第 26 卷第 2 期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 26 No. 2
2009 年 2 月　　Control Theory & Applications　　Feb. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)02−0193−04

随机非线性系统的输出反馈控制

段　纳[1,2], 解学军[1]

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 徐州师范大学 电气工程及自动化学院, 江苏 徐州 221116)

摘要: 针对满足线性增长条件的一类随机非线性系统, 本文研究了输出反馈镇定问题. 然而不同于现有的所有文献, 由于线性增长条件中含有不可量测的状态, 引入了一个待定的高增益观测器. 利用反推设计技术, 构造性地给出了一个输出反馈控制器的设计, 通过适当地选取高增益参数, 保证了闭环系统的零解是概率意义下全局渐近稳定的, 输出几乎处处调节于零.

关键词: 随机非线性系统; 输出反馈; 线性增长条件; 反推; 概率意义下全局渐近稳定

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Output-feedback control for stochastic nonlinear systems

DUAN Na[1,2], XIE Xue-jun[1]

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China;
2. School of Electrical Engineering & Automation, Xuzhou Normal University, Xuzhou Jiangsu 221116, China)

Abstract: For a class of stochastic nonlinear systems satisfying linear growth condition, the paper studies the output-feedback stabilization problem. Being different from all the existing references, because of the unmeasurable states existing in the linear growth condition, this paper introduces an undetermined high-gain observer. By using the backstepping design technique, we constructively give a design of the output-feedback controller. The high-gain parameter is appropriately chosen to make the zero solution of the closed-loop system globally asymptotically stable in probability, and regulate the output to the origin almost surely.

Key words: stochastic nonlinear systems; output-feedback; linear growth condition; backstepping; globally asymptotically stable in probability

1　引言(Introduction)

近年来, 随机非线性系统的全局稳定控制器的设计已取得很大进展. Has'minski和Kushner分别在其经典文献[1,2]中给出了随机系统的稳定性理论. 在此数学基础上, Pan等人[3], 及Krstić和Deng [4~6]做出了原创性的工作. 对于随机系统的输出反馈控制问题, Krstić和Deng在文献[4]中设计了基于全阶观测器的反推控制器. Liu和Zhang在文献[7]中, 通过引入全阶观测器, 研究了风险灵敏度(risk-sensitive)性能指标下的输出反馈控制器的设计, 在文献[8]中, 研究了基于降阶观测器的控制器的设计. 对具有未建模动态和不确定非线性函数的随机非线性系统, 文献[9]通过随机小增益定理, 文献[10]通过引入ISS概念和改变供能函数方法, 文献[11]通过动态信号和改变供能函数方法, 分别研究了基于降阶观测器的自适应输出反馈控制问题. 不失一般性, 这些工作研究的系统可归结为如下形式:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = f(x,u)\mathrm{d}t + g(x)\mathrm{d}\omega, \\ y = x_1, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$和y分别是系统的不可量测的状态, 控制输入和可测的输出; $\omega\in\mathbb{R}^m$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的独立标准Wiener过程向量, $\Omega,\mathcal{F},P$分别是样本空间、σ–代数域和概率测度.

对系统(1), 文献[5,7,8,10,11]中的$g(x)=g(y)$, $g(\cdot)$是已知函数; 在文献[9]中, $g(x)$满足非线性增长条件$\|g(x)\|\leqslant\Omega(y)$. 然而这并非实质性的改进, 因

收稿日期: 2007−01−03; 收修改稿日期: 2008−03−11.
基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET–05–0607); 国家自然科学基金资助项目(60774010); 徐州师范大学自然科学基金资助项目(08XLB20).

为$\Omega(y)$同样是依赖于可测输出y的非负已知函数. 自然地, 人们立即会问如下问题: 若$g(x)$的上界依赖于不可测状态x而非可测输出y, 如何为随机非线性系统设计输出反馈控制器? 这是一个很有意义的问题! 因为这涵盖了更一般的系统, 而且现有文献的设计方案都不适用于这类系统. 受文献[4,5,12]的启发, 本文引入了一个待定的高增益观测器, 利用反推设计技术, 构造性地给出了一个输出反馈控制器的设计. 通过适当地选取高增益参数, 保证了闭环系统的解几乎处处存在且唯一, 其零解是概率意义下全局渐近稳定的, 且输出几乎处处调节于零.

