

不确定脉冲系统的动态输出反馈 H_∞ 控制

陈武华, 唐友建, 王俊歌, 卢小梅

(广西大学 数学与信息科学学院, 广西 南宁 530004)

摘要: 研究了不确定脉冲系统动态输出反馈 H_∞ 控制问题. 考虑了两类脉冲形式: 一类脉冲是扰动型的, 一类脉冲是稳定型的. 对每类脉冲系统, 给出了鲁棒稳定性和具有有限 L_2 增益的充分条件. 并在此基础上, 基于线性矩阵不等式, 得到了 H_∞ 动态输出反馈控制器存在的充分条件. 最后, 数值例子说明了本文结果的有效性.

关键词: 脉冲系统; H_∞ 控制; 动态输出反馈控制; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-infinity control with dynamic output feedback for uncertain impulsive systems

CHEN Wu-hua, TANG You-jian, WANG Jun-ge, LU Xiao-mei

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi 530004, China)

Abstract: The problem of robust dynamic output feedback H_∞ control is investigated for uncertain impulsive systems. Two types of impulses are considered: one is destabilizing, the other one is stabilizing. For each class of impulsive systems, sufficient conditions for robust stability and weighted limited L_2 gain are developed. Furthermore, based on linear matrix inequalities, sufficient conditions for the existence of dynamic output feedback H_∞ controller are derived. Finally, numerical examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed design methods.

Key words: impulsive systems; H-infinity control; dynamic output feedback control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

许多实际系统的发展过程往往存在瞬时突变现象. 脉冲微分系统是描述和刻画这类现象较为合适的数学模型^[1,2]. 对于传统的连续系统, 如混沌系统、生态系统和经济系统, 通过引入脉冲控制, 也可以取得较好的控制效果^[2]. 从系统结构来看, 脉冲系统可以看成由连续时间系统和离散时间系统组成的混合系统. 其中连续时间系统描述了系统状态在相邻脉冲时刻之间的运动, 离散时间系统描述了在脉冲时刻状态的瞬间改变方式.

近年来, 对存在外界输入的脉冲系统的性能分析和鲁棒控制的研究引起了很多学者的关注. 文献[3]研究了非线性脉冲系统的稳定性与耗散性; 文献[4~6]分别研究了线性脉冲系统、奇异线性脉冲系统和切换奇异线性脉冲系统的状态反馈 H_∞ 控制问题, 文献[7]研究了线性脉冲系统的 H_∞ 滤波设计问题. 上述文献考虑的脉冲系统均要求脉冲是稳定型, 即要求脉冲系统中的离散系统是稳定的. 在实际

应用中, 很多脉冲系统中的脉冲是作为连续系统的瞬时扰动出现的, 这相当于脉冲系统中的离散系统是不稳定的情形. 为避免扰动的脉冲破坏系统的性能, 需要对脉冲的强度和频率作必要的限制. 因此, 文献[3~7]的方法并不适用于研究脉冲是扰动型的脉冲系统的控制问题. 就作者所知, 还没有关于脉冲系统动态输出反馈 H_∞ 控制问题研究的相关报道.

本文将研究线性脉冲系统动态输出反馈 H_∞ 控制问题, 分别就脉冲是稳定型和扰动型的, 基于线性矩阵不等式(LMIs), 建立了动态输出反馈 H_∞ 控制器存在的充分条件.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑如下不确定脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B(t)u(t) + H_1w(t), & t \neq t_k, \\ \Delta x(t) = (A_2(t) - I)x(t), & t = t_k, \\ y(t) = C_1(t)x(t) + C_2(t)u(t), \\ z(t) = E_1(t)x(t) + E_2(t)u(t) + H_2w(t), \\ x(t_0) = x_0, & t_0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 是属于 $L_2[0, \infty]$ 空间上的外界扰动输入, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ 是系统的测量输出, $z(t) \in \mathbb{R}^q$ 是系统的控制输出; $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ 代表系统内部脉冲扰动, 其中: $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$, $x(t_k) = x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h)$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ ($t_k \rightarrow \infty$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时). $H_i, i = 1, 2$ 是已知的常数矩阵, $A_1(t), A_2(t), B(t), C_1(t), C_2(t), E_1(t), E_2(t)$ 是时变不确定矩阵函数, 且

$$\begin{aligned} A_i(t) &= A_i + \Delta A_i(t), \quad B(t) = B + \Delta B(t), \\ C_i(t) &= C_i + \Delta C_i(t), \quad E_i(t) = E_i + \Delta E_i(t), \end{aligned}$$

