{20}+|x_{20}|)}{h} = 2+\frac{x_{20}^2}{h^2},$$

因而有

$$\frac{4x_{20}}{h}+\frac{2x_{10}}{h^2} < 2+\frac{x_{20}^2}{h^2},$$

从而在任何情况下, 恒有$|u_a| < 1$.

同理, 当M点位于$\varGamma$下方时, $s = -1$, 此时$u = u_a$, 且$|u_a| < 1$. 此时

$$u_a = -\frac{1}{2}-\frac{x_{20}}{h}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4x_{20}}{h}-\frac{8x_{10}}{h^2}}. \tag{18}$$

上述两种情况综合为

$$u_a = -\frac{1}{2}+\frac{x_{20}s}{h}+\frac{1}{2}\sqrt{1+(\frac{4x_{20}}{h}+\frac{8x_{10}}{h^2})s}. \tag{19}$$

当M位于开关曲线$\varGamma$上时, $\varGamma(x_{10},x_{20}) = 0$, 满足条件

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t),\ x_2(t) = x_{20}+ut = 0,\ t = h. \tag{20}$$

此时, $t_{\mathrm{B}} = |x_{20}|$, 当$h \leqslant t_{\mathrm{B}}$, 则$u = -\mathrm{sgn}(x_{20})$, 但是, 若$h > t_{\mathrm{B}}$, 则应该减小$u$的数值, 为了让$M$一步到达原点, u不能取常数值, 而应该满足下面的条件:

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{20}+\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,\ t = h, \\ x_1(t) = x_{10}+x_{20}t+\int_0^t\int_0^\tau u(\sigma)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau = 0. \end{cases} \tag{21}$$

不妨取$u(t) = a+bt$, 代入上面的方程得到

$$\begin{cases} x_{20}+ah+\frac{1}{2}bh^2 = 0, \\ x_{10}+x_{20}h+\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{6}bh^3 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

从而得到

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{h^2}(2x_{20}h+3x_{10}), \\ b = \frac{6}{h^3}(x_{20}h+2x_{10}). \end{cases} \tag{23}$$

当相平面上的点$M(x_{10},x_{20})$经过一系列的步骤($k = 0,1,2,\cdots$)而返回原点时, 其离散控制策略为

$$\begin{cases} u = -u_a s,\ x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}, \\ x_1(k+1) = x_1(k)+hx_2(k)+\frac{1}{2}uh^2-\frac{1}{3}bh^3, \\ x_2(k+1) = x_2(k)+uh-\frac{1}{2}bh^3,\ k = 0,1,2,\cdots. \end{cases} \tag{24}$$

以上就是标准双积分串联的2阶连续系统的最速离散综合控制策略.

对于一般的双积分串联的2阶连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ru,\ |u| \leqslant 1,\ r > 0. \end{cases} \tag{25}$$

仅仅作一个变换就可以了. 所作变换为

$$z_1 = \frac{x_1}{r},\ z_2 = \frac{x_2}{r}. \tag{26}$$

至此, 已经求得一般2阶双积分连续最速系统的离散综合函数.

作者简介:

谢云德 (1965—), 男, 博士, 目前从事鲁棒控制、磁悬浮控制理论研究, E-mail: alan9999lion@yahoo.com.cn;

龙志强 (1968—), 男, 教授, 目前研究方向为容错控制、磁悬浮控制, E-mail: zhqlong@263.net.