2 预备知识(Preliminary results)

对$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$, $x_{[i]}\triangleq(x_1,\cdots,x_i)^{\mathrm T}$. 对一个给定的向量或矩阵$x$, $|x|$表示欧氏空间中向量的2-范数, 而对矩阵X, $\|X\|=[\lambda_{\max}(X^{\mathrm T}X)]^{1/2}$. C^i表示相应定义域上的i阶连续可微函数. 连续、严格单调、零点等于0的全体函数$\gamma(\cdot):[0,a)\mapsto\mathbb R_+$称为$\mathcal K$函数; 当$a=\infty$时, 若$\lim\limits_{r\to\infty}\gamma(r)=\infty$, 则称这类$\mathcal K$函数为$\mathcal K_\infty$函数; $\mathbb R_+\times\mathbb R_+$到$\mathbb R_+$的函数$\beta(s,t)\in\mathcal{KL}$表示对给定的$t$, $\beta(\cdot,t)\in\mathcal K$, 而给定$s$, $\beta(s,\cdot)$是单调下降的且$\lim\limits_{t\to\infty}\beta(s,t)=0$.

考虑如下的随机非线性系统:

$$\mathrm dx=f(x,u)\mathrm dt+g(x)\mathrm d\omega,\ \forall x_0\in\mathbb R^n, \tag{2}$$

其中: $x\in\mathbb R^n$是状态, $u\in\mathbb R^m$是输入, $\omega\in\mathbb R^r$是上面所定义的独立标准Wiener过程向量.

定义 1 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 存在一类$\mathcal{KL}$函数$\beta(\cdot,\cdot)$满足$P\{|x(t)|<\beta(|x_0|,t)\}\geqslant1-\varepsilon$, $\forall t\geqslant0,\forall x_0\in\mathbb R^n\backslash\{0\}$, 则称系统(2)的平衡点$x(t)=0$是概率意义下全局渐近稳定的.

引理 1 对系统(2), 若存在一个C^2函数$V(x)$, $\mathcal K_\infty$函数α_1, α_2, 常数$c_1>0$, $c_2\geqslant0$及非负函数$W(x)$, 使得对$\forall x_0\in\mathbb R^n,t\geqslant0$,

$$\begin{aligned}&\alpha_1(|x|)\leqslant V(x)\leqslant\alpha_2(|x|),\\&\mathcal LV(x)\triangleq\\&\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac12\mathrm{tr}\{g^{\mathrm T}(x)\frac{\partial^2V}{\partial x^2}g(x)\}\leqslant\\&-c_1W(x)+c_2,\end{aligned}$$

则

1) 对任意的$x_0\in\mathbb R^n$, 系统(2)的解是几乎处处存在且唯一的;

2) 如果$c_2=0$, $f(0)=g(0)=0$, 且$W(x)=\alpha_3(|x|)$是连续的, 其中$\alpha_3(\cdot)$是$\mathcal K$类函数, 则对任意的$x_0\in\mathbb R^n$, 系统(2)的平衡点$x=0$是概率意义下全局渐近稳定, 且$x(t)$满足$P\big\{\lim\limits_{t\to\infty}W(x(t))=0\big\}=1$.

3 主要结果(Main results)

本文考虑如下的随机非线性系统:

$$\begin{cases}\mathrm dx_i=x_{i+1}\mathrm dt+\varphi_i(x)\mathrm d\omega,\\ \qquad i=1,\cdots,n-1,\\ \mathrm dx_n=u\mathrm dt+\varphi_n(x)\mathrm d\omega,\\ y=x_1,\end{cases} \tag{3}$$

其中: x,u,y和ω如式(1)的定义: y是可测的输出, $x_2,\cdots,x_n$是不可量测的状态, $\varphi_i(x):\mathbb R^n\to\mathbb R^m$是连续函数且$\varphi_i(0)=0$. 对系统(3), 采用如下假设:

假设 1 对$\varphi_i(x)$, $i=1,\cdots,n$, 存在一个常数$c\geqslant0$满足$|\varphi_i(x)|\leqslant c\,(|x_1|+\cdots+|x_i|)$.

本文的目标是设计一个输出反馈控制器使得闭环系统在概率意义下是全局渐进稳定的.