其中: A_i, B, C_i, E_i 为已知常数矩阵, $\Delta A_i(t), \Delta B(t), \Delta C_i(t), \Delta E_i(t)$ 是时变参数不确定的未知矩阵, $i = 1, 2$. 假设参数不确定性是范数有界的, 即 $\Delta A_2(t) = D_4 F_2(t) N_2$,

$$\begin{bmatrix} \Delta A_1(t) & \Delta B(t) \\ \Delta C_1(t) & \Delta C_2(t) \\ \Delta E_1(t) & \Delta E_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} F_1(t) [N_1 \quad N_{1b}],$$

其中: $D_i, i = 1, 2, 3, 4$ 及 N_1, N_2, N_{1b} 为已知矩阵. $F_i(\cdot)$ 为 Lebesgue 可测的未知函数矩阵, 且满足 $F_i^T(t) F_i(t) \leq I, i = 1, 2$.

在本文中, 将考虑如下全阶动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_c \hat{x}(t) + B_c y(t), & t \neq t_k, \\ \hat{x}(t^+) = A_d \hat{x}(t), & t = t_k, \\ u(t) = C_c \hat{x}(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是控制器状态, A_c, B_c, C_c, A_d 为待设计的控制器参数矩阵. 将式(2)代入式(1)得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_1 + \bar{D}_1 F_1(t) \bar{N}_{1b}) \bar{x}(t) + \bar{H}_1 w(t), & t \neq t_k, \\ \bar{x}(t^+) = (\bar{A}_2 + \bar{D}_4 F_2(t) \bar{N}_2) \bar{x}(t), & t = t_k, \\ z(t) = (\bar{E}_1 + D_3 F_1(t) \bar{N}_{1b}) \bar{x}(t) + H_2 w(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{x}^T(t) &= [x^T(t) \quad \hat{x}^T(t)], \\ \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} A_1 & B C_c \\ B_c C_1 & A_c + B_c C_2 C_c \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_c D_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_4 = \begin{bmatrix} D_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{N}_2 &= [N_2 \quad 0], \quad \bar{E}_1 = [E_1 \quad E_2 C_c], \quad \bar{N}_{1b} = [N_1 \quad N_{1b} C_c], \end{aligned}$$

本文要研究的问题是对给定的 $\gamma > 0$, 为系统(1)

设计动态输出反馈控制器(2), 使得对所有允许的不确定性, i) 当 $w(t) = 0$ 时, 闭环系统(3)渐近稳定; ii) 闭环系统(3)具有不超过 γ 的有限 L_2 增益, 即在零初始条件下, 对任意的 $T > 0$, 任意的 $w(t) \in L_2[0, T]$, 有 $\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt$.

3 鲁棒 H_∞ 控制(Robust H_∞ -control)

首先研究脉冲是扰动型的闭环系统(3)的有限 L_2 增益问题.

定理 1 对某个给定的常数 $\gamma > 0, \beta > 0$, 若存在矩阵 $P > 0, Q > 0$ 及标量 $\mu > 1, \varepsilon_i > 0, i = 1, 2, 3$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\bar{\mu}_1 P + \Phi_1 + \varepsilon_1 P \bar{D}_1 \bar{D}_1^T P + \varepsilon_1^{-1} \bar{N}_{1b}^T \bar{N}_{1b} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu P \bar{A}_2^T P & \bar{N}_2^T & 0 \\ * & -P & 0 \\ * & 0 & -\varepsilon_2 I \\ 0 & * & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 P \bar{H}_1 & \bar{E}_1^T & P \bar{H}_1 & P \bar{D}_1 & \bar{N}_{1b}^T \\ * & \Phi_2 & H_2^T & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & D_3 \\ * & 0 & 0 & -\mu^{-1} Q & 0 \\ * & 0 & * & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

其中: $\Phi_1 = \bar{A}_1^T P + P \bar{A}_1$, $\Phi_2 = -\gamma^2 I + \mu Q$, $\bar{\mu}_1 = \frac{2 \ln \mu}{\beta}$, 则对任意满足 $\inf_k \{t_k - t_{k-1}\} \geq \beta$ 的脉冲时间序列 $\{t_k\}$, 闭环系统(3)是鲁棒渐近稳定的且具有不超过 γ 的有限 L_2 增益.

证 取 Lyapunov 函数 $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$, 记 $V(t) = V(\bar{x}(t))$. 首先证明当 $w(t) = 0$ 时, 系统(3)渐近稳定. 由 Schur 补, 式(5)等价于

$$\bar{A}_2^T (P^{-1} - \varepsilon_2 \bar{D}_4 \bar{D}_4^T)^{-1} \bar{A}_2 + \varepsilon_2^{-1} \bar{N}_2^T \bar{N}_2 < \mu P.$$

由上述不等式及文献[9]中的引理2.2, 有

$$\begin{aligned} V(t_k^+) &\leq \bar{x}^T(t_k) [\bar{A}_2^T (P^{-1} - \varepsilon_2 \bar{D}_4 \bar{D}_4^T)^{-1} \bar{A}_2 + \\ &\quad \varepsilon_2^{-1} \bar{N}_2^T \bar{N}_2] \bar{x}(t_k) \leq \mu V(t_k). \end{aligned} \quad (7)$$

当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时, 由式(3)(4)及文献[9]中的引理2.2, 对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \bar{x}^T(t) (P \bar{A}_1 + \bar{A}_1^T P + \varepsilon_1 P \bar{D}_1 \bar{D}_1^T P + \\ &\quad \varepsilon_1^{-1} \bar{N}_{1b}^T \bar{N}_{1b}) \bar{x}(t) \leq -\bar{\mu}_1 V(t). \end{aligned} \quad (8)$$

由此得到

$$V(t) \leq e^{-\bar{\mu}_1(t-t_k)} V(t_k^+), \quad t \in (t_k, t_{k+1}]. \quad (9)$$

注意到 $\inf_k \{t_k - t_{k-1}\} \geq \beta$ 蕴含着 $k \leq \frac{t-t_0}{\beta}$, 利用

式(7)与(9), 递推可得到, 当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$,

$$V(t) \leq \mu^{k+1} e^{-\bar{\mu}_1(t-t_0)} V(t_0) \leq \mu e^{-\frac{\ln \mu}{\beta}(t-t_0)} V(t_0),$$

由此得到闭环系统(3)当 $w(t) = 0$ 时是渐近稳定的.

下证在零初始条件下, 闭环系统(3)具有不超过 γ 的有限 L_2 增益. 对于 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, 由式(3)及(4), 有

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{\mu}_1 V(t) + 2\bar{x}^T(t) P \bar{H}_1 w(t),$$

故可推出

$$V(t) \leq e^{-\bar{\mu}_1(t-t_k)} V(t_k^+) + 2 \int_{t_k}^t e^{-\bar{\mu}_1(t-s)} \times \bar{x}^T(s) P \bar{H}_1 w(s) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}]. \quad (10)$$

特别地,

$$V(t_{k+1}) \leq e^{-\bar{\mu}_1 \beta} V(t_k^+) + 2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha(s) ds, \quad (11)$$

其中 $\alpha(s) = |\bar{x}^T(s) P \bar{H}_1 w(s)|$. 利用式(7), 得到

$$V(t_{k+1}^+) \leq V(t_k) + 2\mu \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha(s) ds. \quad (12)$$

因此, 对任意的 $T \in (t_k, t_{k+1}]$, 由式(12)及文献[9]中的引理2.2, 对任意的矩阵 $Q > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{V}(t) dt &= \int_{t_k}^T \dot{V}(t) dt + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{V}(t) dt = \\ V(T) + \sum_{i=1}^k (V(t_i) - V(t_i^+)) &\geq \\ V(T) + \sum_{i=1}^k [V(t_i) - V(t_{i-1}) - \\ 2\mu \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(s) ds] &\geq -2\mu \int_{t_0}^T \alpha(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} \eta^T(t) &= [\bar{x}^T(t) \quad w^T(t)], \\ \tilde{E}(t) &= [\bar{E}_1 + D_3 F_1(t) \bar{N}_{1b} \quad H_2], \\ \eta_e(t) &= \tilde{E}(t) \eta(t), \quad \xi^T(t) = [\bar{x}^T(t) \quad w^T(t) \quad \eta_e^T(t)]. \end{aligned}$$