首先引入一个高增益观测器[12]

$$\begin{cases}\dot{\hat x}_i=\hat x_{i+1}+H^il_i(x_1-\hat x_1),\\ \qquad i=1,\cdots,n-1,\\ \dot{\hat x}_n=u+H^nl_n(x_1-\hat x_1),\end{cases} \tag{4}$$

其中: 实数$H>0$是待设计的高增益参数; 这里的$\hat x_i,i=1,\cdots,n$是依赖于可测输出y的; $l_i>0$, 是使矩阵$A=\begin{pmatrix}-l_1 & & \\ \vdots & I_{n-1} & \\ -l_n & 0 & \cdots\ 0\end{pmatrix}$稳定的已知常数, 则存在正定矩阵$P$满足$A^{\mathrm T}P+PA=-I$. 记$\tilde x=(\tilde x_1,\cdots,\tilde x_n)^{\mathrm T}$, 其中$\tilde x_i=(x_i-\hat x_i)/H^{i-1},i=1,\cdots,n$, 由此可得如下的误差系统:

$$\mathrm d\tilde x=HA\tilde x\mathrm dt+\varPhi(x)\mathrm d\omega, \tag{5}$$

其中

$$\varPhi(x)=(\varphi_1(x),\frac{\varphi_2(x)}{H},\cdots,\frac{\varphi_n(x)}{H^{n-1}})^{\mathrm T}.$$

选定第1个Lyapunov函数

$$V_0(\tilde x)=(n+1)\tilde x^{\mathrm T}P\tilde x,$$

利用$H>0$, 不等式$(\sum\limits_{i=1}^na_i)^2\leqslant n\sum\limits_{i=1}^na_i^2$和假设1, 考虑到$x_i=\hat x_i+H^{i-1}\tilde x_i$, 则

$$\begin{aligned}&\mathcal LV_0=\\&-(n+1)H|\tilde x|^2+(n+1)\mathrm{tr}(\varPhi^{\mathrm T}(x)P\varPhi(x))\leqslant\\&-((n+1)H-2nc_1)|\tilde x|^2+2nc_1(\hat x_1^2+\\&\frac{\hat x_2^2}{H^2}+\cdots+\frac{\hat x_n^2}{H^{2n-2}}),\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$c_1=(n+1)\|P\|c^2(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{H^i})^2=(n+1)\|P\|c^2\cdot \frac{(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)H^i+\sum_{i=n}^{2n-2}(2n-i-1)H^i)}{H^{2n-2}}. \tag{7}$$

下面利用反推方法给出控制器的设计过程. 引进坐标变换

$$\begin{cases} z_1=\hat{x}_1, \\ z_i=\hat{x}_i-\alpha_{i-1}\left(\hat{x}_{[i-1]}\right),\ i=2,\cdots,n, \end{cases} \tag{8}$$

其中$\alpha_{i-1}\left(\hat{x}_{[i-1]}\right)$为待设计的虚拟控制.

第1步　构造第2个Lyapunov函数$V_1(\tilde{x},z_1)=V_0(\tilde{x})+\frac{1}{2}z_1^2$, 利用式(8)和不等式$(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$, 由式(4)(6)~(8)和Young不等式, 选取$H\geqslant 4nc_1$及第1个虚拟控制器

$$\alpha_1\left(\hat{x}_1\right)=-Hb_1z_1,\ b_1=\frac{1}{2}+\frac{l_1^2}{4}+n, \tag{9}$$

得

$$\mathcal{L}V_1\leqslant-(nH-2nc_1)|\tilde{x}|^2-(nH-4nc_1b_1^2)z_1^2+2nc_1(\frac{\hat{x}_3^2}{H^4}+\cdots+\frac{\hat{x}_n^2}{H^{2n-2}})+4nc_1\frac{1}{H^2}z_2^2+z_1z_2.$$

第i步$(i=2,\cdots,n-1)$(递归过程)　假设在第$i-1$步已经得到虚拟控制器:

$$\begin{cases} \alpha_{i-1}(\hat{x}_{[i-1]})=-Hb_{i-1}z_{i-1}, \\ b_{i-1}=\dfrac{d_{i-1,0}^2}{4}+\cdots+\dfrac{d_{i-1,i-2}^2}{4}+ \\ \qquad d_{i-1,i-1}+1+n-(i-2), \end{cases} \tag{10}$$

常数$b_j>0(j=1,\cdots,i-1)$是不依赖于H的实数, 使得第i个Lyapunov函数

$$V_{i-1}\left(\tilde{x},z_{[i-1]}\right)=V_0(\tilde{x})+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2H^{2(j-1)}}z_j^2,$$