定义

$$J_T = \int_0^T [\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2] dt,$$

则由 $V(0)=0$ 、式(13)及

$$2\alpha(t) \leq \bar{x}^T(t) P \bar{H}_1 Q^{-1} \bar{H}_1^T P \bar{x}(t) + w^T(t) Q w(t)$$

可得

$$J_T \leq \int_0^T [\|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 + \dot{V}(t)] dt - \int_0^T \dot{V}(t) dt \leq$$

$$\int_0^T \xi^T(t) (\Theta + \Gamma_D F_1(t) \Gamma_N + \Gamma_N^T F_1^T(t) \Gamma_D^T) \xi(t) dt. \quad (14)$$

其中: $\Gamma_D^T = [\bar{D}_1^T P \quad 0 \quad D_3^T]$, $\Gamma_N = [\bar{N}_{1b} \quad 0 \quad 0]$ 及

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Phi_1 + \mu P \bar{H}_1 Q^{-1} \bar{H}_1^T P & P \bar{H}_1 & \bar{E}_1^T \\ * & -\gamma^2 I + \mu Q & H_2^T \\ * & * & -I \end{bmatrix}.$$

由文献[9]中的引理2.2, 对任意的常数 $\varepsilon_3 > 0$, 有

$$\Gamma_D F_1(t) \Gamma_N + \Gamma_N^T F_1^T(t) \Gamma_D^T \leq \varepsilon_3 \Gamma_D \Gamma_D^T + \varepsilon_3^{-1} \Gamma_N^T \Gamma_N.$$

由Schur补, 式(6)等价于

$$\Theta + \varepsilon_3 \Gamma_D \Gamma_D^T + \varepsilon_3^{-1} \Gamma_N^T \Gamma_N < 0, \quad (15)$$

所以由式(14)和(15), 得到

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt,$$

即闭环系统(3)具有不超过 γ 的有限 L_2 增益. 证毕.

值得注意的是, 在矩阵不等式(4)~(6)中, 控制器参数未知, 且以非线性形式出现. 为了利用MATLAB中的LMI工具箱求解控制器参数, 下面将运用变量替换的方法^[8], 对给定的标量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 将非线性矩阵不等式的(4)~(6)可解性问题化为线性矩阵不等式的可解性问题.

首先对矩阵 P 和它的逆作如下分块:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

其中: $P_{11}, P_{22}, S_{11}, S_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 由 $PP^{-1} = I$ 推出 $P_{12} S_{12}^T = I - P_{11} S_{11}$. 定义

$$M = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ S_{12}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} I & P_{11} \\ 0 & P_{12}^T \end{bmatrix},$$

则 $PM = N$. 定义新的控制器变量为

$$\begin{cases} \hat{A}_c = P_{11} A_1 S_{11} + \hat{B}_c C_1 S_{11} + P_{11} B \hat{C}_c + \\ \quad P_{12} A_c S_{12}^T + \hat{B}_c C_2 \hat{C}_c, \\ \hat{B}_c = P_{12} B_c, \quad \hat{C}_c = C_c S_{12}^T, \\ \hat{A}_d = P_{11} A_2 S_{11} + P_{12} A_d S_{12}^T. \end{cases} \quad (16)$$

因此, 给定正定矩阵 P_{11} 和 S_{11} , 以及可逆矩阵 P_{12} 和 S_{12} , 控制器参数矩阵 A_c, B_c, C_c 和 A_d 可以唯一地由 $\hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c$ 和 $\hat{A}_d$ 决定.

定理2 考虑不确定脉冲系统(1). 若对给定的标量 $\gamma > 0, \beta > 0$, 存在标量 $\mu > 1, \varepsilon_i > 0, i = 1, 2, 3$, 存在矩阵 $P_{11} > 0, S_{11} > 0, Q > 0, \hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{A}_d$, 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} + \bar{\mu}_1 S_{11} & \Omega_{12} + \bar{\mu}_1 I & \Omega_{17} & D_1 \\ * & \Omega_{22} + \bar{\mu}_1 P_{11} & N_1^T & \Omega_{26} \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -\mu S_{11} & -\mu I & S_{11} A_2^T & \hat{A}_d^T & S_{11} N_2^T & 0 \\ * & -\mu P_{11} & A_2^T & A_2^T P_{11} & N_2^T & 0 \\ * & * & -S_{11} & -I & 0 & D_4 \\ * & * & * & -P_{11} & 0 & P_{11} D_4 \\ * & * & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & H_1 & \Omega_{14} & H_1 & D_1 & \Omega_{17} \\ * & \Omega_{22} & P_{11} H_1 & E_1^T & P_{11} H_1 & \Omega_{26} & N_1^T \\ * & * & \Phi_2 & H_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -\mu^{-1} Q & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中:

$$\bar{\mu}_1 = 2 \frac{\ln \mu}{\beta},$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= A_1 S_{11} + B \hat{C}_c + (A_1 S_{11} + B_1 \hat{C}_c)^T, \\ \Omega_{22} &= P_{11} A_1 + \hat{B}_c C_1 + (P_{11} A_1 + \hat{B}_c C_1)^T, \\ \Omega_{12} &= A_1 + \hat{A}_c^T, \quad \Omega_{14} = S_{11} E_1^T + \hat{C}_c^T E_2^T, \\ \Omega_{17} &= S_{11} N_1^T + \hat{C}_c^T N_{1b}^T, \quad \Omega_{26} = P_{11} D_1 + \hat{B}_c D_2, \end{aligned}$$

则存在形如(2)的输出反馈控制器, 其参数由式(16)定义, 对任意满足 $\inf_k \{t_k - t_{k-1}\} \geq \beta$ 的脉冲时间序列 $\{t_k\}$, 闭环系统(3)鲁棒渐近稳定, 且具有不超过 γ 的有限 L_2 增益。

证 由Schur补, 不等式(4)等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 P + \bar{A}_1^T P + P \bar{A}_1 & \bar{N}_{1b}^T & P \bar{D}_1 \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

在式(20)左右两边分别乘以 $\{M^T, I, I\}$ 及其转置即可得到式(17). 对式(5)两边分别乘以 $\{M^T, M^T, I, I\}$ 及其转置即可得到式(18). 类似地, 可以证明式(6)等价于式(19).

在定理1和定理2中, $\mu > 1$, 这意味着脉冲可能会破坏连续系统的稳定性. 接下来, 讨论脉冲是稳定型时, 脉冲系统(1)动态输出反馈 H_∞ 控制器的设计

问题.

定理3 若对某个给定的常数 $\gamma > 0$, 存在对称矩阵 $P > 0$, 标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^T P + P \bar{A}_1 & P \bar{H}_1 & \bar{E}_1^T & P \bar{D}_1 & \bar{N}_{1b}^T \\ * & -\gamma^2 I & H_2^T & 0 & 0 \\ * & * & -I & D_3 & 0 \\ * & 0 & * & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -P & \bar{A}_2^T P & \bar{N}_2^T \\ * & -P + \varepsilon_2 P \bar{D}_4 \bar{D}_4 P & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

则对于任何脉冲时间序列, 闭环系统(3)鲁棒渐近稳定且具有不超过 γ 的有限 L_2 增益。

受篇幅限制, 略去定理3的证明. 条件(22)蕴涵闭环系统(3)的离散系统是稳定的, 即脉冲起稳定作用. 从而脉冲发生的频率对脉冲系统的稳定性没有影响.

采用定理2的变量替换方法, 可以得到相应的动态输出反馈控制器存在的充分条件.