满足

$$\mathcal{L}V_{i-1}\leqslant-\left(\left(n-(i-2)\right)H-2nc_1\right)\ |\tilde{x}|^2-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{H^{2j-2}}((n-(i-2))H-4nc_1b_j^2)z_j^2+2nc_1(\frac{\hat{x}_{i+1}^2}{H^{2i}}+\cdots+\frac{\hat{x}_n^2}{H^{2n-2}})+4nc_1\frac{1}{H^{2(i-1)}}z_i^2+\frac{1}{H^{2(i-2)}}z_{i-1}z_i. \tag{11}$$

下面证明对第$i+1$个Lyapunov函数

$$V_i\left(\tilde{x},z_{[i]}\right)=V_{i-1}\left(\tilde{x},z_{[i-1]}\right)+\frac{1}{2H^{2(i-1)}}z_i^2,$$

式(11)仍同样成立.

由式(4) (8)和(10)得

$$\begin{cases} z_i=\hat{x}_i+Hb_{i-1}\hat{x}_{i-1}+\cdots+ \\ \qquad H^{i-1}b_{i-1}b_{i-2}\cdots b_1\hat{x}_1, \\ \mathrm{d}z_i=(\hat{x}_{i+1}+\cdots+H^3d_{i,i-2}z_{i-2}+ \\ \qquad H^2\bar{d}_{i,i-1}z_{i-1}+Hd_{ii}z_i)\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{12}$$

其中:

$$d_{i0}=l_i+b_{i-1}l_{i-1}+b_{i-1}b_{i-2}l_{i-2}+\cdots+b_{i-1}b_{i-2}\cdots b_1l_1,$$
$$d_{ij}=\prod_{k=j-1}^{i-1}b_k-b_j\prod_{k=j}^{i-1}b_k,$$
$$b_0=0,\ j=1,\cdots,i-2,i,$$

和$\bar{d}_{i,i-1}=b_{i-1}b_{i-2}-b_{i-1}^2$是不依赖于$H$的实数. 利用$H\geqslant 4nc_1$, $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$和Young不等式, 选取第$i$个虚拟控制器:

$$\begin{cases} \alpha_i(\hat{x}_{[i]})=-Hb_iz_i, \\ b_i=\dfrac{d_{i0}^2}{4}+\dfrac{d_{i1}^2}{4}+\cdots+\dfrac{d_{i,i-1}^2}{4}+ \\ \qquad d_{ii}+1+n-(i-1). \end{cases} \tag{13}$$

进一步得到

$$\mathcal{L}V_i\leqslant-((n-(i-1))H-2nc_1)|\tilde{x}|^2-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{H^{2j-2}}((n-(i-1))H-4nc_1b_j^2)z_j^2+2nc_1(\frac{\hat{x}_{i+2}^2}{H^{2(i+1)}}+\cdots+\frac{\hat{x}_n^2}{H^{2n-2}})+4nc_1\frac{1}{H^{2i}}z_{i+1}^2+\frac{1}{H^{2(i-1)}}z_iz_{i+1}. \tag{14}$$

第n步　重复使用第i步的递归过程, 选取控制律

$$u\left(\hat{x}_{[n]}\right)=-Hb_nz_n=-\sum_{i=1}^{n}H^i\prod_{j=n-(i-1)}^{n}b_j\hat{x}_{n-(i-1)}, \tag{15}$$

其中$b_n>0$是满足式(10)的且不依赖于H的实数, 从而

$$\mathcal{L}V_n\leqslant-(H-2nc_1)\ |\tilde{x}|^2-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{H^{2j-2}}(H-4nc_1b_j^2)z_j^2-\frac{1}{H^{2n-2}}Hz_n^2, \tag{16}$$

这里

$$V_n\left(\tilde{x},z_{[n]}\right)=(n+1)\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2H^{2(j-1)}}z_j^2. \tag{17}$$

注 1　需要注意的是在控制器的设计过程中, 反复用到$H\geqslant 4nc_1$, 而从式(7)不难看出c_1依赖于H, 一个自然的问题是: 这样的H是否一定存在? 如下的定理1给出了回答

并给出本文的主要结果:

定理 1 对于满足假设1的随机非线性系统(3), 一定存在 $H^* \geqslant 0$, 对任意的 $H > H^*$, 控制器(4)和(15)保证:

1) 对任意的初值$(x_0, \hat{x}_0)$, 闭环系统(3)(4)和(15)的解是几乎处处存在且唯一的;

2) 对任意的初值$(x_0, \hat{x}_0)$, 闭环系统(3)(4)和(15)的平衡点$(\tilde{x}^{\mathrm{T}}, z_{[n]}^{\mathrm{T}}) = (0_{1\times n}, 0_{1\times n})$是概率意义下全局渐进稳定的, 且满足$P\{\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0\} = 1$.