定理4 考虑不确定脉冲系统(1). 若对某个给定的常数 $\gamma > 0$, 以及给定的标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 存在矩阵 $P_{11} > 0, S_{11} > 0, \hat{A}_c, \hat{B}_c, \hat{C}_c, \hat{A}_d$, 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & A_1 + \hat{A}_c^T & H_1 & \Omega_{14} & D_1 & \Omega_{17} \\ * & \Omega_{22} & P_{11} H_1 & E_1^T & \Omega_{26} & N_1^T \\ * & * & -\gamma^2 I & H_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & D_3 & 0 \\ * & * & 0 & * & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -S_{11} & -I & S_{11} A_2^T & \hat{A}_d^T & S_{11} N_2^T & 0 \\ * & -P_{11} & A_2^T & A_2^T P_{11} & N_2^T & 0 \\ * & * & -S_{11} & -I & 0 & D_4 \\ * & * & * & -P_{11} & 0 & P_{11} D_4 \\ * & * & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & -\varepsilon_2^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

则存在形如式(2)的输出反馈控制器, 其参数由式(16)定义, 对任意脉冲时间序列, 闭环系统(3)鲁棒渐近稳定, 且具有不超过 γ 的有限 L_2 增益。

4 数值例子(Numerical examples)

例1 考虑脉冲系统(1)的动态输出反馈 H_∞ 控制问题, 其中系统参数如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.1 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}, \\ N_2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \\ H_2 &= 0.3, E_1 = [1 \ 0.5], E_2 = 0.3, \\ N_1 &= 0.1I, D_1 = D_2 = D_4 = I, \\ D_3 &= [1 \ 1], N_{1b}^T = [0.05 \ 0.05]. \end{aligned}$$

注意到 A_2 的谱半径是1.3, 所以上述系统的脉冲是扰动型的, 应用定理2设计动态输出反馈 H_∞ 控制器(2). 假设脉冲时间间隔满足 $t_k - t_{k-1} \geq \beta = 0.5$, 对于 L_2 增益水平 $\gamma = 1$, 选取 $\mu = 2.8$, $\varepsilon_1 = 0.15$, $\varepsilon_2 = 0.25$, $\varepsilon_3 = 0.13$, LMI(17)~(19)可解, 相应的动态输出反馈器(2)的参数如下:

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -12.5124 & -0.1817 \\ -617.5018 & 188.1709 \end{bmatrix}, \\ C_c &= [6.0479 \ 11.0301], \\ A_d &= \begin{bmatrix} 1.3168 & 0.0063 \\ 2.9363 & -0.3047 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \begin{bmatrix} -1.0517 & -1.8333 \\ -168.0540 & -60.2795 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

图1给出了当初始状态 $x_0 = (-2.4, 1.5)$, $w(t) = \sin(t/(t+1))$, $t_k - t_{k-1} = 0.5$, $F_1(t) = \text{diag}\{\cos t, \sin t\}$, $F_2(t) = \text{diag}\{|\cos t|, |\sin t|\}$, 系统状态在上述动态反馈控制律作用下的运动轨迹.

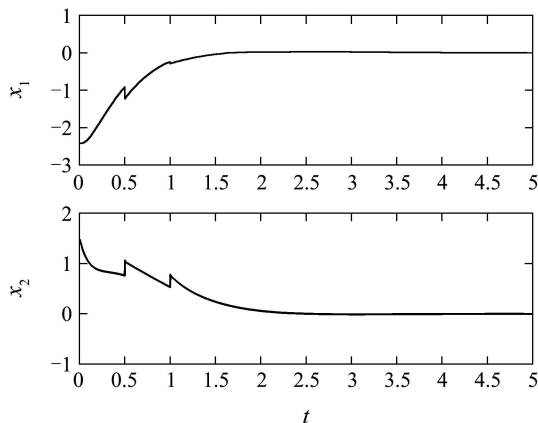


图1 例1的闭环系统的状态轨迹

Fig. 1 States of the closed-loop system in Example 1

例2 考虑脉冲系统(1)的动态输出反馈 H_∞ 控制问题, 其中系统数据给定如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix}, \\ N_2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\ H_2 &= 0.1, E_1 = [1 \ 0.5], E_2 = 0.1, \\ N_{1b}^T &= [0.1 \ 0.1], D_1 = D_2 = D_4 = I, \\ D_3 &= [-0.2 \ -0.1], N_1 = 0.1I. \end{aligned}$$

注意到 A_2 的谱半径是0.7, 上述系统的脉冲是稳定型的, 应用定理4设计动态输出反馈 H_∞ 控制器. 对于 L_2 增益水平 $\gamma = 1$, 选取 $\varepsilon_1 = 0.04$, $\varepsilon_2 = 0.16$, LMI(23)(24)可解, 相应的动态输出反馈控制器(2)的参数如下:

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} -18.7039 & -0.2553 \\ -135.3866 & 8.8084 \end{bmatrix}, \\ A_d &= \begin{bmatrix} -0.7503 & -0.0167 \\ -0.8013 & -0.3764 \end{bmatrix}, \\ B_c &= \begin{bmatrix} -8.0523 & -11.7441 \\ -129.4567 & -53.5444 \end{bmatrix}, \\ C_c &= [1.9476 \ 1.6740]. \end{aligned}$$

图2给出了当初始状态 $x_0 = (-2.5, 2.1)$, $w(t) = \sin(t/(t+1))$, $t_k - t_{k-1} = 0.45$, $F_1(t) = \text{diag}\{\cos(t/2), \sin(t/2)\}$, $F_2(t) = \text{diag}\{|\cos(t/2)|, |\sin(t/2)|\}$, 系统状态在上述动态反馈控制律作用下的运动轨迹.

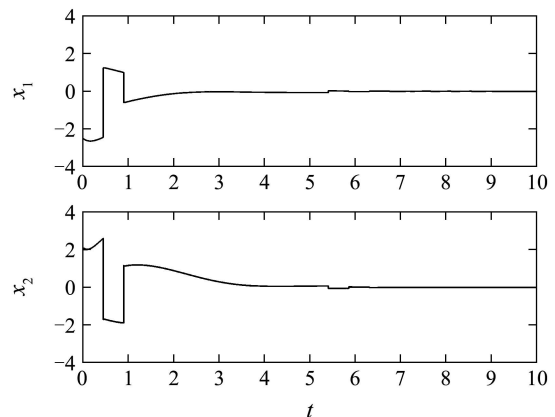


图2 例2的闭环系统的状态轨迹

Fig. 2 States of the closed-loop system in Example 2

5 结束语(Conclusions)

本文研究了不确定脉冲系统动态输出反馈 H_∞ 控制问题. 针对脉冲是扰动型和脉冲是稳定型的两类不同的脉冲系统, 基于线性矩阵不等式, 给出了动态输出反馈控制器的设计方法. 最后, 数值例子验证了方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] BAINOV D D, SIMEONOV P S. *Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications*[M]. Ellis Horwood: Chichester, 1989.
- [2] YANG T. *Impulsive Systems and Control: Theory and Applications*[M]. New York: Nova Science, 2001.
- [3] HADDAD W M, CHELLABOINA V, KABLAR N A. Non-linear impulse dynamical systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(17): 1631 – 1658.
- [4] 关治洪, 廖俊锋, 廖锐全. 不确定脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制[J], 控制理论与应用, 2002, 19(4): 623 – 626.
(GUAN Zhihong, LIAO Junfeng, LIAO Ruiquan. Robust H_∞ control of uncertain impulsive systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(4): 623 – 626.)
- [5] GUAN Z H, YAO J, HILL D. Robust H_∞ control of singular impulsive systems with uncertain perturbations[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2005, 52(6): 293 – 298.
- [6] YAO J, GUAN Z H, CHEN G, et al. Stability, robust stabilization and H_∞ control of singular-impulsive systems via switching control[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(11): 879 – 886.
- [7] XU S, CHEN T. Robust H_∞ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements[J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 509 – 516.
- [8] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 367.
- [9] WANG Y, XIE L, DE SOUZA C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear system[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(1): 139 – 149.
- [10] BOYD S, GHAOUI L EL, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

作者简介:

- 陈武华** (1967—), 男, 教授, 主要研究方向为时滞系统与脉冲系统, E-mail: wuhua.chen@163.com;
- 唐友建** (1979—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为脉冲系统与神经网络, E-mail: tangyoujian_79@sina.com;
- 王俊歌** (1981—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为脉冲系统与随机系统, E-mail: wangjunge0521@sina.com;
- 卢小梅** (1969—), 女, 讲师, 主要研究方向为时滞系统的鲁棒控制, E-mail: lu_xiaomei@126.com.