证 由$H > 0$和$H \geqslant 4nc_1$、式(9)和(13), 若

$$H > \max\{4nc_1, 2nc_1, 4nc_1b_1^2, \cdots, 4nc_1b_{n-1}^2\} = 4nc_1b_{n-1}^2 \tag{18}$$

成立, 则利用式(16)(17)和引理1, 类似于文献[6]中Theorem 2.1, Theorem 2.2和Theorem 3.1的证明过程, 定理1的结论易证. 下面分析不等式(18)是否成立.

由式(7)(10)和(13)知c_1依赖于H, 而$b_1, \cdots, b_{n-1}$是与H无关的已知常数. 利用$H > 0$及式(7), 式(18)一定能够恒等变形为$H^{2n-1} + \sum\limits_{i=1}^{2n-2} a_iH^i > 0$, 其中$a_i$为实系数. 上式可以进一步整理成

$$(H - H_1)^{m_1} \cdots (H - H_r)^{m_r} \times (H^2 + p_1H + q_1)^{n_1} \cdots (H^2 + p_sH + q_s)^{n_s} > 0, \tag{19}$$

其中: 正整数m_i, n_j满足$\sum\limits_{i=1}^{r} m_i + 2\sum\limits_{j=1}^{s} n_j = 2n - 1$, $H_i, i \leqslant r$,是不同的实数, $(p_j, q_j)(j \leqslant s)$是满足$p_j^2 - 4q_j < 0$的不同实数对. 利用二次函数的特点可以保证对所有的$j = 1, \cdots, s$, $H^2 + p_jH + q_j > 0$.

下面分两种情况讨论H_i: 1) 当$H_1, \cdots, H_r$至少有一个是正数时, 选取$H^* = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{H_i\}$; 2) 否则, 取$H^* = 0$. 由此必存在$H^* \geqslant 0$, 对任意的$H > H^*$, 式(19)成立, 进而式(18)成立. 证毕.

4 结论(Conclusion)

针对满足线性增长条件的一类随机非线性系统, 其中线性增长条件中含有不可量测的状态, 通过引入高增益观测器和利用反推设计技术, 设计的输出反馈控制器可以保证闭环系统是概率意义下全局渐近稳定的, 输出几乎处处调节于零. 未来的工作将对采用其他方法, 找出更小的H^*设计输出反馈控制器.

参考文献(References):

[1] HAS'MINSKII R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*[M]. Rockville, Maryland: S & N International Publisher, 1980.

[2] KUSHNER H J. *Stochastic Stability and Control*[M]. New York: Academic, 1967.

[3] PAN Z G, BASAR T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1999, 37(3): 957 – 995.

[4] KRSTIĆ M, DENG H. *Stability of Nonlinear Uncertain Systems*[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[5] KRSTICĆ M, DENG H. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 328 – 333.

[6] DENG H, KRSTIĆ M, WILLIAMS R J. Stabilization of stochastic nonlinear driven by noise of unknown covariance[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1237 – 1253.

[7] LIU Y G, ZHANG J F. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with stable zero-dynamics[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2006, 45(3): 885 – 926.

[8] LIU Y G, ZHANG J F. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(3): 123 – 135.

[9] WU Z J, XIE X J. Adaptive backstepping controller design using stochastic small-gain theorem[J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 608 – 620.

[10] LIU S J, ZHANG J F, JIANG Z P. Decentralized adaptive output-feedback stabilization for large-scale stochastic nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 238 – 251.

[11] WU Z J, XIE X J, ZHANG S Y. Stochastic adaptive backstepping controller design by introducing dynamic signal and changing supply function[J]. *International Journal of Control*, 2006, 79(10): 1635 – 1646.

[12] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd Edition. New York: Prentice Hall, 2002.

作者简介:

段 纳 (1981—), 女, 博士研究生, 从事非线性系统的自适应控制的研究, E-mail: duanna08@163.com;

解学军 (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统的自适应控制、随机非线性系统等的研究, E-mail: xuejunxie@126.com.